Membrane topology and matrix regularization

東大総合文化　島田英彦

E-mail: shimada@hep1.c.u-tokyo.ac.jp

M 理論の殆ど唯一の定式化の試みである行列模型 [1] は, 11 次元 supermembrane にある離散化の手続き (行列正則化) を施したものと捉えられる [2]. 行列正則化は, 2 次元の定義空間 (membrane のある timeslice) 上の関数 $f(\sigma), \cdots$ に対し,$N \times N$ 行列 $\hat{f}, \cdots$ を対応させる規則が存在して, 次の基本的な近似式が N 大で良く成立することに基づく.

$$\widehat{\{f,g\}} \approx -i\frac{2\pi N}{[\sigma]}[\hat{f},\hat{g}], \qquad \frac{1}{[\sigma]}\int f(\sigma)d^2\sigma \approx \frac{1}{N}\mathrm{Tr}\hat{f}, \qquad \widehat{f(\sigma)g(\sigma)} \approx \hat{f}\hat{g}$$

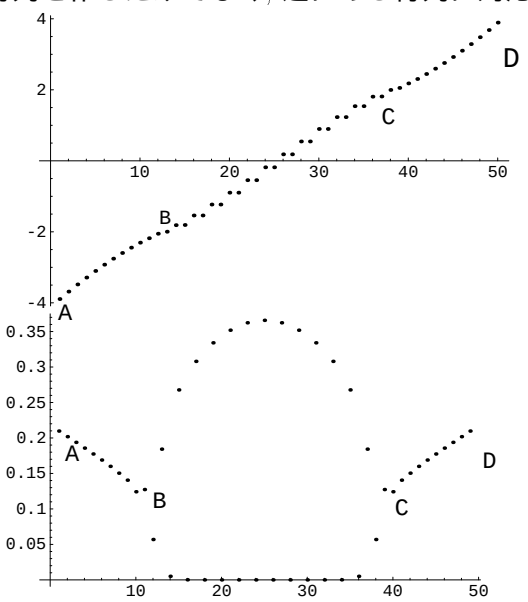
ここで, $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2)$, $\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial \sigma^1}\frac{\partial g}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial f}{\partial \sigma^2}\frac{\partial g}{\partial \sigma^1}$, $[\sigma] = \int d^2\sigma$ は 2 次元の定義空間の面積, である.

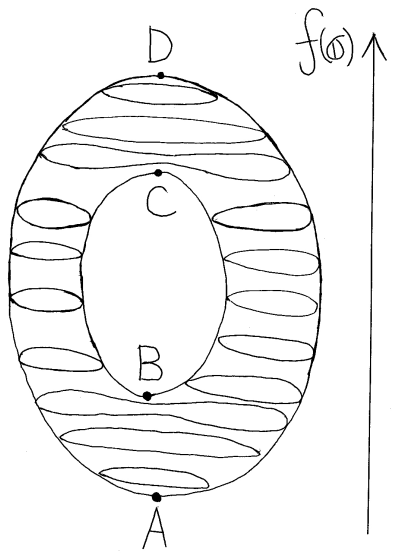
関数と行列の間の既知の対応規則は, 関数の定義空間の topology を固定した上で与えられている. その為, membrane の topology の情報が行列模型にどの様に現れるかは理解されていなかった.

ここでは行列正則化について数学的な考察を加えた. 行列正則化の近似が良い場合には, 行列の固有値分布は以下に述べる構造を持ち, それが Morse 理論的な topology の情報を反映する.

行列正則化と 1 自由度の系の正準量子化の間の analogy から, Bohr-Sommerfeld の量子化条件の analog が行列正則化の場合に成立していると仮定すると, 次の事が導かれる. 即ち, 行列の固有値分布は幾つかの部分集合に分かれ, 各々の部分集合に属する固有値を大きさ順に並べて plot すると, その graph は局所的に線形に近似される. 例を挙げる. 右の図の高さで与えられる様な関数 $f(\sigma)$ に対し, 既知の対応規則で対応する行列 $\hat{f}$ を作り, 固有値 $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_i \le \cdots \le \lambda_N$ を数値計算した. i に対し λ_i, i に対し $\lambda_i - \lambda_{i-1}$ をそれぞれ plot したものが下の graph である. 図と graph の A, B, C, D が対応している.

更に, 新たな関数と行列の対応規則を作った. 大雑把には, 行列の m, n 成分は定義空間上で適当に構成された orbit に沿う, 対応する関数の $m-n$ 次の Fourier 成分となる. それにより上の近似式が従う事を示せる. この規則では関数の定義空間の topology を固定する必要が無い. その為, ある関数に対応する行列を作るだけでなく, 逆にある行列に対応する関数を作る事が可能である.





References

[1] T.Banks, W.Fischler, S.H.Shenker, L.Susskind Phys. Rev. **D55**(1997)5112

[2] B.de Wit, J.Hoppe, H.Nicolai Nucl. Phys. **B305**[FS23](1988)545.