deSitter energy?

東京工業大学理工学研究科基礎物理学専攻　白水徹也
E-mail: shiromizu@th.phys.titech.ac.jp

最近の観測より宇宙項の存在がより確かなものになってきており、deSitter 量子重力を再考する動きがみられる。本 Review では古典論における deSitter 時空の Energy にまつわる問題点を中心に解説を行う。このような (単純な) 問題の解決なくして進展はありえない。

1　何故いまさら deSitter？

遠方の I 型超新星の観測により、近年宇宙項の存在がより確かななものとなってきた。我々の宇宙を構成する物質の３０パーセントが暗黒物質、７０パーセントが宇宙項 (真空のエネルギー) とのことである。ほとんどがダークな物質というわけである。宇宙項の存在によって、我々の宇宙は再びインフレーションを起こすことになるである。「再び」といったが、宇宙創生直後にもインフレーションが起きたとされている。インフレーションが予言する揺らぎは、宇宙背景輻射の揺らぎをみることで間接的に検証される。このように、初期宇宙と未来とで少なくとも我々の宇宙では 2 回インフレーションが起こることになる。

このような宇宙論の進展もあってか、deSitter 時空の超紐理論における記述の問題が Sring 2001 の Witten の講演以来真剣に検討され始めている [1]。しかし、deSitter 時空には宇宙の地平線が存在することにも起因して、超対称性との相性が悪いことが知られてる。そのことと関連して、漸近的な対称性の存在やエネルギーの定義も曖昧である。早急な進展は望めそうにない。さらに、deSitter 時空にはもうひとつエントロピーについての謎がある。ブラックホールと同様に、宇宙の地平線の存在で、deSitter 時空にもエントロピーが計算でき、地平面の面積に比例することが分かっている [2]。しかし、その起源が不明である。ブラックホールの場合、Extreme(BPS 状態) に限られるが、その起源が超紐理論での状態の足し上げで説明できることが分かっている。deSitter 時空は BPS 状態ではないので、現時点でそのような状態の足し上げで説明するのは難しい。しかし、この問題に関連して一つの提案が Strominger によってなされた [3]。adS/CFT 対応をまねて dS/CFT 対応である。この対応が正しいと信じると、deSitter エントロピーは境界上の CFT のエントロピーと関係している筈である。

細かい点を気にしなければ、この対応は deSitter 時空が anti-deSitter 時空の double Wick rotation によって得られることから期待される。実際に deSitter 時空の計量は平坦チャートで

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2\sqrt{\Lambda/6}t}(d\chi^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{1}$$

と書けが、これは $t \to i\chi$、$\chi \to it$ とすることで anti-deSitter 時空の計量

$$ds^2 = d\chi^2 + e^{2\sqrt{-\Lambda/6}\chi}(-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{2}$$

となる。adS/CFT 対応からの類推から、CFT は未来の共形無限遠方上の場と考えられる。すると 3 次元 deSitter 時空の漸近的対称性が 2 次元 CFT の Virasoro 代数になていることに気が付くと、セントラルチャージから Cardy の公式を用いて、エントロピーを評価し、Gibbons, Hawking の結果と一致することが確認できる。

さて、再びエネルギーの問題に戻る。エネルギーの問題は量子論以前に古典論においても問題である。通常、保存エネルギーは時空の時間についての一様性、すなわち、時間的な並進対称性から自然に定義され、「真空」の定義もなされる。ところが、一般の時空にそのような対称性はな

い。deSitter も然り。但し、漸近的平坦な時空の場合は、その漸近的対称性の存在が共形的に証明されており、エネルギーの定義が明確となっている。このように困難を抱えている deSitter 時空ではあるが、それが共形平坦、つまり共形超対称性が存在することに注意すると、エネルギーの定義もされ得る [4, 5]。

