# Compactifications on $G_2$ Manifolds

京都大学 総合人間学部 基礎科学科　杉山勝之
E-mail: sugiyama@phys.h.kyoto-u.ac.jp

$G_2$ 多様体についての基礎的な事項の紹介と素粒子物理への応用の概説を行う。

## 1 Introduction

M-theory,String theory をコンパクト化することにより様々な興味ある物理が現れる。特に最小の susy を持つ模型でのゲージ群、湯川結合、matter content などを string theory の立場からどう理解するかが重要な問題となっている。現象論的に望ましい性質を持つ 4 次元 $N = 1$ の理論をどう構成したらよいかについて様々な提唱がなされてきた。代表的なものとしては (i)heterotic string を $CY_3$ にコンパクト化するもの, (ii)typeII string での D-brane の worldvolume theory として構成するもの、があったがこれらとは別のアプローチとして (iii)M-theory を $G_2$ 多様体上にコンパクト化する [1],[2] というアプローチが新に提唱されている。この第三の立場では M-theory を扱うのであるが、現時点ではまだ M-theory 自体の性質は明確に分かっているとは言いがたい。そこでその低エネルギー理論である SUGRA side でのアプローチを取ることが必然的となり、この立場 (SUGRA の KK reduction) から現象論的に望ましい性質を持つ chiral fermion, non-Abelian gauge theory などをどう導出するかが重要な課題となっている。

また数学サイドの興味としては $G_2$ 多様体は特殊ホロノミー多様体と呼ばれるものの 1 つのクラスである。この特殊ホロノミー多様体の例としては Calabi-Yau manifold, $K_3$ surface といったものがあり、それらは現在ではある程度性質が明確に理解されている。一方で $G_2$ 多様体や Spin(7) 多様体は数学サイドでもそれほど性質が充分に理解されているとは言い難くこれ自体が数学での研究対象となっている。これらの多様体自身の性質を物理の立場から理解するには string のコンパクト化を考えることが有用である。string theory では worldsheet 上に (super)conformal symmetry があるため worldsheet theory の立場から精密な解析を行うことにより、target space の geometry の情報を逆に引き出すことが可能である。worldsheet theory として見た場合、target space が $G_2$ 多様体であることから N=1 superconformal algebra に付加的な構造が添加され拡張された superconformal algebra[3] となっている。これらの付加的な構造は $G_2$ 多様体の場合は tri-critical Ising model であり、Spin(7) 多様体の場合は Ising model となっている。

## 2 $G_2$ Manifold

string の supersymmetric なコンパクト化を考える場合、通常 $d$ 次元時空は flat spacetime に取り、コンパクト化する内部空間として nontrivial に曲がったものを考える。このとき $d$ 次元時空が supersymmetric であるためには内部空間は special holonomy manifold でなければならないことが知られている。まず gravitino $\psi_\mu(x)$ の susy 変換 ( パラメータ $\xi(x)$ )

$$\delta\psi_\mu(x) = \nabla_\mu\xi(x) \quad (= 0 : \text{SUSY 不変})$$

を考えてみる。時空が supersymmetric であるためにはこの変換式の右辺がゼロでなければならない。その条件により spinor $\xi$ に対する方程式 (covariantly constant condition) が得

られる。ここで covariant derivative は spin connection を含むので解が存在するか否かはどういった内部空間を考えるかに依存する。一般に $n$ 次元内部空間の holonomy が $\mathrm{SO}(n)$ の場合は解が存在しないことが知られている。そこで nontrivial な解が存在するためにはこの $n$ 次元内部空間は特別な holonomy を持たないといけないことになる。一般の単連結 $n$ 次元リーマン多様体の場合の holonomy の分類は知られている。

| holonomy group | dimension | name |
|---|---|---|
| $\mathrm{SO}(n)$ | $n$ | Riemann |
| $\mathrm{U}(m)$ | $n=2m$ | Kähler |
| $\mathrm{SU}(m)$ | $n=2m$ | Calabi-Yau |
| $\mathrm{Sp}(m)\mathrm{Sp}(1)$ | $n=4m$ | quaternionic Kähler |
| $\mathrm{Sp}(m)$ | $n=4m$ | hyper Kähler |
| $G_2$ | $n=7$ | $\mathrm{G}_2$ |
| $\mathrm{Spin}(7)$ | $n=8$ | $\mathrm{Spin}(7)$ |

