非可換幾何学と弦の場の理論

東大理　松尾泰
E-mail: matsuo@hep-th.phys.s.u-tokyo.ac.jp

開弦の場の理論に対する非可換幾何学的な手法の具体化とその問題点についてレビューを行った。

1　非可換空間とDブレイン

この稿では開いた弦理論において非可換幾何学が働く役割を、場の理論の立場で考察を行う。有名なConnes-Douglas-Schwarzや Seiberg-Witten の仕事を引くまでもなく、二階反対称場Bがゼロでない背景における開弦を記述する幾何学として非可換幾何学が自然に現れる。またそれによってDブレインのチャージなども自然に記述できる。

非可換幾何学のもっとも単純な例は、行列が作る幾何学 $M_n(\mathbf{C})$ である。このような行列は開弦の Chan-Paton 因子として理解すべきものである。このとき行列のサイズ n はDブレインの枚数と同一視できる。

この n 枚あるブレインから $m(<n)$ 枚のブレインを取り出す操作を行うことを考える。例えばタキオン凝縮などの物理プロセスをへると実際にそのような現象が起こる。m 枚のブレインの Chan-Paton 因子はもちろん $M_m(\mathbf{C})$ であるから n 次元空間から m 次元部分空間を取り出す演算、すなわち射影演算子

$$p \in M_n(\mathbf{C})\,, \quad p^2 = p\,, \quad p^* = p\,, \quad \mathrm{rank}(p) = m \tag{1}$$

このブレインと射影演算子の対応は、ブレインのチャージがK理論から分類されるというWitten の立場から見ると自然なものである。すなわち非可換空間のK群は射影演算子で分類されるのである。この見方はChan-Paton の枠組みを大きく越えて非可換幾何学一般に適用されるようになった。

例えばB場がある場合、場の積は Moyal 積

$$\phi_1 \star \phi_2(x) = e^{\frac{i\theta}{2}(\partial_{x_1}\partial_{x'_2} - \partial_{x'_1}\partial_{x_2})}\phi_1(x)\phi_2(x')\Big|_{x'=x} \tag{2}$$

に書き換えられるが、このような空間でブレインを書き下すためには (1) のような射影演算子 $p \star p(x) = p(x)$ を用いればよい。ブレインの枚数はトレース演算子

$$\mathrm{Tr}\,(f) \equiv \frac{1}{2\pi\theta}\int dx^1 dx^2 f(x)\ , \tag{3}$$

を用いて計算される。Moyal 空間は無限次元の行列空間 $M_\infty(\mathbf{C})$ と同一視できるから, Moyal 空間は Chan-Paton 因子で n が無限大になったものに他ならない。このとき射影方程式の解は「非可換ソリトン」と呼ばれ、非可換空間におけるDブレインを記述する。

2　弦の場の理論の Moyal 定式化

以上の話は Chan-Paton 因子とその一般化と考えられるわけであるからある意味で自然で納得のいく理論の発展であった。しかしそれとは質的に異なるレベルで非可換幾何学を開弦の理論に応用とする新しい流れが起こった。それが Rastelli-Sen-Zwiebach (RSZ) らによる Vacuum String Field Theory (VSFT) 仮説である [1]。

元々Witten による開弦の場の理論 [2] は非可換幾何学を原理として定式化されたものである。弦の場同士の積 (Witten の $\star$ 積) は半弦形式[1]の記号を用いると

$$(\psi_1 \star \psi_2)(l,r) = \int Dt(\sigma)\psi_1(l,t)\psi_2(t,r) \tag{4}$$

となっており、半弦の場 l, r を行列のラベルと見なし、t に対する経路積分をラベルに対する和を置き換えたものと見なせば、無限次元の行列積そのものである。

ここで前章の考察をそのまま拡大解釈したものが VSFT 仮説である。すなわちDブレインとは Witten の $\star$ 積に対する非可換ソリトンで記述すると主張する。弦の場の理論の運動方程式もタキオン真空に対しては書き換えられて射影演算子の方程式になると考える

$$Q\psi - \psi \star \psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi - \psi \star \psi = 0 \ . \tag{5}$$

また生成されるブレインの枚数も射影演算子のランクと等しいと考える。方程式 (5) には無限に解が存在しているがブレインに対応すると考えられているものは Sliver 解と呼ばれるものである。

$$|\Xi\rangle = \lim_{n\to\infty} (|0\rangle)_\star{}^n. \tag{6}$$

Sliver は構成法によりランクが 1 の射影演算子であり、ブレインが 1 枚だけある状態を記述していると考えられている。

しかし前章までの考察と比較すると VSFT 仮説には飛躍と思われる点も存在している。いくつかあげると

1. 半弦の自由度は高次の弦の励起なども含めた弦本来の自由度である。もしそれらの自由度を射影演算子を通じて有限次元にしてしまうと、出てくる弦の自由度も有限になってしまうように思われる。一方ブレインに端を持つ開弦の自由度はもちろん無限大だから物理的な自由度が合ってないように思われる。
2. 開弦の自由度は正確に半弦に分離できるわけではない。つまり開弦の中点 (Midpoint) における半弦の境界条件がはっきりしない。また中点の自由度が右左のどちらかの弦の自由度としてとらえるべきなのか、曖昧である。従って開弦を行列としてとらえることには無理がある。
3. 弦理論が duality の性質を持つためには世界面上で Virasoro 代数の対称性を持っていなくてはいけない。それでは Virasoro 代数と開弦を記述する行列という概念は両立するものであろうか。Neumann 代数の分類では Virasoro 代数は III 型に分類されているが、行列が記述する代数は I 型であることを注意しておこう。

