Noncommutative Quantum Field Theory and its Applications

早川雅司
(KEK)

Part I: Overview of Noncommutative (NC) Field Theory

Part II: Reparametrization Invariant dynamics of NC membrane
(Ishibashi, Okuyama, M.H.)

Part III: Anomoly in NC YM theory and Green-Schwarz mechanism
(Iso, Kawai, M.H.)

Part IV: Universe filled with impurities and curved space-time (M.H.)

I, II のみにします (7/2)

Part-1

Overview of Noncommutative (NC) Field Theory

§1.1 背景

NC Yang-Mills (NCYM) 理論

① 摂動的な弦理論で

② string の非摂動的な構築を狙う
行列理論の一部として

現われた。

①の立場からは

<u>open string sector の代数構造の変形</u>

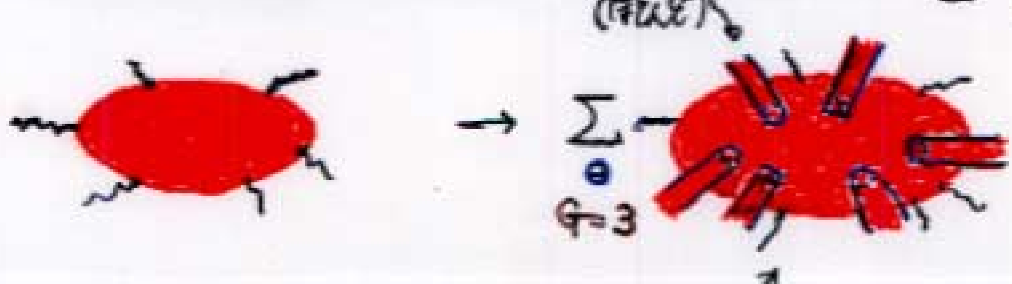
(a) $fg \rightarrow f \star g$

は、closed string mode の condensation

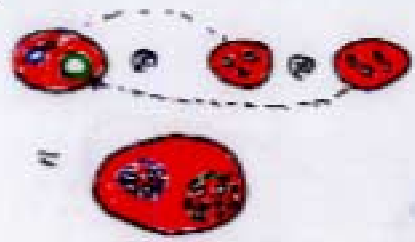
$(B^{NS}_{\mu\nu} \neq 0)$

によって引き起こされた。 $\frac{1}{4\pi\alpha'} B^{NS}_{\mu\nu} \int_{\Sigma} dX^{\mu} \wedge dX^{\nu}$

G=0



{  , ある composition law }



小さい disk の operad

⋮

★ を与える小道具の1つ

↓

変形(a)の操作がなす代数構造

⇕ 共通 … (Gerstenhaber algebra)

closed string field theory の vertex の building block : string-積のなす代数構造

($A, B_1, \cdots, B_n$: string field)

$[B_1, \cdots, B_n]$

↓

$\langle A, [B_1, \cdots, B_n] \rangle$

⇒ action を描く

(この link の定式化 : (Hofman, Ma))

② の立場からすると、これを模型の中に

見い出せるとうれしい (かもしれない)。

行列模型の立場からは
量子論（NC quantum field theory）
であるべき。

それはどんなものか？

そこに string 的, or 重力の要素
を桓間見ることができるか？

- Nonperturbative analysis
  (Ishibashi, Iso, Kawai, Kitazawa)
  ここにはいない　100mくらいのところ
- Perturbative analysis

今回は、"NC quantum field theory" の

- UV-極限
  = large N field theory の UV-極限
- IR-極限
  UV-極限との相関

2. 非可換空間上の量子場の理論 (2.1)
(NC field theory)

例として 4次元 Euclidean ϕ^4-theory :

$$S^{NC}_{\phi^4_4} = \int d^4x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi \star \partial_\mu\phi + \frac{1}{2}m^2\phi\star\phi + \frac{\lambda}{4}\phi\star\phi\star\phi\star\phi \right)$$

$C^{\nu\mu} = -C^{\mu\nu}$

[長さ]^2

$$(f\star g)(x) \equiv f(x)\, e^{\underbrace{\frac{i}{2}\overleftarrow{\partial_\mu} C^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial_\nu}}_{=\overleftarrow{\partial}\wedge\overrightarrow{\partial}}} g(x)$$

Feynman rule による 摂動的に 定義

momentum space にうつると便利 :

$$\phi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip\cdot x}\,\tilde{\phi}(p)$$

2次の項 :

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{2}\tilde{\phi}(-p) \underbrace{\boxed{e^{-\frac{i}{2}\underbrace{p\wedge p}_{=0}}}}_{=1} (p^2+m^2)\tilde{\phi}(p)$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\overrightarrow{p}}{\overline{\qquad\qquad}} = \frac{1}{p^2+m^2}$$

ϕ^4 - 結合：

$$\overset{p_1}{\phi} \star \left(\overset{p_2}{\phi} \star \left(\overset{p_3}{\phi} \star \overset{p_4}{\phi} \right) \right)$$

$$e^{ip_3\cdot x}\, e^{\frac{i}{2}\overleftarrow{\partial}\wedge\overrightarrow{\partial}}\, e^{ip_4\cdot x}$$

位相として $\frac{1}{2} p_3 \wedge p_4$

$$\frac{1}{2} p_2 \wedge (p_3 + p_4)$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} p_1 \wedge (p_2 + p_3 + p_4)}$$

$$X \Leftrightarrow \int \prod_{j=1}^{4} \frac{d^4 p_j}{(2\pi)^4} \boxed{e^{\frac{i}{2}\sum_{j<k} p_j \wedge p_k}}$$

$$\times \frac{\lambda}{4} \Phi(p_1)\, \Phi(p_2)\, \Phi(p_3)\, \Phi(p_4)$$

◦ 普通の ϕ^4 相互作用： (2.3.)

