deSitter energy?

白水徹也（東工大）

Shiromizu, Nakao, Kodama and Maeda, PRD47, 3099(1993)
Nakao, Shiromizu and Maeda, CQG 11, 2059(1994)
Shiromizu, PRD49, 5026(1994)
Kastor and Traschen, CQG13, 2753(1996)
Shiromizu, PRD60, 064019(1999)
Shiromizu, Ida and Torii, JHEP11, 010(2001)
Kastor and Traschen, hep-th/0206105
Kastor, Shiromizu and Traschen, in progress

Outline

1.何故いまさらdeSitter

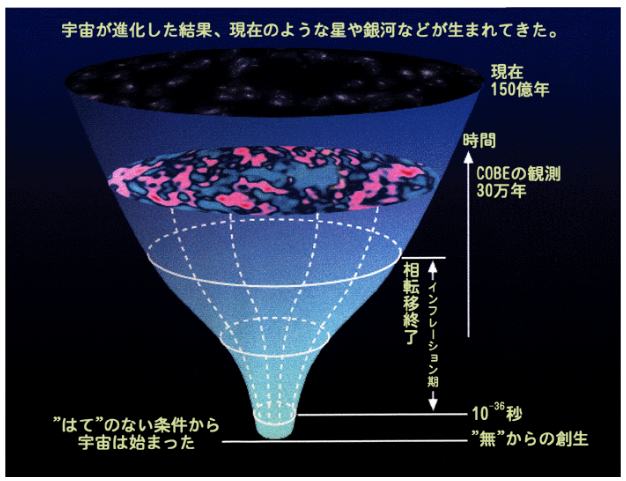
2.deSitter時空

3.deSitterエネルギー？

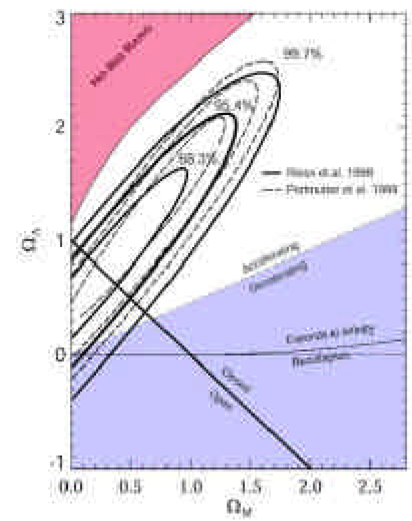
1.何故いまさらdeSitter

横山順一氏（大阪大学）曰く

始めも終わりもインフレーション



K.Sato, Guth,…



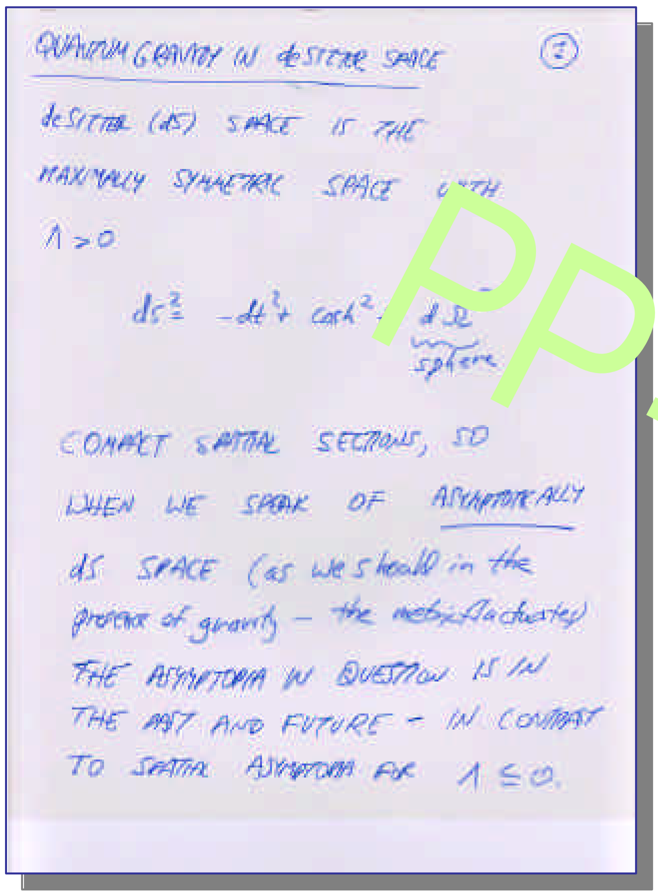
Perlmutter et al

Inflation, Dark energy $\approx$ positive cosmological constant $\Lambda > 0$

始めも終わりもdeSitter

Wittenの講演@String2001

Witten



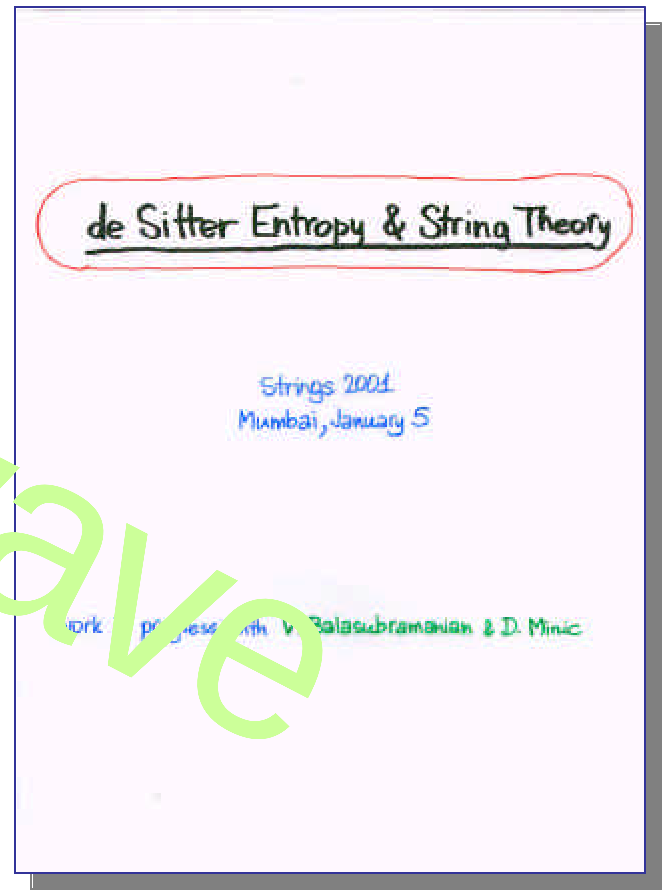
QUANTUM GRAVITY IN deSITTER SPACE (1)