最近 Bars 氏と著者は Witten の弦の場の理論を Moyal 積を用いて書き下すことに成功した [3]。もちろん半弦の定式化が知られているのでそれを Moyal 積に書き換えるのはそれほど難しいことではない。具体的には半弦の場を次のように Fourier 変換する。

$$A(x,p) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}) e^{-ipy} dy \equiv \mathcal{F}(\Psi)(x,p) \ . \tag{7}$$

このとき Ψ に対する $\star$ 積 (4) は A に対する Moyal 積に書きかわる。つまり $\mathcal{F}(\Psi_1 \star \Psi_2) = \mathcal{F}(\Psi_1) * \mathcal{F}(\Psi_2)$.

Bars と著者が研究したことは Moyal 形式を通じて上で述べたような VSFT 仮説の問題点を正則化を用いて考え直すことである。つまり最初から無限自由度にしておくと各所で正当化が難しい

[1] 半弦とは開いた弦の左半分と右半分をそれぞれ別の記号を用いて書き、開弦の場があたかも行列のような性質を持つように明示的に書き下す方法である。開弦を $X(\sigma)$ $(0 \leq sigma \leq \pi)$ と書くと $l(\sigma) = X(\sigma)$, $r(\sigma) = X(\pi - \sigma)$ $(0 \leq \sigma \leq \pi/2)$ となる。

演算が出てきて計算の信頼性を損なってしまうのでいったん有限自由度で理論を書き直しておいて、計算の最後に無限自由度の極限をとることを考える。このようにして上であげた問題点を考え直してみる。1は後回しにしてまず2を考える。

中点の問題は無限自由度の行列に現れる結合則の破れという形で表現される。典型的には逆がある行列 T に対してゼロモードが v があるという形で現れてくる。このとき明らかに結合則が破れてしまう。

$$(T^{-1}T)v = v \quad \text{but} \quad T^{-1}(Tv) = 0\ . \tag{8}$$

適当な正則化なしにはこのような行列は無矛盾に扱うことは難しい。上に上げた行列 T を用いると任意の Neumann 行列も書き下すことができるのでこの問題点は弦の場の理論では本質的な問題点である。

我々の論文ではこの問題に対する解決策として無矛盾に有限ランクに行列を書き直すこと提案した。これで一応結合則の問題は回避できるのであるが3番目の Virasoro 代数の問題が残る。もちろん有限次元で Virasoro 代数を表現することはできないが、プロパゲーターに対応する L_0 に対しては表式を与えることができた。その形は

$$L_0 A = \mathcal{L}_0 * A + A * \mathcal{L}_0 + \gamma A \tag{9}$$

ここで Virasoro 代数の元のほとんどの部分が Moyal 積を用いて書かれていることに注目していただきたい。($\mathcal{L}_0$ と書かれている部分) これは Virasoro 代数の作用が行列の作用として書かれている部分である。一方第3項の γ がかかっている部分は (正確な定義は我々の論文を参照していただきたい) 行列では書ききれない部分であるが、単純に N が大きい極限をとるだけだと消えてしまう項である。実際この項は本質的な役割を果たしていてこの項なしには、正しいスペクトルを再現することはできないのである。結論としてはこの項があるために Virasoro 代数は行列では書くことができない。

最近の研究 [4] では弦理論のループ振幅を Moyal 形式を用いて書き下そうとしているが、第3項を含めても摂動論を構築することが可能であることがわかり、正しい振幅が導かれることが示されている。従って Moyal 形式自体は Witten の弦の場の理論と同等である。このとき Witten の弦の場の理論から VSFT 型の理論を導こうとすると上で述べた第3項だけが慣性項を与えるような形になっている。このとき場 A をてきとうにシフトすることが必要であるが、それは VSFT 仮説にあるような Sliver に比例する形ではなく Identity に比例する形になっている。以前著者は VSFT で現れるべき Projector は Sliver ではなく Identity であるはずだという事を述べたが [5]、上の考え方はこれをサポートするものである。これは1の問題についても示唆を与えている。つまり有限のランクの射影演算子では弦のスペクトルを再現するのは難しいが、ランクを無限大にすると

3 Sliver 解の周りの物理状態

最後に1の問題を考える。第2章で述べたように筆者は Sliver 解を Tachyon 真空として考えることについては懐疑的であると言わざるを得ない。しかし２００１年の8月以降の発展においては sliver 解が最も有望な解として調べられてきているのは事実であり、本稿もレビューであるからこれらのことにふれるべきであると思う。従って以下やや手短ではあるが、これまでの研究の流れと筆者なりの問題点の指摘を行いたいと考える。

