Strings on PP-waves from Super Yang-Mills

東大理学部　高柳　匡

E-mail:　takayana@hep-th.phys.s.u-tokyo.ac.jp

ゲージ理論と弦理論 (重力) の双対性が、ここ 5 年間の間に AdS/CFT 対応として盛んに研究されてきた。これによって、例えば超重力理論の Kaluza-Klein モードとゲージ理論の BPS な演算子の対応は理解されたが、弦理論に特有の状態はゲージ理論側で非 BPS になると期待されるので、具体的に何に対応するのか明確な理解はこれまで得られていなかった。しかしながら最近、pp-wave と呼ばれる超重力理論の背景 [1] が、(i)$AdS_5\times\ S^5$ の極限 (Penrose 極限 [2]) として得られ [3, 4]、また (ii) その背景が超弦理論として厳密に解けることが示された [5]。この事実を用いると、AdS/CFT 対応の特別な '極限' において、具体的に超弦理論のモードとゲージ理論演算子の対応を確かめることができ [4]、大変興味深い。そこでこれらの結果とその最近の進展について簡潔にレビューしたい。

1　PP-wave and Penrose Limit

pp-wave とは、'plane-fronted gravitational waves with parallel rays' の略で、covariant constant null Killing vector が存在する重力場として定義される [6]。この背景の計量は次の形に書ける (時空は以下超弦理論を考えるので１０次元とする)。

$$ds^2 = -2dx^+dx^- + H(x^+,x^i)(dx^+)^2 + \sum_{i=1}^{8}(dx^i)^2. \tag{1}$$

この時、真空の Einstein 方程式 (Ricci flat) より、Laplace 方程式 $R_{++} = \partial_i\partial_i H = 0$ を得る。以下で考える type IIB の超弦理論では、

$$\partial_i\partial_i H = -\frac{1}{3}F_{+jklm}F_{+jklm}, \tag{2}$$

と RR-5form 場 F_{+jklm} によって変形される。一般に pp-wave は超対称性を保たないが、平面波 (plane-wave) の場合つまり $H(x^+,x^i) = \sum_{ij} A_{ij}(x^+)x^ix^j$ と書ける場合には、１６個の超対称性が存在することが示せる[1]。

その中でも、$H(x^+,x^i) = -\mu^2\sum_{i=1}^{8}(x^i)^2$ という場合には、超対称性が最大数すなわち 32 個保たれる[2](maximally supersymmetric pp-wave)[1]。特に、重要な事実として、この背景の超弦理論が light-cone gauge で厳密に解けることが知られている [5]。具体的には、light-cone gauge の Green-Schwarz 形式で、boson 場 (SO(8) の vector) を $X^1\sim X^8$、fermion 場 (SO(8) の spinor) を $S^a,\tilde{S}^b\quad(a,b=1\sim 8)$ とすると作用が

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\pi\alpha'}\int d\tau d\sigma\left[\partial_+X^i\partial_-X^i - (\mu\alpha' p^+)^2(X^i)^2\right] \\ &\quad +\frac{i}{\pi}\int d\tau d\sigma\left[S^a\partial_+S^a + \tilde{S}^a\partial_-\tilde{S}^a - (2\mu\alpha' p^+)S^a\Pi^{ab}\tilde{S}^b\right], \end{aligned} \tag{3}$$

と書ける。ここで $\Pi = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$ と定義した。この結果を見ると、boson と fermion ともに 2 次の項のみ存在し、massive の自由場となっている。したがって厳密に量子化することができる [5]。boson の

[1] 平面波の中でも特に $A_{ij}(x^+)$ が x^+ によらないときは、Hpp-wave と呼ばれ、Lorentzian な対称空間として記述される。([1] などを参照)

[2] 11 次元超重力理論においては、ずっと前に maximally supersymmetric pp-wave(KG 解)[7] が発見されている。本稿では、ゲージ理論との関係が深い、typeIIB 超重力理論のみ議論することにする。

質量項は、計量の μ^2 に比例する部分、fermion の質量項は、RR5-form flux　$F_{+1234} = F_{+5678} = \mu$ の寄与にそれぞれよるものである。弦のスペクトラムも厳密に決まり、

$$-p^- = \sum_{n=-\infty}^{\infty} N_n \sqrt{\mu^2 + (\frac{n}{\alpha' p^+})^2}, \tag{4}$$

となり、level matching 条件は $\sum_{n=-\infty}^{\infty} nN_n = 0$ で与えられる [5] (この時の分配関数の性質については、[8, 9] を参照)。ここで、非負の整数 N_n は、弦の n 番目の振動子 $a_n^{+i} \equiv \alpha_{-n}^{iL}(n \geq 0), a_n^{+i} \equiv \alpha_n^{iR}(n < 0)$, の励起した数を表す。$\mu = 0$ とするとよく知られている平坦な背景での弦の質量スペクトラムを再現する。