2 漸近的 deSitter 時空 – 漸近的平坦チャート –

エネルギーの定義には空間的無限遠方も必要である。deSitter 時空は全体としてみると未来の無限遠方はもつが空間的無限遠方は存在しない。しかし、deSitter 時空を平坦チャートでみると、その各時間一定面内は 3 次元の平坦空間であるから、あきらかに空間的無限遠方が存在する。その面の外的曲率は $K_{ij} = He^{2Ht}\delta_{ij}$ であり、一様膨張していることになる。このようなチャートはブラックホール (Schwarzshild-deSitter 時空) がある場合を存在する。静的チャートで、その計量は

$$ds^2 = -f(R)dT^2 + f(R)^{-1}dR^2 + R^2 d\Omega^2_{n-2} \tag{3}$$

となっている。ここで $f(R) = 1 - 2m/R^{n-3} + H^2R^2$, m はブラックホールの質量。この計量に対して漸近的平坦チャートが存在する：

$$ds^2 = a^2\Big[-\Big(\frac{1 - m/2(ar)^{n-3}}{1 + m/2(ar)^{n-3}}\Big)^2 d\tau^2 + \Big(1 + \frac{m}{2(ar)^{n-3}}\Big)^{4/(n-3)}(dx_1^2 + \cdots dx_{n-1}^2)\Big]. \tag{4}$$

ここで $a = e^{Ht}$. この時間一定面の外的曲率は $K^i_j = H\delta^i_j$ となっている。

これらの例から、外的曲率が K^i_j が $r = \infty$ に向かって十分早く $H\delta^i_j$ に漸近するならば、$r = \infty$ は空間的無限遠方のようにふるまっていると期待できる。実際に、時間一定面が満足すべきハミルトニアン拘束条件

$$^{(n-1)}R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 2\rho_n + (n-1)(n-2)H^2. \tag{5}$$

から、空間的無限遠方では $^{(n-1)}R \sim 2\rho_n$ と振る舞い、これは漸近的平坦な時空の空間的無限遠方でのそれと同じである。このことから一般に以下のような定義をすると都合がよいことが、後の議論で分かる。そこで、空間的超曲面 (Σ, K_{ij}, q_{ij}) が以下のような振る舞いを持つときに、漸近的平坦面と呼ぶことにする;

$$q_{ij} = \Big(1 + \frac{2m}{r^{n-3}}\Big)\delta_{ij} + O\Big(\frac{1}{r^{n-2}}\Big), \quad K_{ij} = Hq_{ij} + O\Big(\frac{1}{r^{n-1}}\Big). \tag{6}$$

計量について以下 $q_{ij} = a^2\delta_{ij} + h_{ij}$ と書くことにする。ここで $h_{ij} = O(1/r^{n-2})$。

3 deSitter energy?

エネルギーを定義するわけであるが、それにふさわしい性質は、あ) 正定値性、い) 保存性、う) 無限遠方の観測者が潮汐力として感じる、などがあげられる。ここでは、まず正エネルギー定理で Witten によって導入された spinor による方法 [6] を紹介し、定義された energy の性質について吟味するという流れで話をすすめる。

まず、adS 超重力を参考にして、spinorϵ に対する微分 $\hat{\nabla}$ を

$$\hat{\nabla}_\mu\epsilon = \nabla_\mu\epsilon + \frac{i}{2}H\gamma_\mu\epsilon \tag{7}$$

で定義する。超重力では dilation の変換則に対応する。更に、Nester tensor

$$E^{\mu\nu} \quad := \quad \frac{1}{2}\left(\bar{\epsilon}\gamma^{\mu\nu\alpha}\hat{\nabla}_{\alpha}\epsilon - \overline{\hat{\nabla}_{\alpha}\epsilon}\gamma^{\mu\nu\alpha}\epsilon\right) \tag{8}$$

を定義する。そして、以後 ϵ は Witten 方程式

$$\gamma^{i}\hat{\nabla}_{i}\epsilon = 0. \tag{9}$$

を満足するとし、$r \to \infty$ で constant spinor ϵ_0 に漸近するとする。ここで少し脱線して deSitter 時空における ϵ の役割について調べておく。結論からいうと、deSitter 時空に対して Witten 方程式の解は $\epsilon = e^{\frac{1}{2}Ht}\epsilon_0$ で与えられる。但し $\gamma^{\hat{0}}\epsilon_0 = i\epsilon_0$。この spinor からつくられるベクトル場 $\xi^{\mu} = \bar{\epsilon}\gamma^{\mu}\epsilon$ は

$$\nabla_{\mu}\xi_{\nu} + \nabla_{\nu}\xi_{\mu} = -2iHg_{\mu\nu}\bar{\epsilon}\epsilon. \tag{10}$$

を満足する。すなわち、ξ^{μ} は conformal Killing vector であることがわかる[1]。さらに陽に $\xi^{\mu} = e^{Ht}|\epsilon_0|^2\partial_t$。 時間座標を共形時間 $\eta = -e^{-Ht}/H$ にとり直すと

$$ds^2 = (H\eta)^{-2}(-d\eta^2 + d\chi^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{11}$$