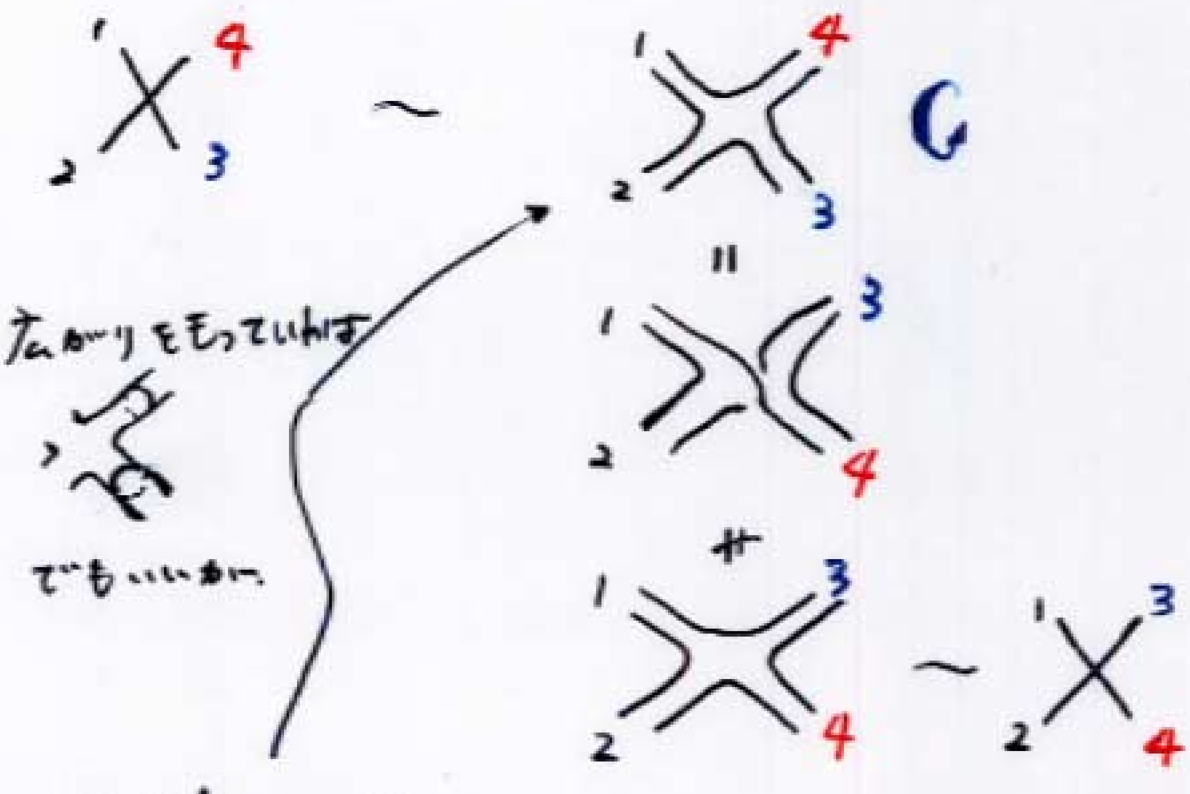
総計 4! ヶの 置換 すべてのものが等価

（ vertex は 本当に「点」）

◦ NC な ϕ^4 相互作用：

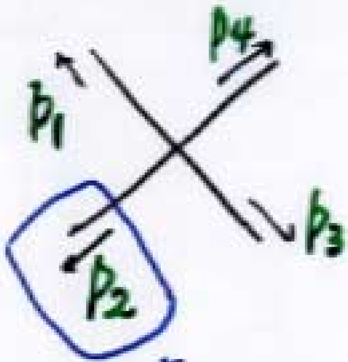
phase factor のため、cyclic symmetry のみ

しかない。

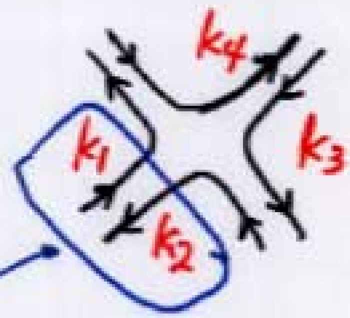


2本線 で 書きたくなる点 について.

（⇒ large-N field theory との接点を与える）



$$\boxed{p_i = k_i - k_{i-1}}$$



k_2 分が出て k_1 分が入る。

正味、$k_2 - k_1 = p_2$ の運動量が出る.

$$\tilde{\Phi}(p_i) = \tilde{\Phi}(k_i - k_{i-1})$$

$$\sum_{i<j} p_i \wedge p_j = \sum_i k_i \wedge k_{i+1}$$

$$= k_1 \wedge k_2 + k_2 \wedge k_3$$
$$k_3 \wedge k_4 + k_4 \wedge k_1$$

$$\Rightarrow \quad e^{\frac{i}{2} k_1 \wedge k_2} \tilde{\Phi}(k_2 - k_1)$$

などとまとめて眺めてみると、

$\Rightarrow$

(2.3.)

$$X \Leftrightarrow \int 4^4 \prod_{j=1}^{4} \frac{d^4 k_j}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + \cdots + k_4)$$

$$\cdot \frac{\lambda}{4} \left[e^{-\frac{i}{2} k_4 \wedge k_1} \tilde{\phi}(k_1 - k_4) \right]$$

$$\cdot \cdots \cdot$$

$$\left[e^{-\frac{i}{2} k_3 \wedge k_4} \tilde{\phi}(k_4 - k_3) \right]$$

ここで、

$$\boxed{\tilde{\phi}[k_1, k_4] \equiv e^{-\frac{i}{2} k_1 \wedge k_4} \tilde{\phi}(k_1 - k_4)}$$

という量を テイギしておくと、

$$\left(\tilde{\phi}[k_1, k_4]\right)^* = e^{\frac{i}{2} k_1 \wedge k_4} \underline{\left(\tilde{\phi}(k_1 - k_4)\right)^*}$$

$$\phi(x) : \text{real} \Rightarrow \tilde{\phi}(p)^* = \tilde{\phi}(-p) \qquad \overset{\shortparallel}{\tilde{\phi}}(k_4 - k_1)$$

$$= e^{-\frac{i}{2} k_4 \wedge k_1} \tilde{\phi}(k_4 - k_1)$$

$$= \tilde{\phi}[k_4, k_1]$$

もし、 $\tilde{\phi}^\dagger[k_1, k_4] \equiv \left(\tilde{\phi}[k_4, k_1]\right)^*$ (エルミート共役)

とすると、 $\boxed{\tilde{\phi}^\dagger[k_1, k_4] = \tilde{\phi}[k_1, k_4]}$ ∞次元 エルミート行列

今考えている real ϕ^4 理論の action:

$$S^{NC}_{\phi^4_4} = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4 \right]_*$$

で記述される系と、hermitian $N\times N$ 行列場 $\Phi_i{}^j(x)$

を含む action

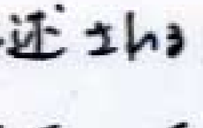
$$S_{[\phi^4_4]_N} = \int d^4x\; \mathrm{tr}\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\,\partial_\mu\Phi + \frac{1}{2}m^2\Phi^2 + \frac{\lambda_H}{4N}\Phi^4 \right)$$

$N\times N$ 行列について

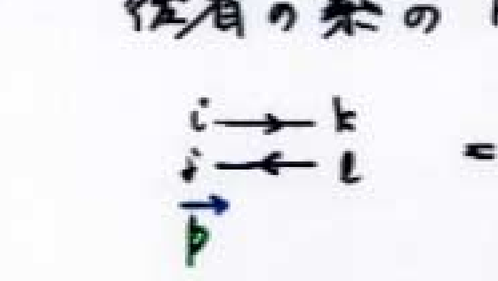
あとで large-N 極限をとる都合上

で記述される系を比較したくなる。

後者の系の Feynman rule:



$$= \delta^i{}_k\,\delta_j{}^l\,\frac{1}{p^2+m^2}$$



$$\Leftrightarrow \int 4^4 \prod_{j=1}^{4}\frac{d^4k_j}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\delta^4(k_1+\cdots+k_4)$$

$$\cdot\frac{\lambda_H}{4N}\tilde\Phi_{i_4}{}^{i_1}(k_1-k_4)\cdots\tilde\Phi_{i_3}{}^{i_4}(k_4-k_1)$$

$$\Phi_i{}^j(x) = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\tilde\Phi_i{}^j(p)\,e^{ip\cdot x}$$

NC field theory :

$$\frac{\lambda}{4}\left[e^{\frac{i}{2}k_4\wedge k_1}\tilde{\Phi}(k_1-k_4)\right]\times\cdots\times\left[e^{\frac{i}{2}k_3\wedge k_4}\tilde{\Phi}(k_4-k_3)\right]$$

large-N field theory :

$$\frac{1}{N}\frac{\lambda_H}{4}\ \tilde{\Phi}_{i_4}{}^{i_1}(k_1-k_4)\times\cdots\times\tilde{\Phi}_{i_3}{}^{i_4}(k_4-k_3)$$

◦ double-line 表示を通じて分かること：

- 両者の Feynman rule は同じ。
- 描かれる Feynman diagram は同じ。
- それに伴う combinatoric factor は同じ。

◦ 以下で議論したいこと：

「large-N 側で color index が果たしている役割」
（その contraction のパターン）
と
「NC-field theory 側で phase factor が果たす役割」
の比較

e.g. 2-loop effect on free energy (2.8.)