この内で covariantly constant spinor を持つものは $\mathrm{SU}(m)$, $\mathrm{Sp}(m)$, $\mathrm{G}_2$, $\mathrm{Spin}(7)$ に限られている。そこで string のコンパクト化に使えるものは以下のようになる。

$n=4$ : $\mathrm{Sp}(1)=\mathrm{SU}(2)$ holonomy — K3
$n=6$ : $\mathrm{SU}(3)$ holonomy — Calabi-Yau 3-fold
$n=7$ : $G_2$ holonomy
$n=8$ : $\mathrm{Spin}(7)$, $\mathrm{SU}(4)$, $\mathrm{Sp}(2)$ の３種類。

K3, Calabi-Yau は非常によく調べられているのでここでは、主に $G_2$ holonomy 多様体 $M^7$ によるコンパクト化に注目すると最小の susy を出すものとしては

$$\mathrm{M}/\mathbb{R}^{3,1}\times M^7 \Rightarrow \text{ 4dim } \mathcal{N}=1 \text{ SUSY}$$
$$\mathrm{Het}/\mathbb{R}^{2,1}\times M^7 \Rightarrow \text{3dim } \mathcal{N}=1 \text{ SUSY}$$

が考えられる。これらを性質を次に見てみることにする。

# 3 $\mathbf{Het/G_2}$

heterotic string で最小の susy を持つコンパクト化は以下のものが考えられる [4]。

| 時空の次元 | 内部の次元 | 内部空間 ( holonomy ) | ゲージ群 |
|---|---|---|---|
| 6 | 4 | K3 (SU(2)) | $E_7$ |
| 4 | 6 | $\mathrm{CY}_3$ (SU(3)) | $E_6$ |
| 3 | 7 | $(G_2)$ | $F_4$ |
| 2 | 8 | (Spin(7)) | $SO(9)$ |

heterotic string を $\mathrm{G}_2$ コンパクト化した場合は 3dim N=1 susy theory が得られる。world-sheet 上の理論としては N=1 conformal field theory であるが special holonomy であることからくる余分な構造が存在する。

| $G_2$ | $G_2$ CFT | tricritical Ising |
|---|---|---|
| Spin(7) | Spin(7) CFT | Ising |

$G_2$,Spin(7) の場合、余分な構造はもはや群ではないので CFT による解析は有効である。ここで $G_2$ 模型に付随した CFT は central charge $c = 21/2$ の N=1 SCFT として実現している。$G_2$ 多様体の場合、特徴的なことは $G_2$ 構造を定める harmonic 3-form$\Phi$ が存在することであるが、この $\Phi$ は worldsheet theory として見たときには spin 3/2 の operator となっている。この operator のために N=1 SCFT は 6 個の current $(T, G; \Phi, X; K, M)$ を持つ拡張された代数をなす。さらにこの代数は $c = 7/10$ $N = 1$ SCA である tricritical Ising model を部分代数として含んでいる。もともと $G_2$ 多様体は 7 次元多様体であるため一般には holonomy group は SO(7) であるが、それが部分群である $G_2 \subset$SO(7) にまで減っているのである。これらの群の character を調べてみると

$$\begin{bmatrix} \chi^{so(7)}_{bas} \\ \chi^{so(7)}_{vec} \\ \chi^{so(7)}_{spi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi^{tri}_{0} & \chi^{tri}_{3/5} \\ \chi^{tri}_{3/2} & \chi^{tri}_{1/10} \\ \chi^{tri}_{7/16} & \chi^{tri}_{3/80} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi^{G_2}_{bas} \\ \chi^{G_2}_{fund} \end{bmatrix}$$