と計量は表現でき、conformal Killing vector は $\xi^{\mu} = |\epsilon_0|^2\partial_{\eta}$ とかける。

本題にもどる。最終的に

$$\int_{S_{\infty}} dS_{\mu\nu}\hat{E}^{\mu\nu} = \int d\Sigma\left[\frac{1}{2}\left(G_{\mu\nu} + 3H^2 g_{\mu\nu}\right)\xi^{\mu}n^{\nu} + |\hat{\nabla}_{i}\epsilon|^2\right] \tag{12}$$

の積分関係式を得る。左辺は

$$\int_{S_{\infty}} dS_{\mu\nu}\tilde{E}^{\mu\nu} = \frac{1}{4}|\epsilon_0|^2\int_{S_{\infty}} dS^{i}(\partial_j h_i^j - \partial_i h_j^j) = 4\pi|\epsilon_0|^2 M \tag{13}$$

となり、漸近的に平坦な場合の ADM energy の表式に一致する。アインシュタイン方程式 $G_{\mu\nu} + 3H^2 = T_{\mu\nu}$ を用いると、この M は

$$4\pi|\epsilon_0|^2 M = \int d\Sigma\left[\frac{1}{2}T_{\mu\nu}\xi^{\mu}n^{\nu} + |\hat{\nabla}_{i}\epsilon|^2\right] \tag{14}$$

とまとめられ、その正定値性は保証された。また、それが漸近的平坦な時空のでの energy の表式に一致している。deSitter 時空の例でみたように、ξ^{μ} は conformal Killing vector となっていることから、M は共形変換で宇宙膨張を差し引いた時空における空間的無限遠方の観測者が測る energy であることが期待される。このことをより詳しくみるために、Abbott & Deser に従って [7]、conformal Killing vector に関係した保存 current から定義される保存 energy を構成して、それが M と一致することをみる。また、それが Weyl tensor でも表現されることが分かれば、潮汐力で測ったものと解釈できる。ここでは、Abbott & Deser 流の考察について触れる。

まず計量を背景時空である deSitter 時空とそこからのずれに分離する：

$$g_{\mu\nu} = \overline{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \tag{15}$$

[1] adS の場合はこの vector は Killing vector となる。

$\overline{g}_{\mu\nu}$ は deSitter 時空の計量、$h_{\mu\nu}$ はずれの計量。Bianchi 恒等式より、

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \overline{\nabla}_\alpha \overline{\nabla}_\beta K^{\mu\alpha\nu\beta} + \frac{1}{2}\overline{R}^{\nu}{}_{\alpha\beta\rho} K^{\mu\alpha\beta\rho} \tag{16}$$

で定義された tensor $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ は保存則

$$\overline{\nabla}_\mu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0 \tag{17}$$

を満たすことが分かる。ここで

$$K^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}\Big[\overline{g}^{\mu\beta} H^{\nu\alpha} + \overline{g}^{\nu\alpha} H^{\mu\beta} - \tilde{g}^{\mu\alpha} H^{\nu\beta} - \tilde{g}^{\nu\beta} H^{\mu\alpha}\Big]. \tag{18}$$

次に

$$\begin{aligned} J^\mu &= \mathcal{T}^{\mu\nu}\xi_\nu + \overline{\nabla}_\alpha\big(K^{\mu\beta\nu\alpha}\overline{\nabla}_{(\beta}\xi_{\nu)}\big) + \left(K^{\mu\alpha\alpha\beta}\overline{\nabla}_\beta\overline{\nabla}_\alpha + \frac{1}{2}K^{\mu\rho\alpha\beta}\overline{R}^{\nu}{}_{\rho\alpha\beta}\right)\xi_\nu \\ &= \overline{\nabla}_\nu J^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{19}$$

で current を定義する。この current 右辺の 2 段目のように書けることに注意していただきたい。ここで

$$J^{\mu\nu} = \xi_\beta \overline{\nabla}_\alpha K^{\mu\nu\beta\alpha} - K^{\mu\nu\beta\alpha}\overline{\nabla}_{[\alpha}\xi_{\beta]}. \tag{20}$$