(a)

(b)

↑ 隣りドオシ

× $\underline{2}$

↑

むかいのものへcontract

× $\underline{1}$

どちらの立場からも同じ topology の diagram が書け、伴う combinatoric factor も共通。

<u>large N</u> ϕ^4-theory の立場から

$$\text{(a)} \sim N^3 \cdot \frac{\lambda_H}{N} = \boxed{N^2} \lambda_H$$

planar

$$\text{(b)} \sim N \times \frac{\lambda_H}{N} = \lambda_H$$

nonplanar

$N \to \infty$ (a) $\gg$ (b) (planar type が dominate)

NC field theory 側の事情

(2-10) (2-4)

(a) planar contribution

$$\int 4^4 \prod_{j=1}^{4} \frac{d^4 k_j}{(2\pi)^4} \quad (2\pi)^4 \delta^4(k_1+k_2+k_3+k_4)$$

$$\times\ 2 \times \frac{\lambda}{4} \times \quad e^{\frac{i}{2} k_4 \wedge k_1} \ \tilde{\Phi}(k_1-k_4)$$
$$e^{\frac{i}{2} k_1 \wedge k_2} \ \tilde{\Phi}(k_2-k_1)$$
$$e^{\frac{i}{2} k_2 \wedge k_3} \ \tilde{\Phi}(k_3-k_2)$$
$$e^{\frac{i}{2} k_3 \wedge k_4} \ \tilde{\Phi}(k_4-k_3)$$

$k_2 - k_1$

$k_1 - k_4$

$$(k_1 - k_4) + (k_2 - k_1) = 0$$

$$\therefore \quad k_2 = k_4$$

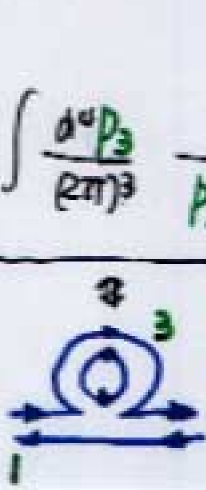
$$(\text{phase factor}) = e^{\frac{i}{2} k_2 \wedge k_1} \ e^{\frac{i}{2} k_1 \wedge k_2} \ (\leftrightarrow \delta_{j_1}^{\ j_2}\, \delta_{j_2}^{\ j_1} = N)$$
$$e^{\frac{i}{2} k_2 \wedge k_3} \ e^{\frac{i}{2} k_3 \wedge k_2}$$

$$= 1$$

$$(a) = 2 \times \frac{\lambda}{4} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \underbrace{\left(\int \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^3} \frac{1}{p_3^2 + m^2} \right)}_{} \frac{1}{p_1^2 + m^2}$$

$$= a_1 \lambda \Lambda^4$$

$$\boxed{(a) \text{ in Large } N = N^2 a_1 \lambda_H \Lambda_H^4}$$



$\sim \Lambda^2$ (Λ: cut-off)

NC field theory 側の事情　(2-(1)-2.系.)

(b) nonplanar contribution

$$\int 4^4 \prod_{i=1}^{4} \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4} \quad (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$$

$$\times\ 1 \times \frac{\lambda}{4} \times \quad e^{\frac{i}{2} k_4 \wedge k_1} \ \tilde{\phi}(k_1 - k_4)$$

$$e^{\frac{i}{2} k_1 \wedge k_2} \ \tilde{\phi}(k_2 - k_1)$$

$$e^{\frac{i}{2} k_2 \wedge k_3} \ \tilde{\phi}(k_3 - k_2)$$

$$e^{\frac{i}{2} k_3 \wedge k_4} \ \tilde{\phi}(k_4 - k_3)$$

$$\Rightarrow \quad (k_1 - k_4) + (k_3 - k_2) = 0$$

$$\therefore \quad k_1 + k_3 = k_2 + k_4$$

これと $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0$ から、

$$k_1 + k_3 = 0 = k_2 + k_4$$

$$\delta_i{}^k \delta_k{}^j = \delta_i{}^j$$

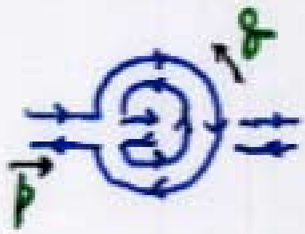
よって、

$$(\text{phase factor}) = e^{\frac{i}{2}(-k_2) \wedge k_1} e^{\frac{i}{2} k_1 \wedge k_2}$$

$$\times\, e^{\frac{i}{2} k_2 \wedge (-k_1)} e^{\frac{i}{2} (-k_1) \wedge (-k_2)}$$

$$= e^{2i\, k_1 \wedge k_2}$$

$$(b) = \frac{\lambda}{4}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\underbrace{\left(\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\, e^{ip\wedge q}\,\frac{1}{q^2+m^2}\right)}\frac{1}{p^2+m^2}$$



$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\, e^{ip\wedge q}\,\frac{1}{q^2+m^2} \qquad q\wedge p = q_\mu \underbrace{(c^{\mu\nu}p_\nu)}_{\equiv\, \tilde{p}^\mu}$$

(長さの次元)

$$= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\, e^{-iq\cdot\tilde{p}}\,\frac{1}{q^2+m^2}$$

scalar field の tree propagator の "座標" $\tilde{p}^\mu$ 表示

その赤外極限 $p_\mu \to 0$ ⟺ "座標" $\tilde{p}^\mu$ についての short distance limit

で singular $\xrightarrow[p_\mu\to 0]{} \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{\tilde{p}^2}$

$\tilde{p}^\mu = a\underbrace{(1,1,1,1)}_{\equiv\, n^\mu}$ $(a>0)$ とし、$q \to \frac{1}{a}q$

と rescale すると、

$$= \frac{1}{a^4}\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\,\underbrace{e^{-in\cdot q}}_{|q|\sim 1}\,\boxed{\frac{1}{\frac{1}{a^2}q^2+m^2}} \xrightarrow[a\to 0]{} \frac{a^2}{q^2}$$

$$\xrightarrow[a\to 0]{} \frac{1}{a^2}\cdot\int_{|q|\sim 1}\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\, e^{-in\cdot q}\,\frac{1}{q^2}$$

- いきなり $p^\mu = 0$ としたとき、phase factor は
  なくなり、planar diagram を与える積分に。
  これは 2次 発散している。
  それを反映し、$p^\mu \to 0$ で 2次的に発散
  (⇒ 後で詳しく)　　　$\left(\sim \frac{1}{\tilde{p}^2}\right)$

- $\frac{1}{\tilde{p}^2}$ は p^μ についての massless pole
  にも見える。(⇒ 後で)

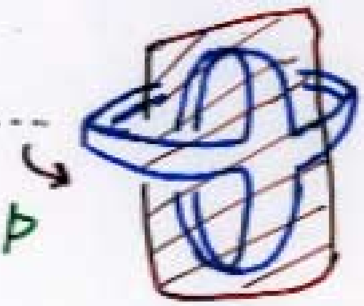
(2.14)

$|p| \to \infty$ で

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}\, e^{-i\tilde{p}\cdot q}\, \frac{1}{q^2+m^2}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{4\pi^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{(\tilde{p}^2 m^2)^{1/2}}{\tilde{p}^2}\, , \boxed{e^{-\sqrt{\tilde{p}^2 m^2}}}$$

(b) ···



$p \to \infty$ からくるものは 有限

他方

$$\sim \int_{p:小} d^4 p\, \frac{1}{\tilde{p}^2}\, \frac{1}{p^2+\underline{\underline{m^2}}} \quad : 有限$$

∴ (b) は有限

NC - field theory 例

$(a) \gg (b)$ for $\Lambda \to \infty$

⋮

(Planar は 運動量に依存するphaseを含まない
Nonplanarは、そのようなnon-trivialなphaseを含む)

(2.15)