もうひとつ重要な事実として、どんな時空でも測地線に沿って極限 (Penrose 極限 [2]) をとると plane-wave が得られることについて説明したい。これは、Riemann 多様体で、点の近傍の近似として接空間を考えるように、Lorentzian な多様体で測地線の近傍を取り出す操作である。具体的には、まず一般の計量を次の形に書く

$$ds^2 = dV(dU + \alpha(U, V, Y^i)dV + \sum_i \beta_i(U, V, Y^i)dY^i) + \sum_{ij} C_{ij}(U, V, Y^i)dY^i dY^j. \tag{5}$$

この時、Penrose 極限は $U = u,\ V = \Omega^2 v,\ Y^i = \Omega y^i$ のスケール変換して $\Omega \to 0$ の極限をとることで定義される。結果として、

$$ds'^2 = \Omega^{-2} ds^2 = dudv + \sum_{ij} C_{ij}(u)dy^i dy^j, \tag{6}$$

となり (さらに一般座標変換すると) 前に定義した plane-wave ($H(x^+, x^i) = \sum_{ij} A_{ij}(x^+)x^i x^j$) が得られる。

さて次に、typeIIB の D3-brane の near horizon limit として実現され、AdS/CFT 対応において重要な役割を担う、$AdS_5 \times S^5$ の背景を考え、その Penrose 極限を考えてみる。まず、$AdS_5 \times S^5$ の計量は、

$$ds^2 = R^2 \left(-dt^2 \cosh^2\rho + d\rho^2 + \sinh^2\rho\ d\Omega_3^2 + d\psi^2 \cos^2\theta + d\theta^2 + \sin^2\theta d\Omega_3'^2 \right), \tag{7}$$

で与えられ (ここで R は AdS の半径 $R = (4\pi g_s N \alpha'^2)^{\frac{1}{4}}$)、Penrose 極限は

$$x^+ = (t + \psi)/2\mu,\ x^- = R^2\mu(t - \psi),\ \rho \to \rho/R,\ \theta \to \theta/R\ , \tag{8}$$

とスケーリングして $R(= \Omega^{-1}) \to \infty$ の極限 (つまり Large N 極限 $N \to \infty$) をとればよい。その結果は前述した、maximally supersymmetric pp-wave

$$ds^2 = -2dx^+dx^- - \mu^2(r^2 + y^2)(dx^+)^2 + (dr)^2 + r^2(d\Omega_3)^2 + y^2(d\Omega_3')^2, \tag{9}$$

で与えられる [3, 4]。もとの $AdS_5 \times S^5$ と、その pp-wave 極限ともに最大数である 32 個の超対称性を有すことに注意。これらの場合と (自明に) 平坦な場合以外には最大数の超対称性を持つ背景は見つかっていない。

2 BMN Duality

次に、前述した重力場に対する極限操作を重力とゲージ理論の双対性である AdS/CFT 対応に応用することを考える [4]。従来の議論では、$AdS_5 \times S^5$ の背景に存在する RR-flux のために弦理

論が量子化できず、超重力理論の Kaluza-Klein モードとゲージ理論の BPS 演算子の対応のみ検証されてきた。この時、ゲージ理論側が BPS なものに限定せざるを得ないのは、超重力理論の近似が良くなる半径が大きいところではゲージ理論の't Hooft coupling $\lambda\ (= g_{YM}^2 N) \propto R^4$ が大きくなり、強結合になるからである。しかしながら、既に見たように、$AdS_5 \times S^5$ の Penrose 極限として得られる maximally supersymmetric pp-wave の場合は、RR-flux の存在にかかわらず light-cone gauge で厳密に解けるため、双対性がより詳しく検証できると期待できる。

まず、AdS/CFT 対応を (7) の座標系で考えたときに、エネルギー $(\Delta = i\partial_t)$ と角運動量 $(J = -i\partial_\psi)$ を持つ typeIIB 超弦理論の状態は、共形次元が Δ で、U(1)R-charge が J を持つ 4 次元 N=4 $SU(N)$ super Yang-Mills 理論における演算子に対応する。これを、Penrose 極限 (つまり Large N 極限 $N \to \infty$) をとって考えてみると ($\mu = 1$ とおく)

$$p^- = i\partial_{x^+} = i(\partial_t + \partial_\psi) = \Delta - J, \quad p^+ = i\partial_{x^-} = \frac{i}{2R^2}(\partial_t - \partial_\psi) = \frac{\Delta + J}{2R^2}, \tag{10}$$