deSITTER (dS) SPACE IS THE MAXIMALLY SYMMETRIC SPACE WITH $\Lambda > 0$

$$ds^2 = -dt^2 + \cosh^2 t \, \underbrace{d\Omega^2}_{\text{sphere}}$$

COMPACT SPATIAL SECTIONS, SO WHEN WE SPEAK OF ASYMPTOTICALLY dS SPACE (as we should in the presence of gravity — the metric fluctuates) THE ASYMPTOTIA IN QUESTION IS IN THE PAST AND FUTURE — IN CONTRAST TO SPATIAL ASYMPTOTIA FOR $\Lambda \leq 0$.

Horava



de Sitter Entropy & String Theory

Strings 2001
Mumbai, January 5

work ... with V. Balasubramanian & D. Minic

基礎的な問題点

- 超対称性との相性？

⇨ Pilch, van Nieuwenhuizen and Sohnius(‘85)

- deSitter entropyの意味？

⇨ deSitter/CFT対応 Strominger(`01) ,…

- deSitter energy？ 超対称性」との関係

⇨ Abbott-Deser energy (`81), …, Shiromizu Ida and Torii(`01),Kastor and Traschen(`02)

deSitter entropy

宇宙の地平線 ⇨ ホーキング輻射のようなものが存在

エントロピー Gibbons and Hawking(`77)

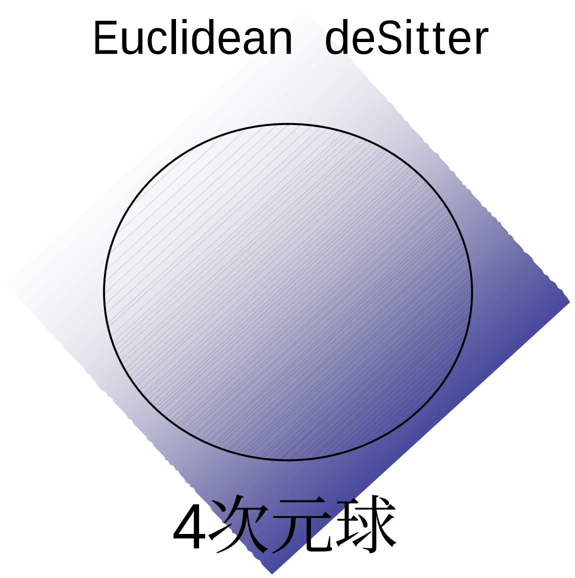
$$S = \frac{1}{4} A_{ch}$$

素朴には地平線の外側の自由度

$A_{ch} = 4\pi H^{-2} = 12\pi\Lambda^{-1}$ 地平線の面積)

cf)インフレーション中の宇宙の揺らぎの種

導出



分配関数 $Z \approx e^{12\pi\Lambda^{-1}}$

$$F = -T \ln Z = M - TS$$

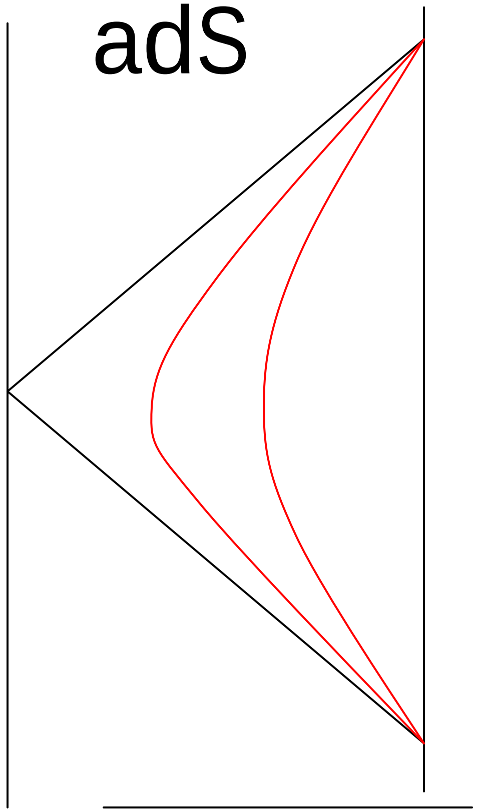
$$\boxed{M = 0}$$

$$\boxed{S \approx 4\pi H^{-2}}$$

Strominger('01)