NC-field theory の 紫外極限

$\shortparallel$

large N field theory の planar limit の 紫外極限

(e.g.)

free energy について

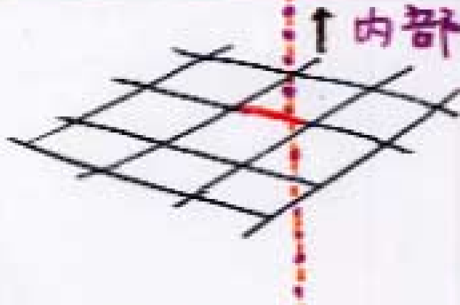
$$F_{NC} = * \Lambda^4 (a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \cdots) + \cdots$$

$$F_{\text{large}\,N} = * N^2 \Lambda_H^4 (a_0 + a_1 \lambda_H + a_2 \lambda_H^2 + \cdots)$$
$$+ * N^0 \Lambda_H^4 (b_1 \lambda_H + b_2 \lambda_H^2 + \cdots)$$
$$+ \cdots$$

(2.16.)

large N Yang Mills theory
の planar limit

↑内部自由度



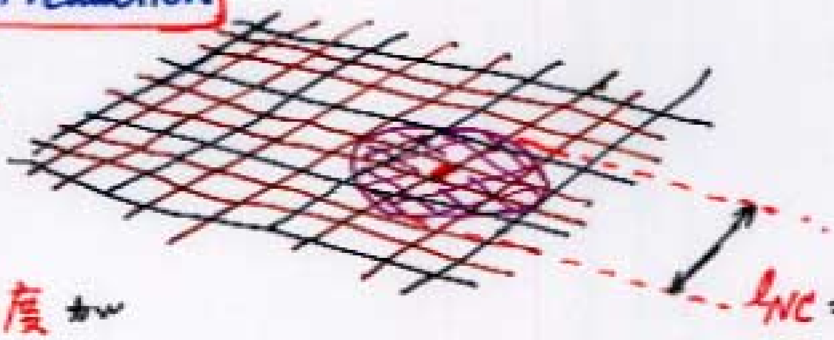
reduced model
(Eguchi-Kawai model)

UV side に
開いて

時空間の reduction

U(1) Noncommutative Yang-Mills theory

内部空間の reduction



$l_{NC} = 2\pi |C^{\mu\nu}|^{1/2}$

内部自由度が
★-積の構造により、時空間に埋め込めた。

3. IR 側の振る舞いと UV 側の振る舞いの関連

 を求めた積分:

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}\, e^{iq\cdot\tilde{p}} \boxed{\frac{1}{q^2+m^2}} = \int_0^\infty d\alpha\, e^{-\alpha(q^2+m^2)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} q \to 大 が \\ 効くのは \\ \alpha \to 小 \end{array}}$$

$$= \frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2}\, e^{-\left(\alpha m^2 + \frac{1}{4\alpha}\boxed{\tilde{p}^2}\right)}$$

$\alpha \to 0$ が 紫外発散を導き得る

$\sim \int_0 \frac{d\alpha}{\alpha^2}\, e^{-\frac{1}{4\alpha}\tilde{p}^2}$ と $p^\mu \neq 0$ で有限に

ここで、

(planar type): $\displaystyle\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}\frac{1}{q^2+m^2}$

$$= \frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2}\, e^{-\alpha m^2}$$

$$\propto \int_0 \frac{d\alpha}{\alpha^2} : 発散$$

⇒ regularization:

$$\frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2}\, e^{-\left(\alpha m^2 + \frac{1}{4\alpha}\boxed{\frac{1}{\Lambda^2}}\right)}$$

Nonplanar diagram の支配する $p^\mu \to 0$ での singular な振る舞い
(IR limit) $\left(\sim 1/\tilde{p}^2\right)$

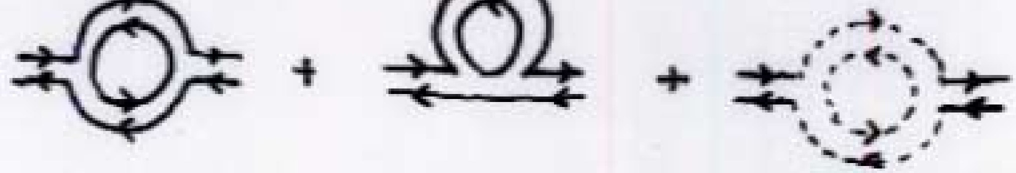
関連
≡ Planar diagram の支配する $\Lambda \to \infty$ (UV 極限) での singular な振る舞い

U(1) 非可換 Yang-Mills 理論で

NCYM

$\vec{q}$ $\Big|_{\text{NCYM, transverse}}$

UV $\xrightarrow[|q| \gg 1/\sqrt{|C|}]{}$ $-\dfrac{g^2}{16\pi^2}\dfrac{10}{3}\ln q^2\,(\delta_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu)$

(t )

$$Z_A = 1 - \left(-\frac{g^2}{16\pi^2}\frac{10}{3}\right)\ln\Lambda^2$$

IR

$\xrightarrow[|q| \ll 1/\sqrt{|C|}]{}$ $-\dfrac{g^2}{16\pi^2}\dfrac{10}{3}\underbrace{\left[-\ln(\tilde{q}^2)\right]}_{>0 \text{ for } |q| \ll |C|}(\delta_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu)$

(t )

① IR 側と UV 側の振る舞い の singularity は 一致 (log 的)

(理由は ϕ^4 のときと同じ)

② さらに係数も込めて一致

$\hat{x}^\mu$の生成する

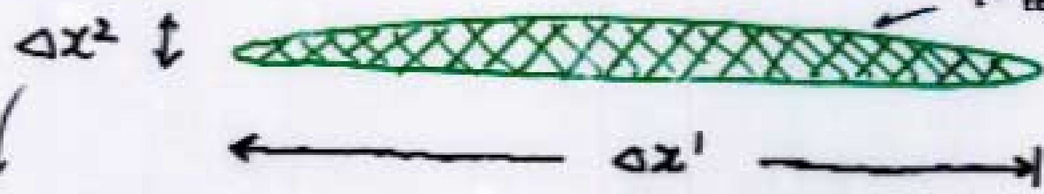
operatorの代数 $[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = -i C^{\mu\nu} \hat{1}$

