Stability of $AdS_p \times S^q \times S^{(n-q)}$

早稲田大学理工学総合研究センター　鳥居　隆
E-mail: torii@gravity.phys.waseda.ac.jp

Randall-Sundrum 型のブレイン宇宙ではまず始めに 5 次元の反ドジッター時空を仮定します．この反ドジッター時空はより基本的は理論からの帰結として得られると予想します．例えば超重力理論では Freund-Rubin コンパクト化によって反ドジッターと Eistein 多様体の直積時空が得られます．そこで，このような時空の安定性は重要な意味を持つことになります．ここでは Freund-Rubin 解の安定性を調べます．

超重力理論のボソン部分の作用は典型的に以下のように書けます．

$$S_{p+q} = \int d^{p+q}x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}R - \frac{1}{4q!}F_q^2\right). \tag{1}$$

ここで，$F_q = dA_{q-1}$ は q-形式場を表します．この理論の単純な解として $AdS_p \times S^q$ 時空

$$ds^2 = g_{\mu\nu}^{(AdS)}dx^\mu dx^\nu + g_{ij}^{(S)}dx^i dx^j, \tag{2}$$

$$F_q = f *_q 1, \tag{3}$$

があります．ここで，f は定数です．$g^{(S)}$ は S^q のメトリックですが，これを $S^n \times S^{q-n}$ に拡張することもできます．これらの解は Randall-Sundrum 型のブレイン宇宙の基礎となる反ドジッター時空を自然な形で与えることができます．我々はこの解の安定性に興味があります．

線形摂動解析では $AdS \times S^n \times S^{q-n}$ は $q > 9$ ならば安定であることがわかっています．これは背景場が厳密に $AdS \times S^n \times S^{q-n}$ のときに成立します．しかし，ブレイン宇宙論の視点からすると $(\text{Schwarzschild-}AdS) \times S^n \times S^{q-n}$ も重要になります．そこで，このようなブラックホール解を含むより一般的な解における非線形の安定性を議論します．

まず次のメトリックを仮定します．

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu + e^{2\phi_1(x)}d\Omega_n^2 + e^{2\phi_2(x)}d\Omega_{(q-n)}^2. \tag{4}$$

$d\Omega_n^2$ と $d\Omega_{(q-n)}^2$ は，それぞれ S^n と $S^{(q-n)}$ のメトリックです．このとき q 形式場は

$$F_q = f *_n \wedge f *_{q-n} 1. \tag{5}$$

が解となります．

我々は反ドジッター時空における正エネルギー定理を利用して $q > 9$ ならば非線形の摂動に対して全重力エネルギーが正になることを示しました．これは線形解析の結果と一致します．

このように $AdS \times S^n \times S^{q-n}$ は $q > 9$ を満たしていれば大きな揺らぎに対しても安定であることがわかります．正エネルギー定理を利用した解析の利点は（１）非線形摂動も扱えること（２）トポロジーの変化のない時空で半古典的または量子論的な安定性を議論できるとこ（３）背景時空が厳密な $AdS \times S^n \times S^{q-n}$ のみでなく，ブラックホールのような非自明な空間のトポロジーを持つ解も議論できるところにあります．

参考文献

[1] T. Shiromizu, D. Ida, H. Ochiai, and T. Torii, Phys. Rev. D**64**, 084025 (2001).