格子上の非可換微分形式を用いた Dirac-Kähler フェルミオン[1]

北海道大学大学院理学研究科　金森 逸作
E-mail: kanamori@particle.sci.hokudai.ac.jp

空間を格子にして場の理論を記述することは、発散を正則化する方法の一つであり、非摂動的に理論を記述できるという特徴を持っている。しかし、特に有限の格子間隔では、連続な空間で持っていた性質のいくつかを壊してしまう。その一つに微分のライプニッツ則がある。しかし微分形式については、関数と微分形式との間に非可換性を導入することで、ライプニッツ則と冪ゼロ性 $(d^2 = 0)$ を満たす微分が定義できる。この非可換微分形式は、ゲージ場の Wilson action を再現することが知られている [2]。

我々はこの非可換微分形式を用いて、微分形式で記述されたフェルミオンすなわち Dirac-Kähler フェルミオンを格子上で記述した。その際 Kähler に倣い、$\vee$ 積 (Clifford 積あるいは cup 積) を利用したが、この $\vee$ 積を、結合則を保ったまま格子上で記述することに成功した。なお時空間は偶数次元のユークリッド空間とした。

格子上の非可換微分形式はいくつか存在する。我々は symmetric lattice と呼ばれる、微分のエルミート性が保証されたモデルを用いた。このモデルは一次元当たり 2 種類の 1-form が存在する、つまり D 次元で $2D$-form まで存在する奇妙なモデルだが、微分を対称な差分で記述するため、action を容易にエルミートにできるという利点を持っている。幾何学的には 1-form は格子上でリンクに相当する。2 種類の 1-form の導入により x から $x+\mu$ につなぐリンクと、$x-\mu$ につなぐリンクの 2 つのリンクを入れたことになる。

我々は 1) 結合則を保つこと、2) $\vee$ 積を用いてかかれた内積が正定性を持つこと、3) リンクの双方向性を最大限尊重すること、の 3 点を指針に、格子上での $\vee$ 積の定義を与えた。その定義は、規格化の自由度を除けば一意的であった ($\vee$ 積については時空次元の偶奇によらない)。

連続な空間と違い form の数が多いこと、および非可換性のため、格子上での Dirac-Kähelr フェルミオンの組み方は一意的ではない。その中から staggered フェルミオンを与えるモデルの構築に成功した。staggered フェルミオンの連続極限が Dirac-Kähler フェルミオンになることは以前から知られていたが、その逆を導いたことになる。格子上の非可換微分形式と staggered フェルミオンを結び付けること自体は新しい結果ではないが [3]、$\vee$ 積を用いている点が我々のモデルの特徴である。$\vee$ 積の結合則のおかげで、ゲージ不変な action への拡張は容易である。

連続な空間で Dirac-Kähler フェルミオンは、曲がった空間でも記述されている。今回の結果は曲がった空間上での格子フェルミオンにつなげられるかも知れない。また、ライプニッツ則を満たす微分を利用していること、および Dirac-Kähler フェルミオン特有の flavor symmetery を extended SUSY の R-symmtery と解釈できること [4] から、SUSY の格子での記述に利用できると期待している。

参考文献

[1] I. Kanamori and N. Kawamoto, to appear

[2] A. Dimakis, F. Müller-Hoissen, and T. Striker. *J. Phys.*, A26:1927, 1993.

[3] J. Dai and X.-C. Song. *Phys. Lett.*, B508:385–391, 2001; T. Striker. hep-lat/9507017.

[4] N. Kawamoto and T. Tsukioka. *Phys. Rev.*, D61:105009, 2000.

[1] この報告は 北大理 河本 昇 氏との共同研究 [1] に基づく。