Lattice Wess-Zumino-Witten action

茨城大学　松井耕介
E-mail: matsui@serra.sci.ibaraki.ac.jp

Introduction
Wess-Zumino-Witten 項を Admissibility 条件を満たす gauge 場の空間において GW relation を満たす Dirac 演算子 D を用いて lattice 上で定式化した。

Lattice 上での WZW 項

$$i\Gamma_{WZW}[g,U] \equiv \ln\det M[U] - \ln\det M[U^{g^{-1}}]\ , \quad U^g = g(x)U(x,\mu)g(x+a\hat{\mu})^{-1}$$

gauge 場の 1-parameter family を

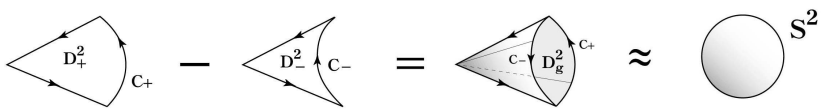
$$U_t(x,\mu) = U^{g_t^{-1}}\ (0\le t\le 1)\ , \quad U_0 = U\ , \quad U_1 = U^{g^{-1}}$$

と置き、gauge path t に沿って積分すると

$$\begin{aligned}\Gamma_{WZW}[g,U] &= i\int_0^1 dt\partial_t \ln\det M[U^{g_t^{-1}}] \\ &= i\int_0^1 dt\mathrm{Tr}(g_t^{-1}\partial_t g_t)\gamma_5(-1+\frac{a}{2}D) - i\int_0^1 dt\int_0^1 ds\mathrm{Tr}(P_{t,s}[\partial_t P_{t,s},\partial_s P_{t,s}])\end{aligned}$$

この式は lattice 上で locality を持つ。

WZW 項の 2π 不定性
以下のような経路をとる 2 つの gauge path を考える。



$$\begin{aligned}\Gamma_{WZW}[g,U]|_{g_t^{(1)}} - \Gamma_{WZW}[g,U]|_{g_t^{(2)}} &= -\int_{C_+-C_-}\mathrm{Tr}\hat{P}_- D^{-1}P_+ dD - \int_{D_+^2-D_-^2}\mathrm{Tr}\hat{P}_-(d\hat{P}_-)^2 \\ &= -i\int_{S^2} dtds\ \mathrm{Tr}(P_{t,s}[\partial_t P_{t,s},\partial_s P_{t,s}]) = -2i\pi n\end{aligned}$$

連続理論では gauge path によって 2π の整数倍の不定性があることが知られているが、以上のように GW relation を用いることで lattice 上においてもこの不定性が成立する。(multivaluedness)
同様に gauge loop に対して gauge path は $2\pi n$ を出す。[L.Alvarez-Gaume and P.Ginsperg]
gauge anomaly がある場合、この Chern 数は $n\neq 0$ となり $\langle\mathcal{O}\rangle_F$ は一価ではありえない。よって anomalous な Weyl fermion は gauge 不変性を犠牲にしても定式化できない。
つまり $n\neq 0$ ならば admissible gauge 場 $\mathcal{U}$ の配位空間において連続的に 1 点に潰すことのできない 2-sphere が存在し、chiral gauge 理論ではそれが smooth な fermion 測度に対する障害になっている。

参考文献

[1] T.Fujiwara, H.Suzuki, M.Yamamoto, K.M : hep-lat/0307031 ,to appear in JHEP