Sliver 解の周りの展開で物理状態を見つけ、それがＤブレインの上で定義された開いた弦の物理状態であることを示すことが最初の課題であり、その物理状態を用いてブレインテンションを導出するのが第二の課題である。ここ半年間の研究はこの二つの課題を巡って激しく揺れ動いてたと言えよう。

まず最初の問題についてであるが、最初に問題となる点は射影演算子の方程式の周りの変分の中には BRST コホモロジーの非自明なものは存在しないということであった。それはこの方程式が微分方程式ではなくて代数方程式であるからである。より正確に言うと射影演算子の無限小変換が再び射影演算子となるためには次の条件が必要になる。

$$\delta p \star p + p \star \delta p = \delta p. \tag{10}$$

この方程式が δp に対する運動方程式である。一方 p に対するゲージ変換は次のように定義されている。

$$\delta p = h \star p - p \star h \ . \tag{11}$$

有限次元の行列の射影演算子については、容易な計算によって (10) を満たす任意の δp は (11) の形に書くことが可能である。

このあまりにも自明な事実を前にして、大きな驚きとして迎えられたのは、畑・川野の論文 [6] において非自明な物理状態 (タキオン解) が構築されてしまったという事実であった。

有限次元の no-go theorem を回避するために、彼らは中点の特異性を用いざるを得なかった。

彼らの発見は、しかし同時にいくつかの問題点も提起した。列挙すると (1) 彼らのタキオン解を用いてブレインテンションを計算しても正しい答えが得られない (2) 彼らの解は確かに Fock 空間の任意元 $\langle\Omega|$ との内積については運動方程式を満たしているように見える。つまり $\langle\Omega|e.o.m\rangle = 0$ となっているが sliver の元 $\langle\Xi|$ については運動方程式を満たしていない、すなわち $\langle\Xi|e.o.m\rangle \neq 0$ となる。

ある意味で第二の問題は彼らの解の本質を突いたものであった。以下、非常な簡単な例えを用いて、上のような現象は無限次元のヒルベルト空間の典型的な病例であることを示したい。今 N 次元空間においてベクトル $u = (1/\sqrt{N})(1, 1, \cdots, 1)$ を考えよう。このベクトルの任意の基底 e_i に対する内積は

$$\langle e_i|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \to 0 \qquad \text{as} \quad N \to \infty \ . \tag{12}$$

この意味で u は $N \to \infty$ の極限でゼロとなるベクトルであるとナイーブには考えられる。一方 u 自身の内積は全ての N について常に 1 であってこれは u がゼロであるという上の結論とは矛盾している。このように無限次元のヒルベルト空間については、どのような状態を選ぶかと言うことについては慎重な取り扱いが必要なのであって、適当な注意を怠ると矛盾した結果がかなり容易に出てしまうことはよく知られている事実である。VSFT の場合このような危険な領域で得られるような結果を用いない限り物理状態などが簡単には得られそうもないのは事実であるが、少なくとも自己矛盾を起こさないような無限次元空間を議論するための数学的な準備が現時点では必要なのではないかと考えられる。

最近大川氏が新しいタイプの物理状態を提唱した [7]. 彼の提唱している状態は共形場理論の立場から見ると畑・川野状態より遙かに自然な定義を考えている。また彼が提案しているタキオン状態からブレインテンションを計算すると、実際正しい値を再現してしまう。これらの点から見ると大川氏の提案している状態は Sliver 解の周りの物理的状態としてより適切なものと言えよう。ただ彼の状態についても運動方程式は上で述べたような弱い意味でしか成立しない。運動方程式が弱い意味で成立するという点においては畑・川野解も大川氏が提案している解も全く同等である。このことは弱い意味での運動方程式が成立すると言うことがかなり広い解を含まざるを得ないと言うことも同時に示唆してしまう。上に述べたような無限次元空間の適当な取り扱いがもし可能であるとすると、それは大川状態を採択して畑・川野状態を否定するもので無くてはならないが現在の所それは難しい問題と言わざるを得ない。

参考文献

[1] L. Rastelli, A. Sen, B. Zwiebach, hep-th/0012251, hep-th/0102112, JHEP 11 (2001) 035, JHEP 11 (2001) 045.

[2] E. Witten, Nucl.Phys. B268 (1986) 253.

[3] I. Bars, Phys. Lett. B517 (2001) 436;
I. Bars, Y. Matsuo, hep-th/0202030, Phys. Rev. D66 (2002) 066003.

[4] I. Bars, I. Kishimoto, Y. Matsuo, to appear.

[5] Y. Matsuo, Phys. Lett. B 514 (2001) 407; Mod. Phys. Lett. A16 (2001) 1811.

[6] H. Hata and T. Kawano, JHEP 11 (2001) 038.

[7] Y. Okawa, hep-th/0204012.