D-geometric Structure of Orbifolds

東大数理　武藤知巳
E-mail: tmuto@ms.u-tokyo.ac.jp

オービフォールド $\mathbf{C}^d/\mathbf{Z}_N$ の幾何学を D-brane をプローブとして調べ、その結果をトーリック幾何学を使って表した場合、トーリック図を構成するベクトルにある種の縮退が生じることが知られている [1, 2]。オービフォールドのケーラーモジュライ空間から非幾何学的相 (オービフォールドの特異点が完全に解消されていない相) が消滅するという、D-brane を使った解析に特有な性質は、この縮退に由来している。しかし、この縮退はトーリック幾何学に基づく面倒な組合せ論的計算を通して得られるため、これまでのところいくつかの簡単なモデルに対して計算されているだけで、縮退の一般的な構造はよく分かっていなかった。ここでは、$d = 2, 3$ に対して、トーリック幾何学のデータを詳しく見直すことにより、この縮退には非常にシンプルな組合せ論的構造があることを見つけた [3]。

まず、$d = 2$ で、$\mathbf{Z}_N$ の generator が $\mathbf{C}^2$ の座標 (x, y) に対して

$$(x, y) \to (\omega x, \omega^{-1} y), \quad \omega = \exp(2\pi i/N) \tag{1}$$

と作用する場合、トーリック図の $N + 1$ 個の頂点におけるベクトルの縮退度は $\binom{N}{k}$ $(k = 0, \cdots, N)$ で与えられ、トーリック図を構成するベクトルの総数は 2^N となる。また、この縮退の構造から、オービフォールドの特異点を解消した空間の例外曲線と $SU(N)$ の Lie 代数の完全反対称表現の間に対応がつく。

$d = 3$ で、$\mathbf{Z}_N$ の generator が $\mathbf{C}^3$ の座標 (x, y, z) に対して

$$(x, y, z) \to (\omega x, \omega y, \omega^{-2} z), \quad \omega = \exp(2\pi i/N) \tag{2}$$

と作用する場合には、トーリック図を構成するベクトルの総数は、

$$\text{円周上に並んだ } N \text{ 個の椅子に隣り合わないように座る方法の数} + 2 \tag{3}$$

(ただし、人数は何人でもよい) に等しく、

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^N + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^N + 2 \tag{4}$$

と書ける。

今後、$\mathbf{C}^3/\mathbf{Z}_N \times \mathbf{Z}_N$ というタイプのオービフォールドに対しても同様の考察ができれば、toric duality や Seiberg duality の理解に役立つと考えられる (例えば、[4])。

参考文献

[1] M.R. Douglas, B.R. Greene and D.R. Morrison, "Orbifold Resolution by D-branes," Nucl. Phys. B506(1997)84.

[2] T. Muto, "D-branes on Orbifolds and Topology Change," Nucl. Phys. B521(1998)183.

[3] T. Muto, "D-geometric Structure of Orbifolds," hep-th/0206012.

[4] C.E. Beasley and M.R. Plesser, "Toric Duality Is Seiberg Duality," J. High Eenrgy Phys. 0112(2001)001.