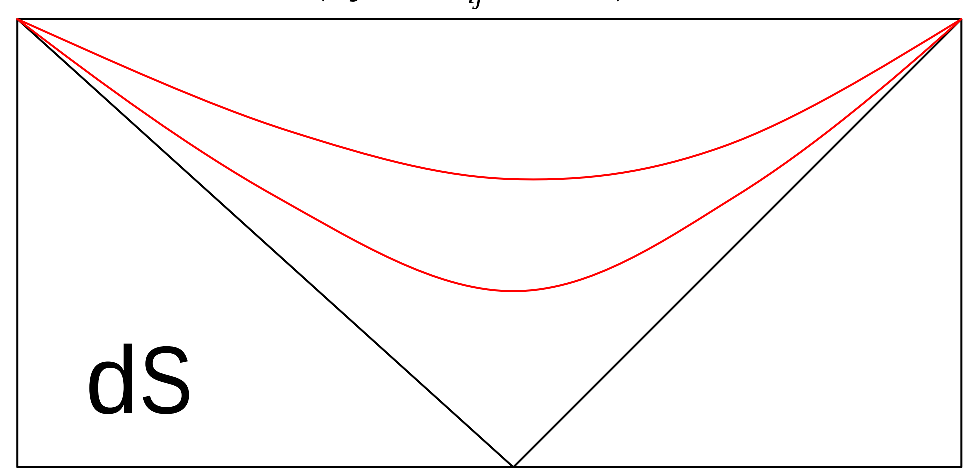
adS/CFTからdS/CFTへ

$$ds^2 = dy^2 + e^{2y/\ell}(-dt^2 + d_{ij}dx^i dx^j) \qquad \ell = \sqrt{-3/\Lambda}$$



$\Lambda < 0 \to \Lambda > 0, (\ell \to iH^{-1})$
$y \to it$
$t \to iy$

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2Ht}(dy^2 + d_{ij}dx^i dx^j) \qquad H = \sqrt{3/\Lambda}$$



井沢健一氏
曰く

「インフレーション」

CFTからentropyの物理的解釈

2. deSitter時空

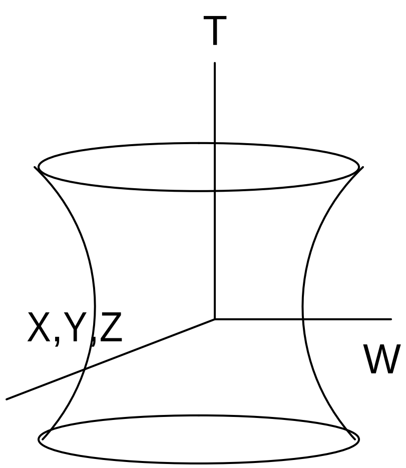
deSitter時空

始めも終わりもインフレーション」横山純一氏）

Inflation, Dark energy $\approx$ positive cosmological constant $\Lambda > 0$

Einstein方程式 $$R_{mn} = \Lambda g_{mn}$$

極大対称空間： deSitter時空



5次元Minkowski時空に埋め込まれた半径1/Hの擬球面

5次元Minkowski時空の計量

$$ds_5^2 = -dT^2 + dW^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2$$

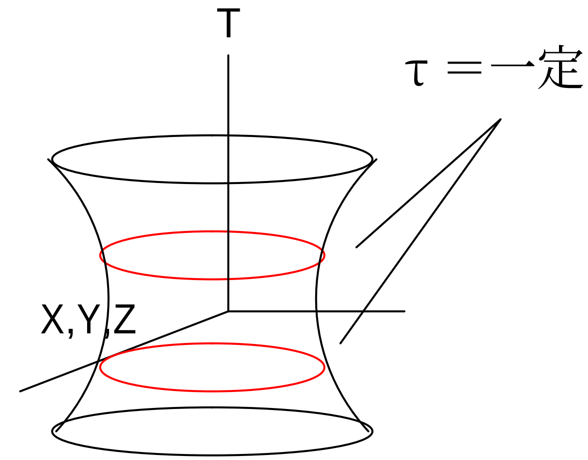
擬球面

$$-T^2 + W^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 = H^{-2}$$

$$H = \sqrt{\Lambda / 3}$$

完全チャート

$$
\begin{cases}
T = H^{-1}\sinh t \\
W = H^{-1}\cosh t\,\cos c \\
X = H^{-1}\cosh t\,\sin c\,\sin q\,\cos f \\
Y = H^{-1}\cosh t\,\sin c\,\sin q\,\sin f \\
Z = H^{-1}\cosh t\,\sin c\,\cos q
\end{cases}
$$

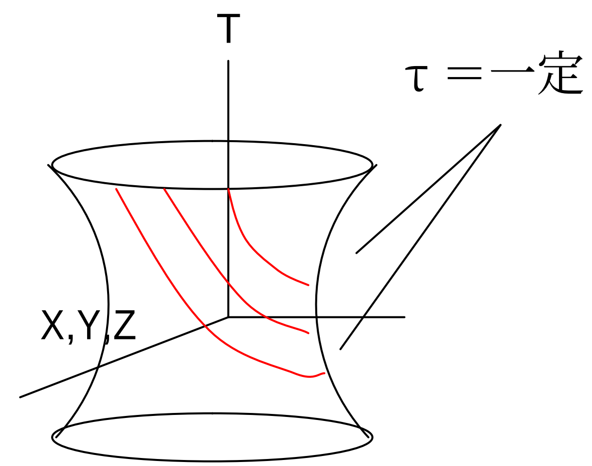


$$
ds^2 = H^{-2}\left[-dt^2 + \cosh^2(t)(dc^2 + \sin^2 c\,d\Omega_2^2)\right]
$$

τ＝一定 ⟺ T＝一定

平坦チャート

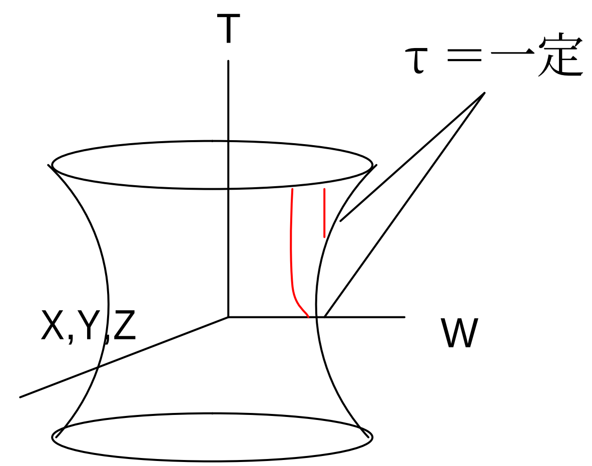
$$
\begin{cases}
T + W = H^{-1} e^{\tau} \\
X = H^{-1} e^{\tau}\, \chi \sin\theta \cos\phi \\
Y = H^{-1} e^{\tau}\, \chi \sin\theta \sin\phi \\
Z = H^{-1} e^{\tau}\, \chi \cos\theta
\end{cases}
$$



$$
ds^2 = H^{-2}\left[-d\tau^2 + e^{2\tau}\underbrace{(d\chi^2 + \chi^2 d\Omega_2^2)}_{\text{Euclid空間}}\right]
$$

