Polchinski 方程式の解析について

新潟大学大学院自然科学研究科博士後期課程 2 年　石掛 真人
E-mail: ishikake@muse.sc.niigata-u.ac.jp

場の理論の非摂動的な解析手法として非摂動繰り込み群がある。しかし、これは非常に有用なものではあるが、物理的なカットオフの存在により、ゲージ対称性を破ってしまう。この問題に対するアプローチはいくつか知られているが、そのなかで反場形式上の Master 方程式を用いることで、非摂動繰り込み群上における厳密なゲージ対称性を構成しようという試みがある [1]。ここでの Master 方程式とは Wilson 有効作用 $S_{\rm eff}[\Phi]$ に対する方程式で、ゲージ対称性の情報を持っている。従って、扱うべき方程式は Master 方程式と、$S_{\rm eff}$ に対する繰り込み群方程式である Polchinski 方程式である。論文 [1] では形式的な議論が為されているのだが、実際の応用には近似計算が必要である。その際、いかにして対称性を考慮しながら近似計算を行うかが問題となる。ここではその難しい問題にアプローチする前に、準備として Polchinski 方程式がどのような構造を持っているのか調べる。

Polchonski 方程式は一粒子可約 (1PR) な寄与を含む。通常は Legendre 変換を行い、一粒子既約 (1PI) な寄与のみを含む Wetterich 方程式で解析が行われている。この二つの方程式は本質的に同等であるので、Polchinski 方程式においても、1PI の情報のみ引き出せるはずである。実際、Wilson 有効作用 $S_{\rm eff}[\Phi]$ と 1IP の Green 関数の生成汎関数 $V[\varphi]$ は、

$$S_{\rm eff}[\Phi] = V\left[\Phi - \Delta\frac{\partial S_{\rm eff}}{\partial\Phi}\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial S_{\rm eff}}{\partial\Phi}\Delta\frac{\partial S_{\rm eff}}{\partial\Phi} \tag{1}$$

の関係があるので、$S_{\rm eff}[\Phi]$ を $V[\Phi]$ で展開することができる。$S_{\rm eff}$ は $V[\Phi]$ と関節線 Δ で構成されていて、複雑なグラフを含む。得られた $S_{\rm eff}$ を Polchinski 方程式に代入すれば、$V[\Phi]$ に関する無限個の方程式に展開できる。その 1PI の部分は Wetterich 方程式 (場を Φ に入れ替えたもの) に一致し、残りの方程式はそれを場 Φ で微分して得られる事が分かる。つまり、Polchinski 方程式で独立な情報を持っているのは 1PI 部分のみである。

このことから、Polchinski 方程式を解析するときは、有効作用として展開の一部である

$$S_{\rm eff}[\Phi] = V[\Phi] - \frac{1}{2}V^{'}[\Phi](1+\Delta V^{''}[\Phi])^{-1}\Delta V^{'}[\Phi] \tag{2}$$

を用意しておけばよい。この作用で第 1 項目の trace と第 2 項目の両端の $V^{'}[\Phi]$ の trace を取るという約束で、Wetterich 方程式が得られる。つまり、このことは、Polchinski 方程式を解析する際、どのよう Wilson 有効作用を truncation すればよいのか、という 1 つの指針を与える。

References

[1] Y.Igarashi, K.Itoh and H.So, Phys.Lett.B479 (2000) 336, Prog.Theor.Phys.104 (2000) 1053