非可換ゲージ理論と位相不変量 ($U(n)$ ゲージ理論のインスタントン数)

広島大学大学院理学研究科数学専攻　佐古彰史
E-mail:　sako@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

非可換空間のトポロジーの解析は代数的 K 理論などを用いて進められている。しかしより単純に、可換時空上で定義されている特性類などの多くの位相不変量は非可換時空上でもなんらかの不変量となる可能性は十分にある。実際、非可換トーラスのオイラー数 (K_0 と K_1 の元の差と考える) などは可換な場合とかわらないし、GMS ソリトンのモジュライ空間のオイラー数なども可換な多様体上でも計算可能である [1]。この経験からインスタントン数も可換な時空上とかわらず位相不変量であると予想される。しかし、現在わかっていることは、非可換ユークリッド空間上で U(1) インスタントンのインスタントン数が、第一ポントリャーギン類の積分で定義されたものと、ADHM 構成でインスタントンを定式化するときに現れる Fock 空間 (非可換ユークリッド空間はフォック空間を用いて表される) から k 次元空間を抜き出す射影演算子のランクが一致し、従って整数値をとるという事実のみが知られていた [2]。整数値で定義されることが示されたということは、位相不変量であることの特徴を間接的に示すものである。最近、この事実を $U(n)$ に拡張することができたのでそれについて報告する。

$U(1)$ の場合にそうであったように、$U(n)$ の場合もインスタントン数と ADHM 構成法で現れる射影作用素のランクと関係があるかが重要であるが、一般の $U(n)$ のインスタントンにたいして次の定理が証明できる。

「定理」ADHM 構成法で現れるディラック的作用素 D を $(2k \times (2k+n)$ 行列) とそのゼロモード Ψ とし (つまりインスタントンは $\Psi^\dagger \partial_\alpha \Psi$ で与えられる)、ADHM データを慣例に従い $k \times k$ 行列 B_i と $\times n$ 行列 $I, J^\dagger$ で与えるとする。ベクトル $|v\rangle \in (\mathbf{C}^k \oplus \mathbf{C}^k \oplus \mathbf{C}^n) \otimes \mathcal{H}$ が以下の条件

$$\Psi\Psi^\dagger |v\rangle = \langle v|\Psi\Psi^\dagger = 0,\ |v\rangle \neq 0$$

を満たすとき $\Psi\Psi^\dagger$ のゼロモードと呼ぶ。このとき $\Psi\Psi^\dagger$ ゼロモードは以下の 3 タイプとして得られる

$$|v_1\rangle = \begin{pmatrix} (\sqrt{\zeta}c_1 - B_1)|u\rangle \\ (B_2 - \sqrt{\zeta}c_2)|u\rangle \\ J|u\rangle \end{pmatrix}, |v_2\rangle = \begin{pmatrix} (B_2^\dagger - \sqrt{\zeta}c_2^\dagger)|u'\rangle \\ (B_1^\dagger - \sqrt{\zeta}c_1^\dagger)|u'\rangle \\ I^\dagger|u'\rangle \end{pmatrix}, |v_0\rangle = \begin{pmatrix} (\exp\sum_\alpha B_\alpha^\dagger c_\alpha^\dagger)|0,0\rangle v_0^i \\ (\exp\sum_\alpha B_\alpha^\dagger c_\alpha^\dagger)|0,0\rangle v_0^i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ここで $|u\rangle$ ($|u'\rangle$) は $\mathbf{C}^k \otimes \mathcal{H}$ の要素 (i.e. $|u\rangle = \sum_i \sum_{n,m} u_i^{nm} |n,m\rangle$ と書ける)。重要なのは v_0^i はフォック空間の次元も含めて $\dim k$ ベクトルということである。$|v_1>, |v_2>$ は Ψ の中から n 次元のゼロモードの空間を選ぶときに除かれるゼロモードであるが、$|v_0>$ は非可換時空にしたために Fock 空間で書かれている空間に k 次元の広がった穴をあけるものだ。このゼロモード $|v_0>$ がある上で、インスタントン解を作るために必要な $\Psi^\dagger\Psi = 1$ という規格化を満たすという条件を要請することから、第一ポントリャーギン類の積分はピュアゲージの場合から値が k ずれてでてくることがわかる。従って、インスタントン数が第一ポントリャーギン類の積分で定義されたものと、ADHM に現れるものが一致することを意味する。より詳しい内容は以下の参考文献 (及び上の内容をより詳しく解説した発表予定の論文やそれら論文の参考文献) を参考されたし。

[1] T.Ishikawa,S.Kuroki,A.Sako *"Noncommutative Cohomological Field Theory and GMS soliton"* JMP 43, 872 (2002) hep-th/0107033
[2] T.Ishikawa,S.Kuroki,A.Sako *"Instanton Number Calculus on Noncommutative* $\mathbf{R}^4$*"* hep-th/0201196 JHEP 掲載予定