≅

★の関数の代数

$\Delta x^1 \Delta x^2 \geq 2\pi |C^{12}|$

その面積



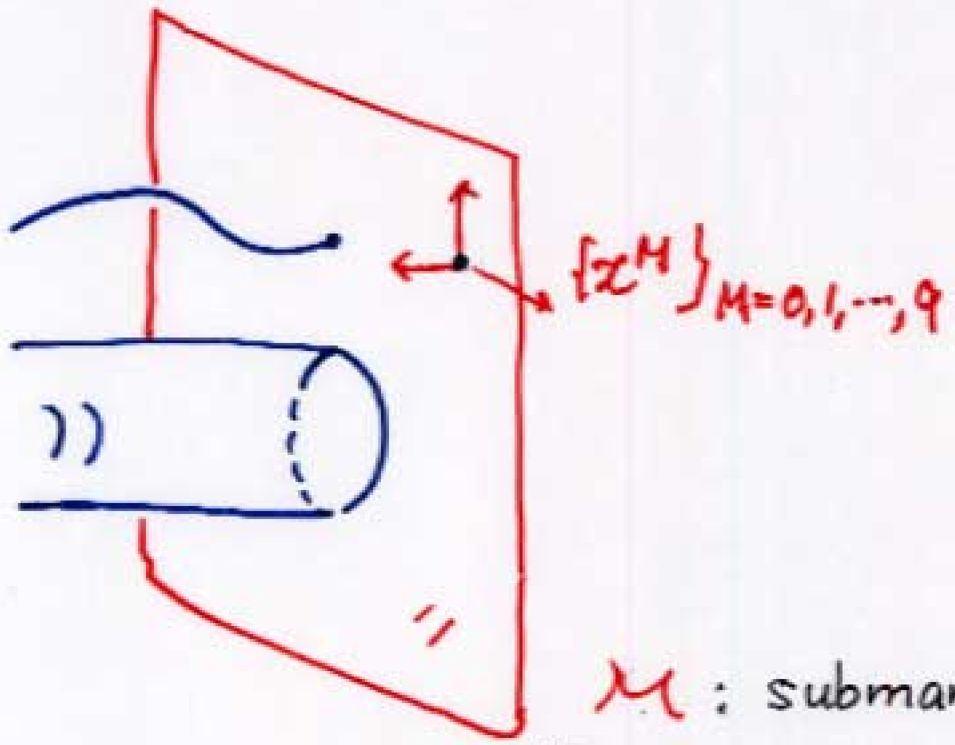
さらに小さいところを見よう

より長距離的側面も含むようになる。

§2.1. Reparametrization invariance of D-brane

one Dp-brane in flat space-time

(BPS object)



$\mathcal{M}$: submanifold

deficit

of space-time

$\mathcal{M} = \phi(\underline{\Sigma_p}) \subseteq$ space-time

ϕ

$(p+1)$-dimensional manifold

embeding map

d(?)

$$\left\{ \phi^M(\xi^0, \xi^1, \cdots, \xi^p) \right\}_{M=0,1,\cdots,9}$$

in respective local coordinate system

For instance, choice of $(\xi^0, \xi^1, \cdots, \xi^p)$

is irrelevant to describe Dp-brane

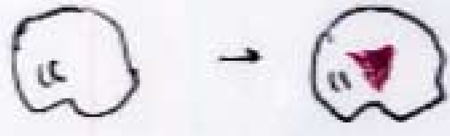
reparametrization (diffeomorphism)

invariance of world-volume

$$\left(\text{Diffeo} \cdots \frac{\partial(\xi^{0\prime}, \xi^{1\prime}, \cdots, \xi^{p\prime})}{\partial(\xi^0, \xi^1, \cdots, \xi^p)} \neq 0 \right)$$

reparametrization-invariant description

of D-brane



responce to local fluctuation

⇒ world-volume action

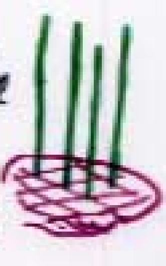
(Aganagic, Popescu, Schwarz)

variables:

$\phi^M(\xi)$ $\quad (M=0,1,\cdots,9)$

$A_\mu(\xi)$ $\quad (\mu=0,1,\cdots,p)$

for
data of gauge bundle



Δ_p

⇒ A D-brane has
U(1)-local symmetry

$\mathcal{N}=2$ space-time SUSY

$\theta^I_\alpha(\xi)$ $\quad (I=1,2$, Majorana & Weyl$)$

Redundant variables

(physically relevant mode
⇔ generator of broken space-time symmetry)

① $(p+1)$-number of $\left\{ \begin{matrix} \phi^M \\ A_\mu \end{matrix} \right\}$

② half of θ^j_α

- ① is eliminated
  by using reparametrization invariance

- ② is eliminated
  by using local κ-symmetry
  of world-volume

(D-brane has local κ-symmetry)

$\left(\begin{matrix} \downarrow \text{ないと} \\ \text{non BPS} \end{matrix} \right)$

conventional gauge

$\Rightarrow$ static gauge $\quad \xi^\mu = x^\mu \quad (\mu = 0, 1, \cdots, p-1)$

$$\phi^\mu = 0$$

half of ④ is eliminated
respecting the above

$\Rightarrow \{ A_\mu, \phi^I, \lambda \}$
$(I = p, \cdots, 9)$

$\cdots$ content of 

$\mathcal{N} = 1 \ (SYM)_{1+9}$ multiplet
reduced to $(1+p)$-dimension

§2.2. One application of NC-field theory

(in progress with Ishibashi & Okuyama)

constant $F_{\mu\nu} = B^{NS}_{\mu\nu} + 2\pi\alpha' \mathcal{F}_{\mu\nu}$

$\mathcal{F} = d\mathcal{A}$

をもつ D-brane を考える。

便宜上、Λ-変換：$\begin{cases} B^{NS} \mapsto B^{NS} + d\Lambda \\ \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A} - \frac{1}{2\pi\alpha'}\Lambda \end{cases}$

して $B^{NS} = 0$ とする。

$$\boxed{\text{constant } \mathcal{F}_{\mu\nu} \text{ ののった D-brane を考える。}}$$

目的 1.

gauge 固定を (static gauge 以外に)
うまく選んで
fixed された reparametrization を
系統的に追跡しよう。

gauge 固定

…. world-volume 上に Noncommutative
Yang-Mills theory を induce する
ものを選ぶ。

reparametrization の生成子 (current)
の同一視を可能にする点、

… 変形量子化における
formality theorem
(c.f.) Kontsevich
Jurco, Schupp & Wess
Manchon
Cattaneo, Felder

• Kishimoto
(& Asakawa)
's talk

目的 2.

主に D2-brane に注目したとき、
reparametrization の量子論的な
consistency を NC quantum field theory
を用いて調べる。

⇒ Critical dimension

DLCQ-M(atrix) theory における membrane sector の量子論的le無矛盾性

$\mathcal{N}=\underset{10}{4}$ $(NCYM)_{(1+2)}$ だけ "normal"

$\mathcal{N}=\overset{6}{2}, \overset{4}{1}, \overset{3}{0}$ $(NCYM)_{(1+2)}$

は "abnormal"

(…と主張したい。 結果ではないです。)

以下

§2.3. Boundary state description of D-brane with constant $\mathcal{F}_{\mu\nu}$

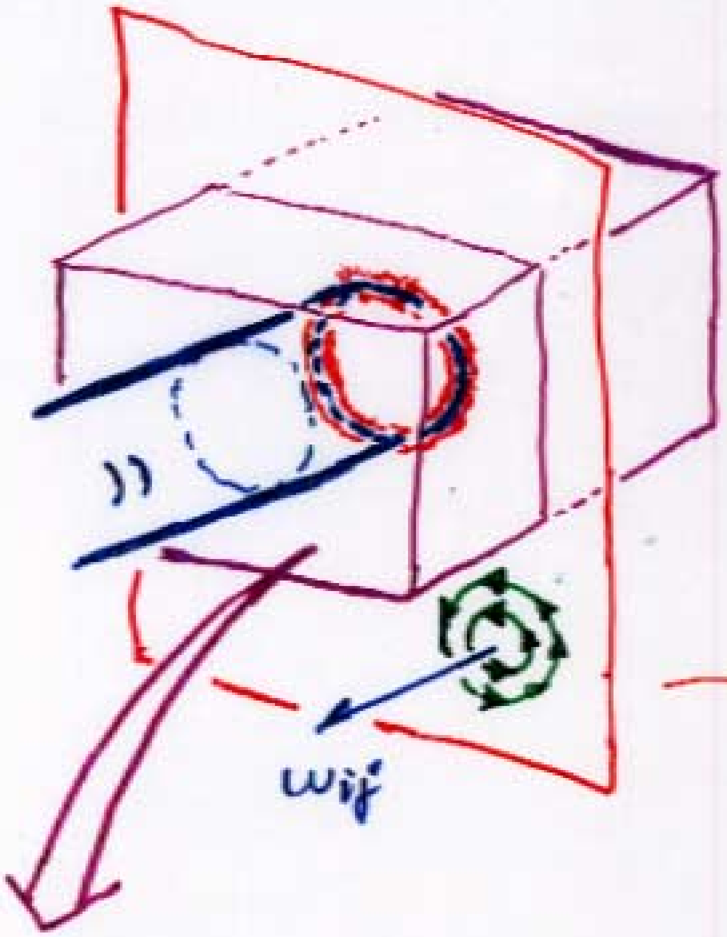
§2.4. Current for reparametrization

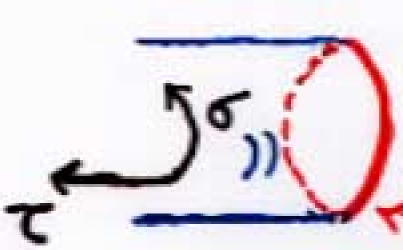
§2.5. Discussion and remained & related issues