開チャート

$$
\begin{cases}
T = H^{-1}\sinh t \cosh c \\
W = H^{-1}\cosh t \\
X = H^{-1}\sinh t \sinh c \sin q \cos f \\
Y = H^{-1}\sinh t \sinh c \sin q \sin f \\
Z = H^{-1}\sinh t \sinh c \cos q
\end{cases}
$$



$$
ds^2 = H^{-2}\left[-dt^2 + \sinh^2 t\,(dc^2 + \sinh^2 c\, d\Omega_2^2)\right]
$$

静的チャート

$$
\begin{cases}
T = \sqrt{H^{-1} - r^2}\,\sinh(Ht) \\
W = \sqrt{H^{-1} - r^2}\,\cosh(Ht) \\
X = r \sin q \cos f \\
Y = r \sin q \sin f \\
Z = r \cos q
\end{cases}
$$

$$
ds^2 = -(1 - H^2 r^2)dt^2 + (1 - H^2 r^2)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2
$$

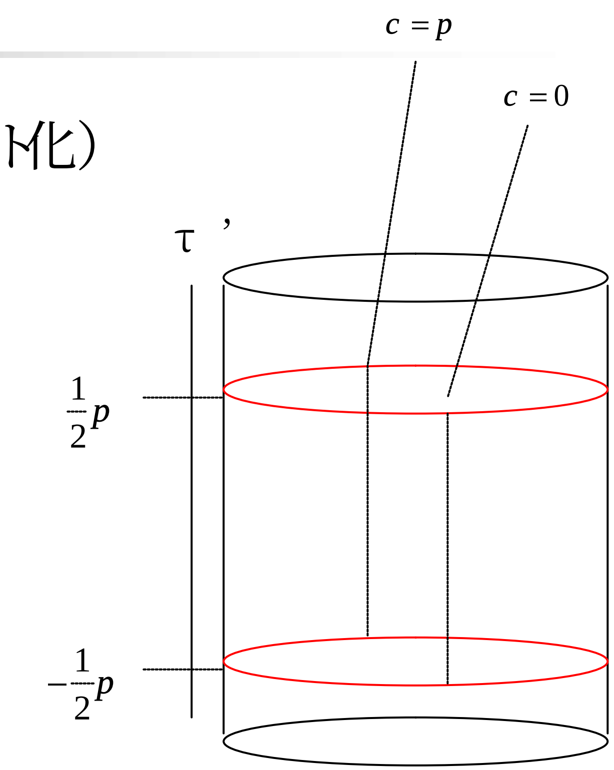
Penrose図

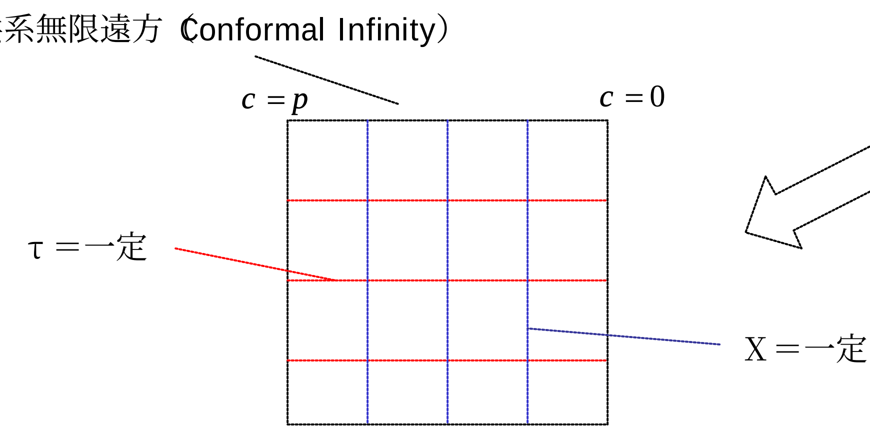
共形埋め込み（共形変換で時空のコンパクト化）

$$t' = 2\tanh^{-1}(e^{t}) - \frac{1}{2}p$$

$$-\frac{1}{2}p < t' < \frac{1}{2}p$$

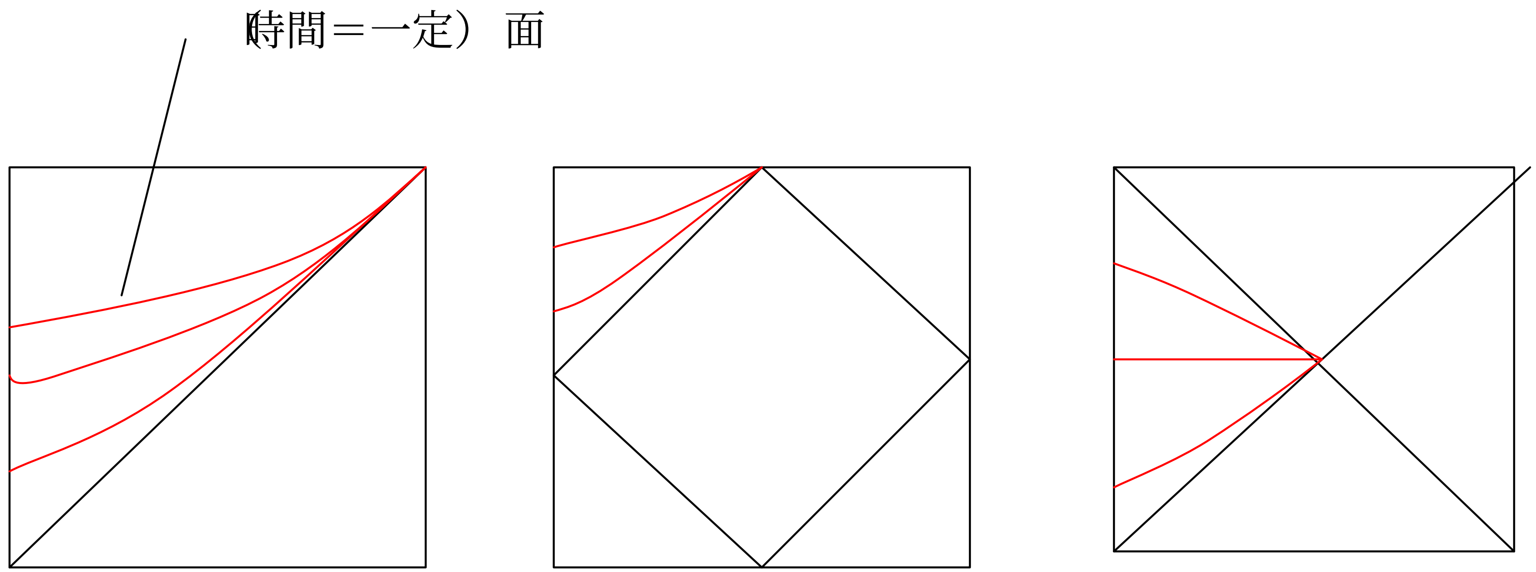
$$ds^2 = H^{-2}\sec^2(t')\underbrace{\left[-dt'^2 + dc^2 + \sin^2 c\, d\Omega_2^2\right]}_{\text{Einsteinの静的宇宙モデル}}$$





(完全チャート)

Penrose図(2)：　他の座標

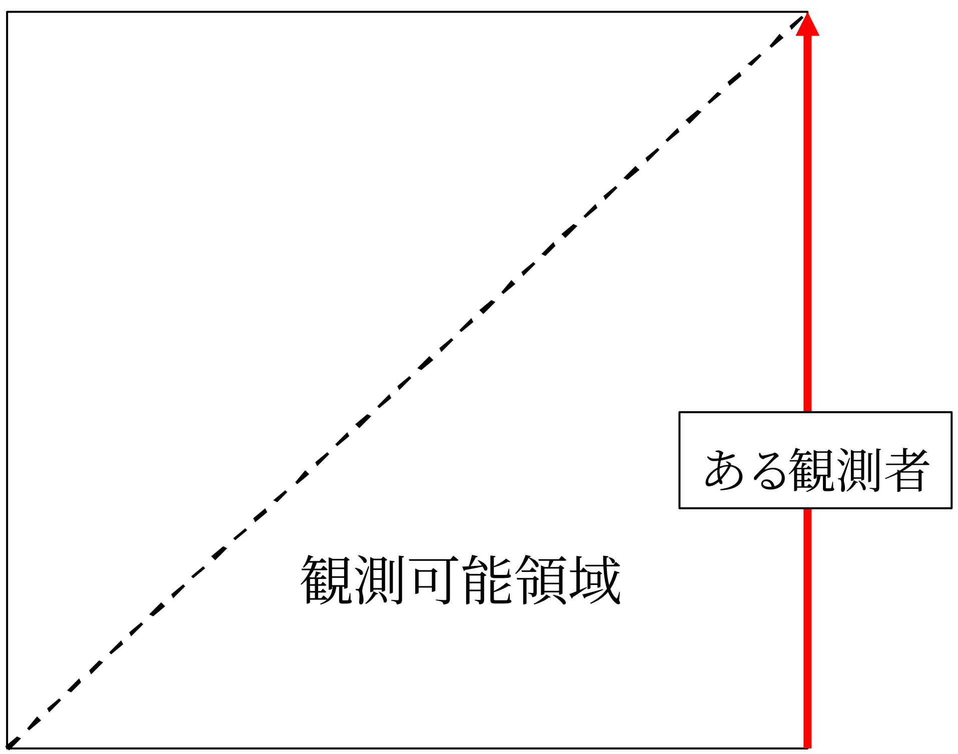


平坦チャート　　開チャート　　静的チャート

Penrose図（3）地平線

- 共形無限遠方が空間的
- Horizonが存在する。
- 時空がいたるところ静的でない。
- 正定値のHamiltonianを構成できない。

超重力理論と相性が悪い



3. deSitter energy?

