Exact solutions of the Lipkin-Meshkov-Glick model Hamiltonian based on the Bethe ansatz

Graduate School of Science, Kochi University
Hiroyuki MORITA and Seiya NISHIYAMA
E-mail: morita@cc.kochi-u.ac.jp

BCS モデルの厳密解は、Richardson によって得られた (1963)。それは Bethe ansatz equations (BAE) と呼ばれる代数方程式を解いて得られた解によって、BCS ハミルトニアンの固有値と固有関数が一斉に決定されるというものである。この厳密解が豊かな数学的構造 (たとえば Gaudin モデルとの関係や、可積分性、共形場の理論とのつながりなど) をもつことがのちに明らかになってきた。そのほか Ultrasmall metallic grains の超伝導の特性に関わって、この厳密解は近年注目を受けている。

BCS モデルと同様に、厳密解を持つモデルとして、Lipkin-Meshkov-Glick (LMG) モデルが知られている。LMG モデルについても、BAE によって厳密解を構成できることが、Pan & Draayer によって示された (1999)。彼らは $W^2 \geq V^2$ のケースについて、ボソンに対する無限次元のループ代数的アプローチによって BAE を導出し、厳密解の解析的な表現を得たが、この方法では取扱いのできない範囲が残されていた。

我々は、これらの範囲を含め、一般的なすべてのケースについて、LMG モデルの厳密解を決定する BAE を導出した。用いた方法は、Pan & Draayer とは異なり、ボソンに対するループ代数という観点に立たずに、Richardson にならってフェルミオン空間での波動関数に対する変分原理から導出している。そのため、パラメータのとり方にも多様性が許されており、Pan & Draayer の導出した式を含んでいる。

一例を示すと、BAE for m=even, A 系列, Case 1($W \neq \pm V$) は、$\frac{{\beta_1}^2+{\beta_2}^2}{\beta_1\beta_2} = -\frac{2W}{V}$ として

$$\left((m-1) + \frac{2\beta_1\beta_2}{{\beta_1}^2-{\beta_2}^2}\frac{\epsilon}{V}\right)\frac{1}{x_j} + \left(\frac{{\beta_1}^2}{1-{\beta_1}^2 x_j} + \frac{{\beta_2}^2}{1-{\beta_2}^2 x_j}\right) = -\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m'}\frac{4}{x_k - x_j}$$

$$for \quad j = 1, \cdots, m'$$

固有値 E は BAE の解 x_j を用いて

$$E = -\frac{{\beta_1}^2+{\beta_2}^2}{{\beta_1}^2-{\beta_2}^2}m'\epsilon + \left(\frac{1}{\beta_1\beta_2}(m-1)V + \frac{2}{{\beta_1}^2-{\beta_2}^2}\epsilon\right)\sum_{j=1}^{m'}\frac{1}{x_j}$$

で決定される。また x_j から、固有値に対応する固有状態も決定される。

References

R.W. Richardson, N. Sherman, Nucl. Phys. **52** (1964) 221.
H.J. Lipkin, N. Meshkov, A.J. Glick, Nucl. Phys. **62** (1965) 188.
F. Pan, J.P. Draayer, Phys. Lett. **B 451** (1999) 1.