§2.3. Boundary state description of D-brane with constant $\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu}$

$\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu} \equiv \omega_{\mu\nu}$

($\omega_{0j}=0$ とする)





: closed string world-sheet beginning with

boundary state

local fluctuatin

$|\mathcal{A}, \phi, (\Theta)\rangle$:= boundary state

coherent state of closed string Hilbert space

which respects

world-sheet conformal symmetry :

$$Q_{BRST}|\mathcal{A}, \phi\rangle = 0$$

and is specified by

the boundary condition ($\leftarrow \mathcal{A}, \phi$)

First we consider

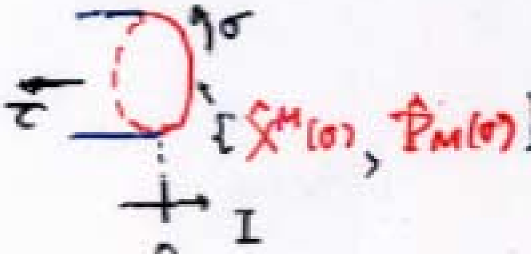
rigid D-brane with ω_{ij}

and the boundary state for it ; $|B\rangle_\omega$

$\omega_{ij}=0$ … boundary condition :

$$\hat{P}_\mu(\sigma)\,|B\rangle_{\omega=0} = 0 = \hat{X}^I(\sigma)\,|B\rangle_{\omega=0}$$

$(I = p, \cdots\cdots, 9)$



open string channel

Neumann B.C.

$\partial_\sigma x^i = 0$

$\downarrow$

$g_{\mu\nu}\partial_\sigma x^\nu + \mathcal{F}_{\mu\nu}\partial_\tau x^\nu = 0$

ω_{ij} = switch on

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\hat{P}_j(\sigma) - \omega_{ji}\,\partial_\sigma \hat{X}^i(\sigma)\right)|B\rangle_\omega = 0 = \hat{P}_0(\sigma)\,|B\rangle_\omega \\ \hat{X}^I(\sigma)\,|B\rangle_\omega = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{|B\rangle_\omega = \int Dx \,\boxed{e^{i\int d\sigma\, A_j(x)\,\partial_\sigma x^j}}\,\boxed{|x\rangle}}$$

〜のWilson loop

$$\begin{cases} \hat{X}^i(\sigma)\,|x\rangle = \underline{x^i(\sigma)}\,|x\rangle \\ \hat{P}_0(\sigma)\,|x\rangle = 0 \\ \hat{X}^I(\sigma)\,|x\rangle = 0 \end{cases}$$

c-number

profile of boundary

端点のcharged particle

$$0 = \int \mathcal{D}x \, \frac{\delta}{\delta x^i(\sigma)} \, e^{i\int d\sigma' \mathcal{A}_j(x)\, \partial_{\sigma'} x^j} \, |x\rangle$$

$$\uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow$$

$$① \qquad ② \qquad ③$$

$$= \int \mathcal{D}x \, e^{i\int d\sigma' \mathcal{A}_j(x)\, \partial_{\sigma'} x^j} \cdot$$

$$\times \Big[\underbrace{i\big(\overset{①}{\partial_\sigma x^j \partial_i \mathcal{A}_j(x)} - \overset{②}{\partial_\sigma x^j \partial_j \mathcal{A}_i(x)} \big)}_{= i\mathcal{F}_{ij}(x)\,\partial_\sigma x^j \;=\; i\,\mathcal{F}_{ij}(\hat{X})\,\partial_\sigma \hat{X}^j} |x\rangle$$

$$+ \underset{③}{\frac{\delta}{\delta x^i(\sigma)} |x\rangle} \Big]$$

If one can show that

$$-\frac{\delta}{\delta x^i(\sigma)} |x\rangle = i\hat{P}_i(\sigma)\,|x\rangle \qquad (*)$$

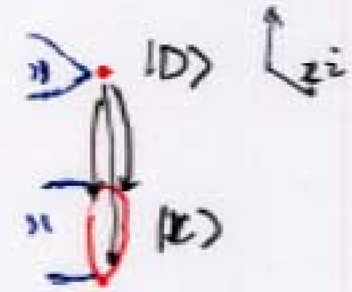
then

$$0 = i\Big(\underbrace{\mathcal{F}_{ij}(\hat{X})\,\partial_\sigma \hat{X}^j}_{= \omega_{ji}\,\partial_\sigma \hat{X}^j} - \hat{P}_i(\sigma) \Big) \underbrace{\int \mathcal{D}x \, e^{i\int d\sigma \mathcal{A}_j(x)\,\partial_\sigma x^j} |x\rangle}_{= |B\rangle_\omega}$$

as required

$$\hat{X}^i(\sigma)\,|x\rangle = x^i(\sigma)\,|x\rangle$$

$$\boxed{|x\rangle = \exp\left[-i\int d\sigma\;\hat{P}_j(\sigma)\,x^j(\sigma)\right]\underbrace{|D\rangle}_{\equiv\,|x=0\rangle}}$$



$(\because)$ $[\hat{X}^i(\sigma), \hat{P}_j(\sigma')] = i\,\delta^i{}_j\,\delta(\sigma-\sigma')$

$$\hat{X}^i(\sigma)\,|D\rangle = 0$$

$$\frac{\delta}{\delta x^j(\sigma)}\,|x\rangle = -i\,\hat{P}_j(\sigma)\,|x\rangle$$

as required

we get

$$\boxed{|B\rangle_\omega = \int Dx\,\exp\left[i\int d\sigma\left(\underbrace{A_j(x)}_{=\frac{1}{2}x^i\omega_{ij}}\partial_\sigma x^j - \hat{P}_j(\sigma)\,x^j(\sigma)\right)\right]|D\rangle}$$

D-brane fluctuation

$$\frac{1}{2}x^i\omega_{ij}\,\partial_\sigma x^j + \delta A_j(x) \qquad\qquad x^j + \delta\phi^j(x)$$

$$\equiv \text{new } A_j(x) \qquad\qquad \equiv \phi^j(x)$$

Further add $A_0(x)\,\partial_\sigma x^0$ with x^0-coordinate dependence,

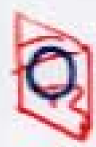
$-\hat{P}_I(\sigma)\,\phi^I(x)$, $-\hat{P}_0(\sigma)\,\phi^0(x)$ $\Longrightarrow$

$$|\mathcal{A},\phi\rangle$$

$$= \int \underline{[\mathcal{D}x]_\phi}\; e^{i\int d\sigma\, [\mathcal{A}_\mu(x(\sigma))\,\partial_\sigma x^\mu(\sigma) - \hat{P}_M(\sigma)\,\phi^M(x(\sigma))]}\, |D\rangle$$

measure invariant under reparametrization

$$h_{\mu\nu}(\xi) \equiv \partial_\mu\phi^M(\xi)\,\partial_\nu\phi^N(\xi)\,\eta_{MN}$$