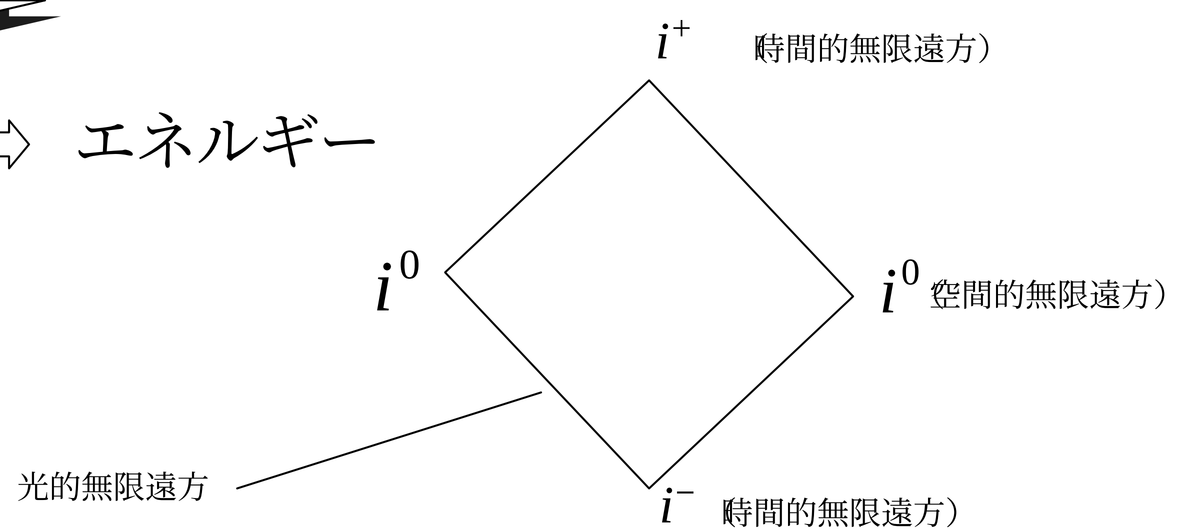
Ashtekar and Hansen('78)

漸近的に平坦な時空の場合

物質が無限遠方で適度に振舞う
Einstein方程式

漸近的に「ポアンカレ」群が存在

時間並進対称性 ⇨ エネルギー



Minkowski時空のPenrose図

正エネルギー定理

Wittenの証明（81） ⇐ 超重力理論

時空の全エネルギー

$$M = \frac{1}{16p\,|e_0|^2}\int_{S_\infty} dS_{mn}\left[\bar{e}g^{mna}\nabla_a e - \overline{\nabla_a e}g^{mna}e\right] = \int dV\left[\,|\nabla_i e|^2 + 4pT_{mn}x^m t^n\right] \geq 0$$

$$\begin{cases} g^i\nabla_i e = 0 \\ \text{Witten方程式} \\ e \xrightarrow[r\to\infty]{} e_0 \\ x^m = \bar{e}g^m e \end{cases}$$

超重力理論との対応関係

$$dy_m \sim \nabla_m e$$

Gravitino

正エネルギー定理 (2)

$$M = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla_i e = 0$$

$$\Downarrow$$

$$[\nabla_i, \nabla_j] e \sim R_{ijmn}[g^m, g^n] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{R_{mnab} = 0}$$

Gibbons and Hull(‘82), Tod(’83)

N=2超重力理論を意識すると

$$\nabla_m e \to \hat{\nabla}_m e = \nabla_m e + \frac{i}{4} F_{ab} g^{ab} g_m e \qquad\qquad dy_m \sim \hat{\nabla}_m e$$

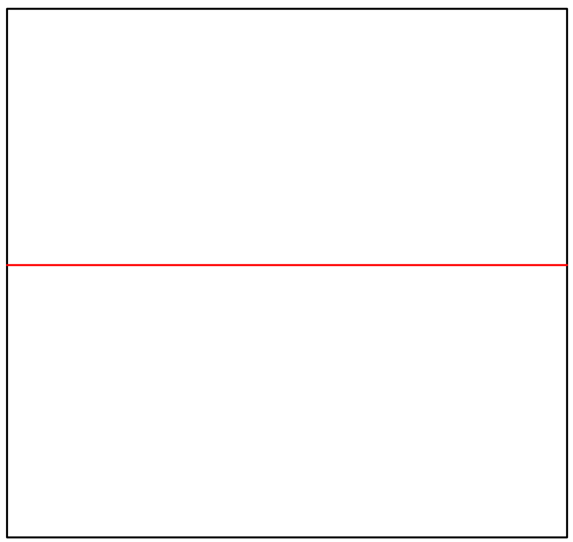
$$8pe_0^+ (M - (Q - g_5 P))e_0 = \frac{1}{2} \int dS \left(\bar{e} g^{mna} \hat{\nabla}_a e - \overline{\hat{\nabla}_a e} g^{mna} e \right)$$

$$= \int dV \left[| \hat{\nabla}_i e |^2 + 8p (T_{mn} - T_{mn}(F)) x^m t^n - i\bar{e} (\nabla_m F^{mn} - g_5 \nabla_m \tilde{F}^{mn}) e t^n \right]$$

$$\boxed{M \geq \sqrt{Q^2 + P^2}}$$ （Bogomol’nyi bound）

Saturation $\Rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Majumdar-Papapetrou多重ブラックホール解} \\ \quad\cup \\ \text{Extreme Reissner-Nordstrom Black hole解} \end{array} \right.$ （BPS状態）