と pp-wave 背景の超弦理論の light-cone momentum $p^\pm$ との対応が得られる。この時、弦理論の記述が良いのは、$p^\pm$ が有限のときである。これをゲージ理論の言葉で表すと、

$$\Delta \sim J \sim O(\sqrt{g_{YM}^2 N}) >> 1, \quad \Delta - J = O(1), \tag{11}$$

とあらわせる。$\Delta = J$ のとき BPS な演算子となるので、この条件 (11) は BPS にとても近い non-BPS な演算子 (almost BPS operator と呼ぶ) であることを意味する。また、弦理論のスペクトラム (4) をゲージ理論側で解釈すると ($g_{YM}^2 = 4\pi g_s$ などを用いる)

$$\Delta - J = \sum_{n=-\infty}^{\infty} N_n \sqrt{1 + \frac{g_{YM}^2 N n^2}{J^2}}, \tag{12}$$

となる。さてそれでは、この弦理論から予想されたスペクトラム (12) がゲージ理論に正しく対応しているか調べる (以下ではボソン場のみ考えるが、超対称性を用いてフェルミオン場についても自然に結果が拡張される)。N=4 super Yang-Mills 理論における 6 個のスカラー場を $\phi_1 \sim \phi_6$ とし特に 2 つを $Z = \phi_5 + i\phi_6$ と複素に書くことにする。このとき、U(1)R-charge は Z が $J = 1$ で $\bar{Z}$ が $J = -1$ であり、他は 0 である。

まず真空状態 $p^- = \Delta - J = 0$、はゲージ理論側で、Z から作られるゲージ不変な演算子と考えられるので

$$\mathrm{Tr}[Z^J] \quad \leftrightarrow \quad |0, p^+\rangle, \tag{13}$$

とゲージ理論の演算子と弦理論の真空状態の対応を得る。

次に励起状態であるが、弦理論の生成演算子が、ゲージ理論において $\mathrm{Tr}[Z^J]$ の中に $\Delta - J = 1 + O(g_{YM}^2)$ の演算子 (式 (12) を参照) を挿入することに対応すると考えられる [4]。量子数の対応より

$$\begin{aligned} D_i Z \quad &\leftrightarrow \quad a_n^{+i} \ (i = 1, 2, 3, 4), \\ \phi_i \quad &\leftrightarrow \quad a_n^{+(i+4)} \ (i = 1, 2, 3, 4), \end{aligned} \tag{14}$$

と予想され、もっと具体的に例を挙げると

$$O_n = \sum_{l=0}^{J} e^{2\pi i n l/J} \mathrm{Tr}[\phi_3 Z^l \phi_4 Z^{J-l}] \quad \leftrightarrow \quad a_n^{+8} a_{-n}^{+7} |0, p^+\rangle, \tag{15}$$

ここで、$n = 0$ のときはトレースが対称的になり BPS な演算子となり、確かに $\Delta - J = 2$ と量子補正を受けない。$n \neq 0$ のときは、non-BPS であるが、(12) から分かるように、effective coupling $\lambda' = \frac{g_{YM}^2 N}{J^2}$ を有限にとっているので、(11) の条件が満たされる。したがって almost BPS である。式 (15) で表される対応の物理的意味は、左辺のトレースの中にたくさんある Z が、弦を (離散的に) 構成すると考え、$\phi_{3,4}$ の挿入は、弦の l 番目の場所を励起することに相当する。このとき n は弦の世界面の理論 (2 次元) における運動量と解釈され、この対応が理解できる (D-brane と closed string の散乱をもちいた検証については [10] を参照)。

さて、この双対性 (BMN duality) の検証として、anomalous dimension の比較を行うと、large N ゲージ理論の planar ダイアグラムで ϕ と Z を入れ替えるもののみが λ' の leading で効き、確かに弦理論の予想 (12) を再現する [4]。λ' の all order での解析もなされており、(12) と一致することも報告されている [11]。しかしながら、実際には non-planar ダイアグラムも無視できない。これは、$N \to \infty$ の極限をとる際に $J \sim \sqrt{N}$ と J も発散するからである。具体的には $g_2 = J^2/N$ の展開が large N ゲージ理論の genus 展開に対応する [12, 13]。つまり、$g_2 << 1$ という特別な領域では前述の planar ダイアグラムのみの議論で十分だが、そうでないと non-planar ダイアグラムを考慮しなくてはならない。このとき、anomalous dimension も $O(g_2^2 \lambda')$ の補正を受けることが知られている [13]。

3 Various Applications

以上の結果の他の様々な系への応用やさらなる解析が最近盛んに研究されている。最後にその中のごく一部を簡潔に紹介したい。

- 最大の超対称性を持つ pp-wave 背景が、$AdS_5 \times S^5$ から得られることを既に見たが、他に $AdS_5 \times T^{1,1}$ $(T^{1,1} = SU(2) \times SU(2)/U(1))$ という 8 つの超対称性をもつ背景の Penrose 極限としても得られることが示せる。つまり Penrose 極限の supersymmetry enhancement の現象を意味する。このとき、双対と考えられている N=1 super Yang-Mills の特別なセクターでは超対称性が N=4 に enhance していると予想される [14, 15, 16]。

