# Chiral Anomaly and Ginsparg-Wilson Relation on the Noncommutative Torus[1]

KEK　永尾　敬一
E-mail: nagao@post.kek.jp

行列模型における４次元カイラルフェルミオンの構成は、単に現象論的模型を構成するという意味だけでなく、超弦理論が目指す時空と物質の統一的理解というより根源的な問題を解く手がかりを得るという意味においても興味深い課題の一つである。余次元方向を Kalza-Klein 的なコンパクト化をすることによってそれを実現するためには、有限非可換幾何において非自明なインデックスを構成しなければならない。この問題を考えるにあたって、我々は、Connes の spectral triple$(\mathcal{A},\mathcal{D},\mathcal{H})$ における Dirac operator と chirality operator は互いに反可換でなければならないという制限を cut-off order だけ緩めて Ginsparg-Wilson(GW) 関係式に修正するべきだという主張を行った [1]。そこでは、具体例として fuzzy 2-sphere を取り上げたが、他の非可換幾何上でも同様の構成および解析を行うことは重要である。

非可換トーラスにはある種の格子構造があることから、そこでの GW fermion は、通常の overlap Dirac operator を用いて定義される。chirality operator としては、通常の $\gamma_{d+1}$ 以外に $\hat{\gamma}=\frac{H}{\sqrt{H^2}}$ が導入される。ここで、$H=\gamma_{d+1}(m_0-aD_{\rm w})$、$D_{\rm w}=\frac{1}{2}\left[\gamma_\mu(\nabla_\mu^*+\nabla_\mu)-ar\nabla_\mu^*\nabla_\mu\right]$ であり、$m_0$ と $r$ は free parameter である。Dirac operator は、$D_{GW}=\frac{1}{a}\left[1-\gamma_{d+1}\hat{\gamma}\right]$ で定義され、$0<\frac{m_0}{r}<2$ の場合に doubler を持たない。我々は、任意の偶数次元 $(d=2n)$ において、位相幾何学的手法 [2] を用いてカイラルアノマリーを評価し、それが、star-積を伴った Chern character、$q(\lambda)=\frac{(-1)^n}{(4\pi)^n n!}\epsilon_{\nu_n\mu_n\cdots\nu_1\mu_1}\int d^dx\ \lambda(x)\star F_{\nu_n\mu_n}(x)\star\cdots\star F_{\nu_1\mu_1}(x)$ にまとめられることを示した [3]。

さて、非可換トーラスでは、ゲージ場がコンパクトに定義されているため、非自明なインデックスが、projective module を使わずに admissibility condition だけで定義できると期待される。そのインデックスは spectral flow method によって調べることができ、実際に、admissibility condition を満たし、かつ、非自明なインデックスを出すゲージ場の配位の存在が、数値的手法によって確かめられた [4]。この結果は、非自明なインデックスが非可換トーラス上で admissibility condition という物理的な条件のみで実現されていることを示している。今後の課題としては、例えば、ゲージ場の空間の位相的構造の分類、および、行列模型における自由度の reduction の問題、さらには時空のトポロジーを分類できるインデックスの構成などが挙げられる。なお、本稿で扱ったテーマ (行列模型または非可換幾何学と GW 関係式の融合) の overview としては、ref.[5] がある。

## 参考文献

[1] H. Aoki, S. Iso and K. Nagao, Phys. Rev. D **67**, 085005 (2003).

[2] T. Fujiwara, K. Nagao and H. Suzuki, JHEP **0209**, 025 (2002).

[3] S. Iso and K. Nagao, Prog. Theor. Phys. **109**, 1017 (2003).

[4] K. Nagao, work in progress.

[5] K. Nagao, hep-th/0309153, to appear in Nucl.Phys.Proc.Suppl. of Lattice 2003.

[1] 磯暁氏 (KEK) との共同研究に基づく。