ξ on 

$\Rightarrow$ norm on $\{x(\sigma)\}$-space :

$$\|\delta x\|_\phi^2 = \int d\sigma\, \sqrt{h(x(\sigma))}\, h_{\mu\nu}(x(\sigma))\, \delta x^\mu(\sigma)\,\delta x^\nu(\sigma)$$

$\Rightarrow$ $[\mathcal{D}x]_\phi$

• reparametrization invariance of $\blacksquare$

$$|\mathcal{A},\phi\rangle = \int [Dx]_\phi \, e^{i \boxed{\int d\sigma \left[\mathcal{A}_\mu(x)\partial_\sigma x^\mu - \hat{p}_M \phi^M(x) \right]}} |D\rangle$$

Under

$$\begin{cases} \delta_v \mathcal{A}_\mu = \partial_\mu v^\nu \mathcal{A}_\nu + v^\nu \partial_\nu \mathcal{A}_\mu \\ \qquad\;\; = \partial_\mu (v\cdot\mathcal{A}) + v^\nu \tilde{\mathcal{F}}_{\nu\mu} \\ \qquad\;\; \Big(= \big[(d \underbrace{i_v}_{\text{interior product}} + i_v d)\, \mathcal{A} \big]_\mu \Big), \\ \delta_v \phi^M = v^\mu \partial_\mu \phi^M, \end{cases}$$

$$\delta_v |\mathcal{A},\phi\rangle$$

$$= \int [Dx]_\phi \, e^{i\blacksquare} \cdot i \int d\sigma \Big[\overbrace{\big(\partial_\mu (v\cdot\mathcal{A}) + v^\nu \tilde{\mathcal{F}}_{\nu\mu} \big) \partial_\sigma x^\mu}^{\partial_\mu(v\cdot\mathcal{A})\partial_\sigma x^\mu \,=\, \int d\sigma\, \partial_\sigma (v\cdot\mathcal{A})(x(\sigma)) \,=\, 0} - \hat{p}_M v^\mu \partial_\mu \phi^M \Big] |D\rangle$$

$$\text{(\& partial integration)} \qquad i\int d\sigma\, v^\mu \frac{\delta}{\delta x^\mu(\sigma)} \blacksquare$$

$$= -i \int [Dx]_\phi \int d\sigma\, \partial_\sigma v^\mu(x)\, e^{i\blacksquare} = 0$$

- gauge fix

① static gauge

$$\mathcal{A}_j(x) = \frac{1}{2} x^i \omega_{ij} + A_j(x)$$

$$\mathcal{A}_0(x) = A_0(x) \longrightarrow \text{world-volume gauge field}$$

$$\phi^\mu(x) = x^\mu \quad \text{fixed}$$

$$\phi^I(x) \rightarrow \text{transverse fluctuation}$$

$$|\mathcal{A}, \phi\rangle_{st} = \int Dx\, e^{i\int d\sigma\left[\underline{\left(\frac{1}{2} x^i \omega_{ij} + A_j\right)\partial_\sigma x^j} + A_0 \partial_\sigma x^0 - \hat{P}_\mu x^\mu - \hat{P}_I \phi^I\right]} |D\rangle$$

② NC-gauge

$$|\mathcal{A}, \phi\rangle = \int [Dx]_\phi\, e^{i\int d\sigma\,[\mathcal{A}_\mu \partial_\sigma x^\mu - \hat{P}_M \phi^M]} |D\rangle$$

$$\text{diffeo} \Rightarrow = \int \underbrace{[Dx']}_{\text{flat measure in } \{x'\}}\, e^{i\int d\sigma\,[\mathcal{A}'_\mu \partial_\sigma x'^\mu - \hat{P}_M \underbrace{f^\mu_\phi(x')}_{\text{call new } \phi}]} |D\rangle$$

(Okuyama)

and,

$$\mathcal{A}_j(x) = \frac{1}{2} x^i \omega_{ij} \quad (\cdots \text{ no fluctuation })$$

$$\phi^0(x) = x^0$$

$$\phi^I(x)$$

$$\mathcal{A}_0(x) \Rightarrow \hat{A}_0(x) \quad \leftarrow \text{(not operator)}$$

$$\phi^i(x) = x^i + \theta^{ij} \hat{A}_j(x) \quad (\theta = \omega^{-1})$$

NC - gauge

… naturally obtained from IIB matrix model

$$\begin{cases} [\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i\theta^{ij} \\ \hat{\phi}^i = \hat{x}^i + \theta^{ij}\hat{A}_j \end{cases} \quad \vdots \quad \text{no } \hat{A}_\mu$$

(· Aoki, Ishibashi, Iso, Kawai, Kitazawa, Tada
· Ishibashi)

$|A, \phi\rangle_{NC}$

$$= \int \underline{\underline{Dx}}\ e^{i\int d\sigma \left[\underline{\frac{1}{2} x^i \omega_{ij} \partial_\sigma x^j} + \hat{A}_0(x)\partial_\sigma x^0 - \hat{P}_0 x^0 \underline{- \hat{P}_i \left(x^i + \theta^{ij}\hat{A}_j(x)\right)} - \hat{P}_I \phi^I \right]} |D\rangle$$

§2.2. Current for reparametrization

action : $S_\omega[\Phi] = \mathrm{Tr}\, L^{\star}[\Phi]$

$\omega_{\mu\nu}$: 一般の simplectic form

$\star$: 対応する star 積

given by Kontsevich deformation quantization procedure

(or by Fedesov procedure
⇒ Asakawa's talk)

$\Phi = (\hat{A}_\mu, \phi^I, \lambda)$

が書けているとする。

original $|A, \phi\rangle$ -- reparametriaztion 不変

$\omega_{\mu\nu}$ を力学変数の一部だとみなし、
適切に変換している限り、
action $S_\omega[\Phi]$ ($= \hat{S}[\omega, \Phi]$ と書くべき)
は不変だろう。

⇓

(もう少し詳しく.)

Reparametrization

$$x^\mu \mapsto x'^\mu$$

のもとで

$$\Phi(x) \mapsto \Phi'(x')$$

$$\omega_{\mu\nu}(x) \mapsto \omega'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\,\omega_{\alpha\beta}(x)$$

と対応して

$$\star \mapsto \star'$$

変形量子化

… $\star$ と $\star'$ は "gauge" equivalent :

differential operator $\tilde{\mathcal{J}}$ で

$$\begin{cases} \Phi'(x') = \tilde{\mathcal{J}}\,\Phi(x) \\ \tilde{\mathcal{J}}\Phi_1 \star' \tilde{\mathcal{J}}\Phi_2 = \tilde{\mathcal{J}}(\Phi_1 \star \Phi_2) \end{cases}$$

なるものがある。

$$\begin{tikzcd}
\Phi_1 \arrow[d, dash] \arrow[rrr, "\tilde{\mathcal{J}}"] & & & \tilde{\mathcal{J}}\Phi_1 \arrow[d, dash] \\
\star \arrow[r] & \Phi_1 \star \Phi_2 \arrow[r, "\tilde{\mathcal{J}}"] & \tilde{\mathcal{J}}(\Phi_1 \star \Phi_2) = \tilde{\mathcal{J}}\Phi_1 \star' \tilde{\mathcal{J}}\Phi_2 & \star' \arrow[l] \\
\Phi_2 \arrow[u, dash] \arrow[rrr, "\tilde{\mathcal{J}}"'] & & & \tilde{\mathcal{J}}\Phi_2 \arrow[u, dash]
\end{tikzcd}$$

一致!!