式 (19) と書けることから、直ちに保存則

$$\overline{\nabla}_\mu J^\mu = 0 \tag{21}$$

が成り立つことが分かる。よって、

$$Q_\xi = \frac{1}{8\pi}\int dS_{\mu\nu} J^{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi}\int_\Sigma \sqrt{-\overline{g}}\, J^\mu n_\mu \tag{22}$$

は保存することが分かる。$J^{\mu\nu}$ の具体的な式を代入すると、M に一致することが示せる。更に、それが Weyl tensor で

$$Q_\xi = -\frac{1}{8\pi}\int_{S^{n-2}_\infty} e^{Ht} r^{(n)} C_{\mu\alpha\nu\beta}\hat{r}^\mu \hat{r}^\nu n^\alpha n^\beta d^{n-2}S \tag{23}$$

と書けることが示せる。

以上より、spinor で定義された「energy」もどきは保存則を満足し、Weyl tensor で書けることが分かった。従って、deSitter 時空でも、conformal Killing spinor と関係のある物理的に意味のある energy の定義が行えたことになる。Weyl tensor で書けることは、それが潮汐力を表すだけでなく、dS/CFT 対応を指示する結果も得る。すなわち、deSitter 時空の重力の energy が境界上の CFT の energy と一致することも分かる。

4 先送りにされた問題

deSitter 時空は量子化する以前に、古典論ですら種々の困難を抱えている。ここでは energy の問題に焦点をあて、conformal Killing tensor で定義された energy がよい性質を持っていることが分かった [4, 5]。しかし、先送りされた問題がある。

まず、deSitter 時空の漸近的な振る舞いである。これは anti-deSitter 時空も共有している問題である。2 節で、漸近的に deSitter 時空を平坦チャートも用いて規定した。しかしながら、本来ならば、平坦チャートのような座標系に依存することなく規定され、時空の漸近対称性の存在も自然に保証されるべきである。すなわち、条件としてアインシュタイン方程式、無限遠方が存在して物質が適度に減衰する、などといったものさえ仮定すれば、時空の漸近的振る舞いが決まってしまうということを共形的に示すべきである。漸近的に平坦な時空で成功を収めている共形埋め込みを用いた共形的な手法 [8] も適用はでき、漸近的 deSitter 時空や anti-deSitter 時空も定義できるが、共形因子から生成される vector 場が共形無限遠方の geodesic generator になっておらず、漸近的対称性の存在が証明できない [9, 10]。これまでのほとんどの漸近的 (anti-)deSitter 時空の定義は座標系によっており、しかも極めて人為的である。adS/CFT 対応における「漸近的 anti-deSitter 時空」は、広義のそれとくらべるとより小さなアインシュタイン方程式の解空間を扱っていることになっている。新しい共形的なアプローチが望まれる。

つぎに、ここで議論した M の性質についてである。一つだけ欠陥がある。それは $M = 0$ のときに、時空が deSitter 時空になることが証明できないのである。これは constant spinor ϵ_0 の独立な解が半減しまうことに起因している。しかし、そうだとすると正の宇宙項のある時空の中で基底状態が deSitter 時空であるとは言えない。deSitter 時空は不安定なのでだろうか。

ここで取り上げた問題は地味な問題であるが、解決していかなければいけない問題と信じている。恐らく deSitter 量子重力を理解することと宇宙項問題はほぼ同じ問題である。偉大なる第一歩のために deSitter 時空の古典論からの深い理解が不可欠である。

参考文献

[1] E. Witten, hep-th/0106109.

[2] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, Phys. Rev. **D15**, 2738(1977).

[3] A. Strominger, JHEP **0110**, 034(2001);
M. Spradlin, A. Strominger and A. Volovich, hep-th/0110007.

[4] T. Shiromizu, D. Ida and T. Torii, JHEP **0111**, 010(2001).

[5] D. Kastor and J. Traschen, hep-th/0206105.

[6] E. Witten, Commun. Math. Phys. **80**, 381(1981).

[7] L. F. Abbott and S. Deser, Nucl. Phys. **B195**, 76(1982).

[8] A. Ashtekar and R. O. Hansen, J. Math. Phys. **19**, 1542(1978);
A. Ashtekar and A. Magnon, J. Math. Phys. **25**, 2682(1984).

[9] T. Shiromizu, K. Nakao, H. Kodama and K. Maeda, Phys. Rev. **D47**, 3099(1993).

[10] A. Ashtekar and A. Magnon, Class. Quantum Grav. **1**, L39(1984).