となり so(7)/$G_2 \cong$ (tri-Ising) であることが分かる [4]。つまり tri-critical Ising の構造は必然的であると言える。また Het/$G_2$ の場合のゲージ群が $F_4$ となることは so(9) $\times$ (tri-Ising) $\cong F_4$ から理解できる。この考察を拡張することにより最小の susy を出す heterotic string のコンパクト化は以下のようにまとめられる [4]。

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Spin(7) | | $G_2$ | | $CY_3$ | | K3 |
| hol. | SO(8) | $\supset$ | Spin(7) | $\supset$ | $G_2$ | $\supset$ | SU(3) | $\supset$ | SU(2) |
| | | $\Downarrow$ | | $\Downarrow$ | | $\Downarrow$ | | $\Downarrow$ | |
| | | Ising | | Tri | | 3Potts | | U(1) | |
| | | $\Downarrow$ | | $\Downarrow$ | | $\Downarrow$ | | $\Downarrow$ | |
| gauge | SO(8) | $\subset$ | SO(9) | $\subset$ | $F_4$ | $\subset$ | $E_6$ | $\subset$ | $E_7$ |

# 4 $\mathbf{M/G_2}$

次に M-theory を $G_2$ コンパクト化した場合の 4dim spacetime N=1 susy theory を考えてみる。従来より SUGRA を smooth 7dim manifold 上でコンパクト化した場合、gauge symmetry は abelian のものしか現れず、さらに 4dim chiral fermion が現れないことが知られている。現象論的に望ましい chiral fermion を持つ non-abelian gauge theory を構成するためには singular $G_2$ 多様体を用いればよいのではないかということが提唱されている [2]。設定としては 3dim susy cycle $Q$ の上に 4dim hyperkähler 多様体による fibration の構造を入れ、total space として $G_2$ 多様体を実現するものである。このとき $G_2$ の singularity は fiber である hyperkähler 多様体の singularity から来る。このとき massless field は singularity に localize しているがゲージ場と chiral fermion では localize の仕方が異なる。まず non abelian gauge field は codim4 singularity と関連しており 7dim spacetime である $\mathbb{R}^4 \times Q$ を propagate する。一方で chiral fermion は codim7 singularity と関連して

おり $\mathbb{R}^4 \times$ pt を propagate する。ここで pt $\in Q$ であり $Q$ 上の singularity point を表している。さらに singular point$\in Q$ 1 個につき chiral multiplet は 1 個現れる。M-theory の立場では spacetime gauge symmetry は $G_2$ space の fiber の singularity type をして実現される。例として $SU(5)_G$ の massless chiral field $\bar{5}$ を考えてみると以下のようになる。

$$\begin{array}{ccc} & & \text{M (fiber)} \\ \text{generic pt}\in Q & \to & A_4 \text{ singularity} \\ \text{special pt}\in Q & \to & A_5 \text{ singularity} \end{array}$$
$$Q\,;\text{3dim base space } (G_2=\{\text{H.K. fiber over } Q\})$$

generic point に比べて special point では singularity type が rank 1 だけ持ちあがっている。そこでこの事実を逆に使うことにより以下のような

| symmetry | chiral matter |
|---|---|
| $D_5 \to A_4$ | **10** |
| $E_6 \to D_5$ | **16** |
| $E_7 \to E_6$ | **27** |

GUTs での望ましい chiral matter が構成できるのではないかと期待されている。また chiral matter が現れる場合には anomaly cancellation が問題となるがそれは Witten[1] により議論されており、$\mathbb{R}^4 \times$ pt に support を持つ charged chiral superfield の anomaly への寄与は bulk からの anomaly inflow の寄与と完全に cancel しており全体として anomaly free な理論となっていることが示されている。

この理論 (あるいは dual theory) を typeIIA 理論の D6-brane の立場から理解しようという試みもある。この場合 gauge field は積み重ねられた parallel D6-brane 上の open string sector から現れる。一方で chiral matter は intersecting D6-brane を考えることによって実現される。この intersect する場合、D6-brane の交わりは 4 次元空間になりこの部分に局在化した open string sector から massless chiral matter が現れる。