今

$$\mathrm{Tr} \mapsto \mathrm{Tr}' = \mathrm{Tr}\,\hat{v}^{-1}$$

が 定義できたとすると.

$$\mathrm{Tr}\, L^{*}(\Phi(x)) \longmapsto \mathrm{Tr}'\, L^{*\prime}(\Phi(x))$$

$$= \mathrm{Tr}\,\hat{v}^{-1}\,\hat{v}\,L^{*}(\Phi(x))$$

$$= \mathrm{Tr}\, L^{*}(\Phi(x))$$

∴ action は不変:

$$S_{w'}[\Phi] = S_{w}[\Phi]$$

reparametrization の current は ?

- $S_{w=\mathrm{const}}[\Phi] = S_{\underset{\uparrow}{\underline{NCYM}},\, w}[\Phi]$

  仮定

- w : "metric"

(c.f.) $\int d^dx\, \delta g^{\mu\nu}(x)\, \underline{T_{\mu\nu}(x)}$ energy-momentum tensor

$$= S[g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \underline{\phi}] - S[g_{\mu\nu}, \underline{\phi}]$$

$\overset{\text{constant}}{\omega} \to \omega + \delta\omega$ としたときの応答：

$$S_{\omega+\delta\omega}[\Phi] - S_\omega[\Phi]$$

$$= \mathrm{Tr}\ \delta\theta^{\mu\nu}(x)\,\underline{J_{\mu\nu}(x)}$$

current !!

$(\theta+\underline{\delta\theta})\cdot(\omega+\delta\omega)=1$

$(\to\ \delta\theta = -\omega\cdot\theta\cdot\omega)$

$$\text{左辺の量} = S_{\omega+\delta\omega}[(\Phi+\delta\Phi)-\delta\Phi] - S_\omega[\Phi]$$

$$\simeq \left(S_{\omega+\delta\omega}[\Phi+\delta\Phi] - S_\omega[\Phi]\right)_{=0}$$

$$-\mathrm{Tr}\ \delta\Phi(x)\frac{\delta S_\omega[\Phi]}{\delta\Phi(x)}$$

$$\simeq -\left(S_\omega[\Phi+\delta\Phi] - S_\omega[\Phi]\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}&-\mathrm{Tr}\left(\delta\theta^{\mu\nu}(x)\,J_{\mu\nu}(x)\right)\\ &= S_\omega[\Phi+\delta\Phi] - S_\omega[\Phi]\end{aligned}}$$

$\delta\Phi$ associated with $\delta\omega$ は？

$\boxed{\delta\Phi}$

T-dual coordinate description

$$\boxed{\begin{aligned} |D\rangle &= |x=0\rangle = \int Dy \; |\check{y}\rangle \\ \hat{P}_{\underset{I}{i}}(\sigma)|\check{y}\rangle &= \partial_\sigma y_{\underset{I}{i}}(\sigma)\,|\check{y}\rangle \end{aligned}}$$

(c.f.) SW-map ($A_\mu \leftrightarrow \hat{A}_\mu$)
obtained by Okuyama

$$|\mathcal{A}', \phi'\rangle_{NC} = |\mathcal{A}, \phi\rangle_{NC}$$

$\mathcal{A}_\mu = \frac{1}{2} x^\nu \omega_{\nu\mu}$ から δA 分

ずらしたもの ;

$$\delta A \downarrow \quad \delta\omega = d\delta A \quad \uparrow \text{input}$$

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A} + \underline{\delta A} \leftarrow \text{input}$$

$$\phi'^i(x) = x^i + \theta^{ij} \underline{\hat{A}'_j(x)}$$

$$\equiv \hat{A}_j(x) + \underline{\delta\hat{A}_j(x)}$$

これを決める

$\delta\hat{A}_j$ について（余計な項は省略）

$$|\mathcal{A}', \phi'\rangle_{NC}$$

$$= \int Dx \exp\left[i \int d\sigma \left(\left(\frac{1}{2} x^i \omega_{ij} + \delta A_j(x) \right) \partial_\sigma x^j - \underline{\hat{P}_i(\sigma)} \left(x^i + \theta^{ij} \hat{A}_j(x) \right) \right) \right] \underline{|D\rangle}$$

$$\int Dy\, |\tilde{y}\rangle$$

$$= \int Dy\, Dx \exp\left[i \int d\sigma \left(\left(\frac{1}{2} x^i \omega_{ij} + \delta A_j(x) \right) \partial_\sigma x^j - \underline{\partial_\sigma y_i} \left(x^i + \theta^{ij} \hat{A}_j'(x) \right) \right) \right] |\tilde{y}\rangle$$

$y^i \equiv \theta^{ij} y_j$

$x^i = y^i + \xi^i$

$$\rightarrow = \int d\sigma \left(\frac{1}{2} (x^i - y^i) \omega_{ij} \partial_\sigma (x^j - y^j) - \frac{1}{2} y^i \omega_{ij} y^j \right)$$

$$|A', \phi'\rangle_{NC}$$

$$= \int Dy\, e^{-i\int d\sigma \frac{1}{2} y^i \omega_{ij} y^j}$$

$$\times \int D\xi \exp\Big[i\int d\sigma \Big(\frac{1}{2}\xi^i \omega_{ij} \partial_\sigma \xi^j + \delta A_j(y+\xi)\,\partial_\sigma (y^j + \xi^j) - \partial_\sigma y^j \hat{A}'_j(y+\xi) \Big)\Big] |y\rangle$$

①

これが

$$|A, \phi\rangle_{NC}$$

$$= \int Dy\, e^{-i\int d\sigma \frac{1}{2} y^i \omega_{ij} y^j}$$

$$\times \int D\xi \exp\Big[i\int d\sigma \Big(\frac{1}{2}\xi^i \omega_{ij} \partial \xi^j - \partial_\sigma y^j \hat{A}_j(y+\xi) \Big)\Big] |y\rangle$$

②

と等しくあって欲しい。

$\Rightarrow$ ① = ② for $\forall y$

$\Rightarrow \delta\hat{A}_\mu = \hat{A}'_\mu - \hat{A}_\mu$ が決まる

⋮

perturbation theory with

$$\langle \xi^i(\sigma_1)\, \xi^j(\sigma_2) \rangle = i\frac{\theta^{ij}}{2}\, \varepsilon(\sigma_1 - \sigma_2)$$

after Pauli-Villars regularization

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \delta\hat{A}_\mu &= -\delta A_\mu \\ &+ 2i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \left(\partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_{2k+1}} \hat{A}_\mu \right) \\ &\quad \times \left(\frac{i}{2} \theta^{\mu_1 \nu_1} \right) \times \cdots \times \left(\frac{i}{2} \theta^{\mu_{2k+1} \nu_{2k+1}} \right) \\ &\quad \times \left(\partial_{\nu_1} \cdots \partial_{\nu_{2k}} \delta A_{\nu_{2k+1}} \right) \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \quad -\mathrm{Tr}\left(\delta\theta^{ij}(x) \, J_{ij}(x) \right)$$

$$= S_\omega[\Phi + \underline{\delta\Phi}] - S_\omega[\Phi]$$

に入れる

1-loop renormalization of current J_{ij}

$$\left\langle [J_{ij}](x) \, \Phi_{i_1}(x_1) \cdots \Phi_{i_n}(x_n) \right\rangle$$

が有限になるように [ ] をテイギ.

... OK

ある量を評価中

§2.5 Discussion and remained & related issues

- reparametrization (of world volume) の生成子である current が noncommutative field theory (& deformation quantization) の枠組で出せる。

- Membrane の reparametrization の量子論的な側面を調べるために NC quantum field theory を用いることができる。

- やるべきこと：
  - 正確な fermion 場 λ の変換性 $\delta\lambda$ を知りたい。
  - string field theory からの変換性の同一視と reparametrization symmetry の代数(群)構造の把握。
(homotopic associative algebra ?)