漸近的deSitter時空の場合



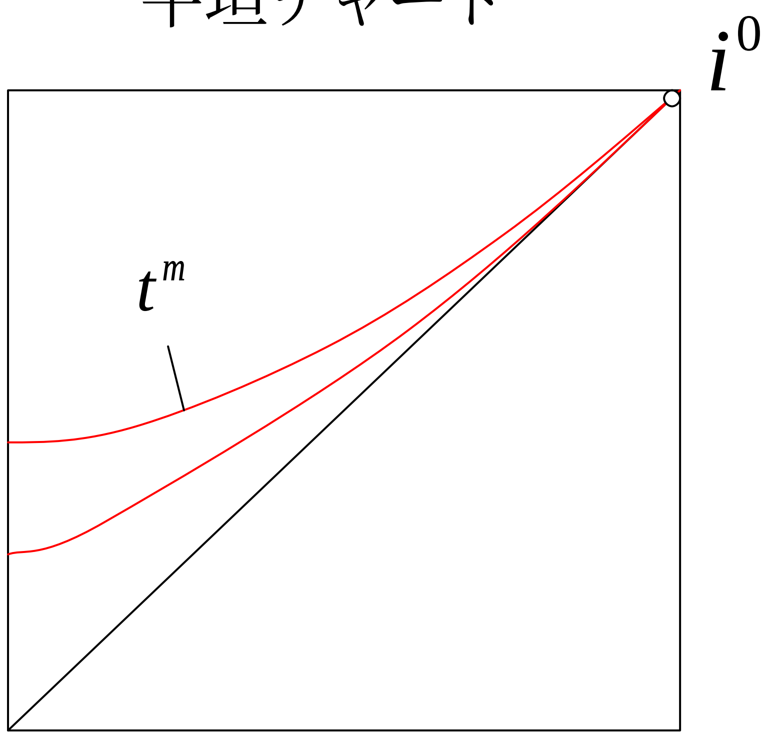
•空間的無限遠方が存在しない。

•物質が未来の無限遠方で十分はやく落ちるとしても、漸近的平坦な場合のように漸近的な対称性の存在が証明されていない　（Anti-deSitterも同様）

共変的な漸近的対称性の系統的研究は存在しない。

deSitterにおける空間的無限遠方

平坦チャート



（空間的無限遠方）

- 外的曲率（第二基本形式）

$$K_{ij} \sim \frac{1}{2}\partial_t g_{ij} = Hg_{ij}$$

- 共形平坦

$$adh = dt$$

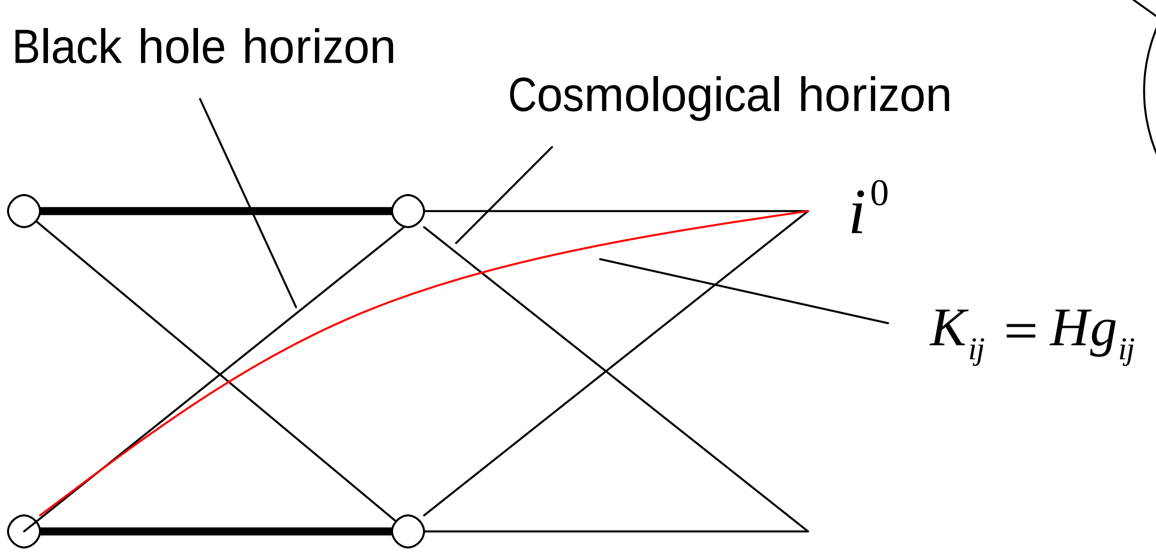
$$ds^2 = a^2(-dh^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

MacVittie('33), Shiromizu, Ida and Torii('01)

Schwarzshild-deSitter時空

$$ds^2 = -\left[\frac{1 - m/2(ar)^{n-3}}{1 + m/2(ar)^{n-3}}\right]^2 dt^2 + a^2 \underbrace{\left[1 + \frac{m}{2(ar)^{n-3}}\right]^{4/(n-3)}} d_{ij} dx^i dx^j \qquad a = e^{Ht}$$

時間一定面上ではあたかも漸近的に平坦な時空のように振舞う



漸近的平坦チャート

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{・漸近的平坦チャートでは空間的無限遠方が（恐らく）一般に存在し、有限のエネルギーが定義される} \\ \\ \cdot\, K_i^i = 3H + O\left(1/r^3\right) \end{array} \right.$$

Hamiltonian constraint

$$^{(3)}R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi G T_{\mu\nu} t^\mu t^\nu + 6H^2$$

Cosmological Witten spinor

$$dy_m \sim \left[\nabla_m - igA_m + \frac{1}{2}gg_m + \frac{i}{4}F_{ab}g^{ab}g_m\right]e \qquad \Lambda = -3g^2$$

$$\Lambda < 0 \rightarrow \Lambda > 0, g \rightarrow iH$$

$$\Rightarrow \left[\nabla_m + HA_m + \frac{i}{2}Hg_m + \frac{i}{4}F_{ab}g^{ab}g_m\right]e$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\hat{\nabla}_m e \equiv \left(\nabla_m + \frac{i}{2}Hg_m\right)e \\ &g^i \hat{\nabla}_i e = 0 \end{aligned}}$$

もはや超対称性とは関係ない！

$\hat{\nabla}_m e = 0$ の意味

- deSitter時空の場合

$$x^m \equiv -\bar{e} g^m e$$

$$\nabla_m x_n + \nabla_n x_m = iHg_{mn}\bar{e}e$$ Conformal Killing vector

e : Conformal Killing spinor

- Anti-deSitterの場合

$$\nabla_m x_n + \nabla_n x_m = 0$$ Killing vector

Cosmological Witten spinor in deSitter

$$g^{i}\hat{\nabla}_{i}e = g^{i}\left(\partial_{i} + \frac{1}{2}K_{ij}g^{j}g^{0} + \frac{i}{2}Hg_{i}\right)e = g^{i}\left(\partial_{i} + \frac{1}{2}Hg_{i}(g^{0}+i)\right)e$$