- pp-wave 背景の超対称性を下げる簡便な方法として、orbifold を考えることができる。この場合、双対のゲージ理論は N=2 の quiver ゲージ理論となる。そのときに興味深いのは、弦理論側に twisted sector が存在することであるが、その対応物が、ゲージ理論側にも行列の構造として存在することが分かる [17, 18]。

- AdS/CFT 対応でもうひとつの重要な背景として $AdS_3 \times S^3 \times T^2$ がある。この場合も、Penrose limit をとると厳密に解ける pp-wave 背景となり [4, 8]、双対と考えられている 2 次元共形場理論 (T^4 の symmetric orbifold) との対応も議論することができる [19, 20, 21]。

- 共系次元の量子補正以外に、もうひとつの BMN duality の検証として、pp-wave 背景における light-cone string field theory の 3 点相互作用 [22] とゲージ理論の 3 点関数の比較が挙げられる。$\mu >> 1$ の領域で、弦理論の世界面を離散化 (string bit) することが可能なので、ゲージ理論の演算子 $\mathrm{Tr}[ZZZ \cdots ZZZ]$ と対応するので、両者は一致することが実際理解できる [13]。この対応の詳細な検証も最近なされている [23]。

参考文献

[1] M. Blau, J. Figueroa-O'Farrill, C. Hull and G. Papadopoulos, JHEP **0201** (2002) 047, hep-th/0110242.

[2] R. Penrose, "Any space-time has a plane wave as a limit," Differential geometry and relativity, Reidel, Dordrecht, 1976 (271).

[3] M. Blau, J. Figueroa-O'Farrill, C. Hull and G. Papadopoulos, Class. Quant. Grav. **19** (2002) L87, hep-th/0201081.

[4] D. Berenstein, J. Maldacena and H. Nastase, JHEP **0204** (2002) 013, hep-th/0202021.

[5] R. R. Metsaev, Nucl. Phys. B **625** (2002) 70, hep-th/0112044; R. R. Metsaev and A. A. Tseytlin, hep-th/0202109.

[6] For a review see D. Kramer, H. Stephani, M. A. H. MacCallum, and E. Herlt, "Exact Solutions of Einstein's Field Equations," Cambridge University Press, 1980.

[7] J. Kowalski-Glikman, Phys. Lett. B **150** (1985) 125.

[8] J. G. Russo and A. A. Tseytlin, JHEP **0204** (2002) 021, hep-th/0202179.

[9] T. Takayanagi, hep-th/0206010.

[10] Y. Imamura, JHEP **0206** (2002) 005, hep-th/0204200.

[11] A. Santambrogio and D. Zanon, hep-th/0206079.

[12] C. Kristjansen, J. Plefka, G. W. Semenoff and M. Staudacher, hep-th/0205033.

[13] N. R. Constable, D. Z. Freedman, M. Headrick, S. Minwalla, L. Motl, A. Postnikov and W. Skiba, JHEP **0207** (2002) 017, hep-th/0205089.

[14] N. Itzhaki, I. R. Klebanov and S. Mukhi, JHEP **0203** (2002) 048, hep-th/0202153.

[15] J. Gomis and H. Ooguri, Nucl. Phys. B **635** (2002) 106, hep-th/0202157.

[16] L. A. Zayas and J. Sonnenschein, JHEP **0205** (2002) 010, hep-th/0202186.

[17] N. w. Kim, A. Pankiewicz, S. J. Rey and S. Theisen, hep-th/0203080.

[18] T. Takayanagi and S. Terashima, JHEP **0206** (2002) 036, hep-th/0203093.

[19] Y. Hikida and Y. Sugawara, JHEP **0206** (2002) 037, hep-th/0205200.

[20] O. Lunin and S. D. Mathur, hep-th/0206107.

[21] J. Gomis, L. Motl and A. Strominger, hep-th/0206166.

[22] M. Spradlin and A. Volovich, hep-th/0204146, hep-th/0206073.

[23] Y. j. Kiem, Y. b. Kim, S. m. Lee and J. m. Park, hep-th/0205279; M. x. Huang, hep-th/0205311; C. S. Chu, V. V. Khoze and G. Travaglini, JHEP **0206** (2002) 011, hep-th/0206005; P. Lee, S. Moriyama and J. w. Park, hep-th/0206065; I. R. Klebanov, M. Spradlin and A. Volovich, hep-th/0206221; M. x. Huang, hep-th/0206248.