Seiberg–Witten Curve for the E-String Theory

東京大学大学院理学系研究科　酒井 一博 (江口徹氏との共同研究)
E-mail: sakai@hep-th.phys.s.u-tokyo.ac.jp

超弦理論にはしばしば低エネルギー極限が局所場の理論で記述できないような真空が存在する。$E_8 \times E_8$ ヘテロティック弦理論の一つの E_8 インスタントンが潰れる極限はその一例で、このときの低エネルギー理論は粒子ではなく弦を基本物質とする 6 次元の理論となる [1]。E 弦理論として知られるこの理論は様々な意味で「$\frac{1}{2}$ ヘテロティック理論」とみなすことができ、実際例えば通常のヘテロティック弦に比べ半分の 8 個の超対称性電荷、半分として E_8 の対称性をもっている。この理論は超弦理論の非摂動論的構造をじかに反映していることや、4 次元ゲージ理論と超弦理論の橋渡しとして位置づけられることから盛んに研究されてきた。

さてこのような弦からなる理論には、通常の場の量子論のような直接的な量子論的定式化がないので、様々な間接的手法をもとにその性質を調べることになる。よく行われてきたのは 6 次元のうち 1 次元分を円周にコンパクト化し、弦を振動モード及び巻きつき数毎に別々の粒子状態とみなすことで、低エネルギー有効理論を無限種類の粒子からなる理論としてとらえる方法である。特にそれら粒子状態の中でも BPS 状態については非摂動論的にも厳密な取り扱いができる。そこで E 弦理論の解析の第一歩として BPS 状態の分配関数を求める試みがなされてきた。

E_8 対称性に始まる豊かな構造をもつ E 弦理論は、コンパクト化すると１０個のモジュライパラメータをもつ複雑な系となる。そのためこれまで調べられてきたのはもっぱらパラメータを部分的に残して簡単化した場合である。そのなかで Minahan–Nemeschansky–Vafa–Warner は全てのパラメータを一般にとった場合の BPS 分配関数を扱った [2]。彼らは分配関数を E 弦の巻きつき数毎に分けることで、それぞれが $\frac{1}{2}K3$ 多様体上の $\mathcal{N} = 4$ 位相的ゲージ理論の分配関数と解釈できることを示し、実際に巻きつき数の小さい部分について E 弦の分配関数を計算している。しかしながら巻きつき数が大きくなると、彼らの方法では実際上の計算は手に負えなくなる。

我々はこの分配関数を全巻きつき数にわたって求めるべく、E 弦理論の Seiberg–Witten 曲線を構成した。8 個の超対称性電荷をもつ E 弦理論は、T^2 にコンパクト化することで有効的に 4 次元 $\mathcal{N} = 2$ ゲージ理論とみなすことができる。このとき低エネルギー有効作用を記述するプレポテンシャルが E 弦の分配関数と同一視される。プレポテンシャルは Seiberg–Witten 曲線が与えられればインスタントン展開の形で望みの次数まで計算できる。我々は一般形を仮定した Seiberg–Witten 曲線に基づくプレポテンシャルと、[2] の計算をさらに押し進めたものとを比較し、Seiberg–Witten 曲線の具体形を決定した。

得られた Seiberg–Witten 曲線は $\widehat{E}_8$ アフィン Lie 代数の指標を用いて記述される。これは E 弦の E_8 対称性及びコンパクト化 T^2 の幾何を反映している。また $\widehat{E}_8$ の指標を部分代数の指標/Casimir 不変量に分解する操作によって、既知の様々な 5 次元/ 4 次元理論の Seiberg–Witten 曲線を導くことができる。

Reference

[1] O. J. Ganor and A. Hanany, "Small E_8 Instantons and Tensionless Non-Critical Strings," Nucl. Phys. B **474** (1996) 122, hep-th/9602120.

[2] J. A. Minahan, D. Nemeschansky, C. Vafa and N. P. Warner, "E-Strings and $N = 4$ Topological Yang-Mills Theories," Nucl. Phys. B **527** (1998) 581, hep-th/9802168.

[3] T. Eguchi and K. Sakai, "Seiberg–Witten Curve for the E-String Theory," JHEP **0205** (2002) 058, hep-th/0203025.