Constat spinor解

$$e = e_0 \qquad g^{\hat{0}}e_0 = -ie_0$$

独立な解が半分に

$$x^{m} = -\bar{e}_0 g^{m} e_0 \propto \left(\partial_t\right)^{m}$$

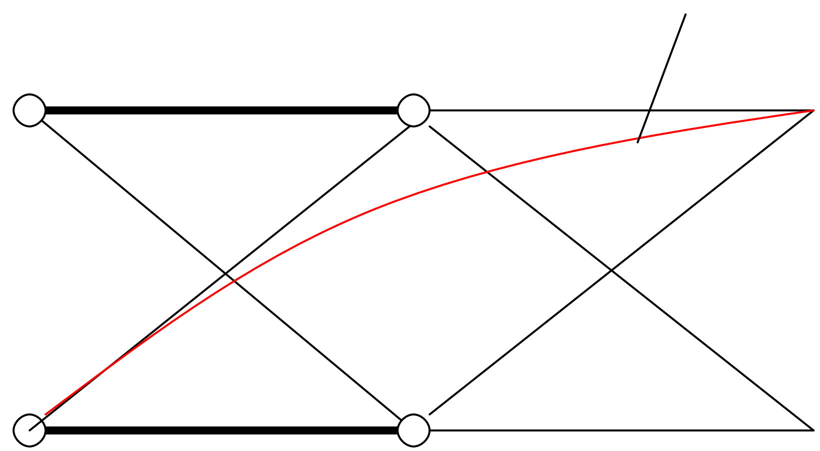
Timelike conformal Killing vector

Cosmological Witten spinor in asymptotically deSitter

$$g^i \hat{\nabla}_i e = \left(g^i \partial_i + \frac{1}{2}(K_i^i g^0 + 3iH) \right) e = 0$$

無限遠方で $r \to \infty$ $\quad e \to e_0, g^{\hat{0}} e_0 = -ie_0$

$$K_i^i = 3H + O(1/r^3)$$



$i^0 \; r \to \infty$

Shiromizu('94), Kastor and Traschen(96), Shiromizu(99), Shiromizu, Ida and Torii(01), Kastor and Traschen(02)

Positive energy theorem in deSitter

$$\hat{E}_{mn} \equiv \frac{1}{2}\left(\bar{e} g^{mna} \hat{\nabla}_a e - \overline{\hat{\nabla}_a e} g^{mna} e\right)$$

$$Q_e = \int dS_{mn} \hat{E}^{mn} = \int d\Sigma \left[\left(G_{mn} + \frac{3}{2} H^2 g_{mn}\right) x^m t^n + |\hat{\nabla}_i e|^2\right] \geq 0$$

Einstein方程式

$$G_{mn} + \frac{3}{2} H^2 g_{mn} = 8pGT_{mn}$$

Conformal Killing vectorでエネルギーを定義

Q_e の性質

- Conformal Killing vectorで定義したAbbott-Deserエネルギーと一致

 保存量

- Weyl tensorで定義されたエネルギーと同じ

 無限遠方の観測者が潮汐力で測るエネルギー

- M=0のときにdeSitter時空で唯一に決まっていると証明できていない

 宇宙項のある時空の基底状態が分からない。

Kastor, Shiromizu and Traschen, in progress

A Bogomol’nyi bound in deSitter?

deSitter時空の多重ブラックホール解　Kastor and Traschen(93)

$$ds^2 = -U^{-2}dt^2 + a^2U^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

$$U = 1 + \sum_i \frac{m_i}{a|\vec{x} - \vec{x}_i|} \qquad a = e^{\pm Ht}$$

$$m_i = |Q_i|$$

（Extremeではない！）

重力と電磁気力との釣り合い

Bogomol’nyi boundはあるのか？

Kastor, Shiromizu and Traschen, in progress

A Bound

$$\hat{\nabla}_m e = \left[\nabla_m + \frac{i}{2} H g_m + \frac{i}{4} F_{ab} g^{ab} g_m\right] e$$

$$\int_{S_\infty} dS_{mn}\hat{E}^{mn} - \int_H dS_{mn}\hat{E}^{mn} = \int_\Sigma d\Sigma\left[\left(G_{mn} + \frac{3}{2}H^2 g_{mn} - T_{mn}(F)\right)x^m t^n + |\hat{\nabla}_i e|^2 - i\bar{e}\left(\nabla_n F^{mn} - \nabla_n \tilde{F}^{mn}\right)t_m e\right]$$

$$Q_e = \int_{S_\infty} dS_{mn}\hat{E}^{mn} = 8pe_0^+ \left(M - (Q - g_5 P)\right)e_0$$

$$\int_H dS_{mn}\hat{E}^{mn} = \frac{1}{2}\left[\int_{S_\infty} dS e^+ \left\{-g^{\hat{1}} g^{\hat{A}}\left(D_{\hat{A}} + \frac{1}{2} K_{\hat{1}\hat{A}} g^{\hat{1}} g^{\hat{0}}\right) - \frac{1}{2}\left(k + (K - K^1_1) g^{\hat{1}} g^{\hat{0}}\right) - i(E_{\hat{1}} - g_5 B_{\hat{1}}) g^{\hat{0}}\right\} e + c.c.\right]$$

$$\neq 0$$

deSitterでは　が勝手でないために、この境界条件を課してしまうと、
非自明なWitten spinorが存在しない！

Gibbons, Hawking, Horowitz and Perry(‘83)

漸近的平坦な場合

e_0 付加的な条件なし

Horizon上で　$g^{\hat{1}} g^{\hat{0}} e_H = e_H$ (境界条件)

Horizon上で　$k + K - K^1_1 = 0$ (Horizonの性質)

$$\Longrightarrow \int_H dS_{mn}\hat{E}^{mn} = 0$$

一言

deSitterは古典論ですら深く考えると難しい。宇宙項問題への解決に向かって、これからも地道な努力を続けます。