以上の $M/G_2$ から 4dim N=1 の現実的な模型を構成しようという試みはまだまだ提唱段階であり、さらなる状況証拠の蓄積や発展が必要だと思われる。

# 5 まとめ

ここでは $G_2$ 多様体に関する 2 つのコンパクト化 $Het/G_2$(3dim N=1 susy),$M/G_2$(4dim N=1 susy) についての解説を行った。$Het/G_2$ の場合は string theory であるため world-sheet theory は CFT によって control されている。holonomy group の reduction の効果 $so(7)/G_2 \cong$(tri-Ising) によって必然的に tri-critical Ising の自由度が現れるのであった。様々な special holonomy manifold を用いた (最小の susy を出す) コンパクト化があるが

$$\begin{array}{c} \text{Spin}(7) \leftrightarrow G_2 \leftrightarrow CY_3 \leftrightarrow K3 \\ \text{(Ising), (tri-Ising), (3-Potts)} \\ \to \text{gauge group so(9), } F_4,\ E_6,\ E_7 \end{array}$$

それらは worldsheet thoery の立場から見た場合 statistical model の自由度を通して関連しているように見える [4]。

typeII string の $G_2$ コンパクト化に関しては $G_2$ $=(CY_3\times S^1/\mathbb{Z}_2)$ の場合の解析が Refs.[5],[6],[7] で行われている。coset $G_2$ の場合は Ref.[8] を、super Lie algebra に関連した話は Refs.[9],[10] を参照頂きたい。

$M/G_2$ コンパクト化の場合は、現象論的に望ましい性質を持つ 4dim N=1 susy theory を構成することが重要課題であった。特に chiral fermion を持つ non abelian gauge thoery を構築することが目標とされている。Acharya-Witten[2] では singular $G_2$ を用いることにより、singularity に localize した自由度からこれらを実現しようと試みた。gauge symmetry は fiber である hyperkähler singularity から実現され、chiral matter は singular fiber から実現されると期待されている。これらの議論の一般化も現在なされつつある。これらはまだ proposal の段階であるので更なる理解発展が望まれている。

また M-theory を扱う場合は M-theory の性質自体がまだ充分に理解されているとは言い難いために、実際の解析を行う場合は必然的にその低エネルギー理論である 11dim SUGRA に頼らざるを得ない。そこで SUGRA の立場で見たときに $G_2$ holonomy metric がどうなっているのか、あるいはどう構成したら良いかが問題となるが、様々な人たちによって具体的な metric が構成されている。

# 参考文献


[1] E. Witten, "Anomaly Cancellation On Manifolds Of $G_2$ Holonomy", hep-th/0108165.

[2] B. Acharya and E. Witten, "Chiral Fermions from Manifolds of $G_2$ Holonomy",hep-th/0109152.

[3] S. L. Shatashvili and C. Vafa, "Superstrings and Manifolds of Exceptional Holonomy", hep-th/9407025.

[4] K. Sugiyama and S. Yamaguchi, "Cascade of Special Holonomy Manifolds and Heterotic String Theory", Nucl.Phys.**B622** (2002) 3-45, hep-th/0108219.

[5] R. Blumenhagen and V. Braun, "Superconformal Field Theories for Compact $G_2$ Manifolds", JHEP 0112 (2001) 006, hep-th/0110232.

[6] R. Roiban and J/ Walcher, "Rational Conformal Field Theories With $G_2$ Holonomy", JHEP 0112 (2001) 008, hep-th/0110302.

[7] T. Eguchi and Y. Sugawara, "String Theory on $G_2$ Manifolds Based on Gepner Construction", hep-th/0111012.

[8] K. Sugiyama and S. Yamaguchi, "Coset Construction of Noncompact Spin(7) and $G_2$ CFTs", Phys.Lett.**B538** (2002) 173-179, hep-th/0204213.

[9] B. Noyvert, "Unitary minimal models of SW(3/2,3/2,2) superconformal algebra and manifolds of $G_2$ holonomy", JHEP 0203 (2002) 030, hep-th/0201198.

[10] M. Naka, "Remarks on N=1 $\mathcal{SW}(3/2,2)$ algebras", hep-th/0204202.