Review of Dijkgraaf-Vafa Conjecture and Recent Progress

東京工業大学　大河内豊
E-mail: ookouchi@th.phys.titech.ac.jp

N=1 超対称ゲージ理論の一つの側面を、Matrix Model によって記述できることが、Dijkgraaf と Vafa によって示された。この 1 年でこの対応関係を通じて、ゲージ理論に対する一つの重要なポイント (カイラルリング) が明らかになり、ゲージ理論自身の深い理解に到達した。この講演では Dijkgraaf と Vafa によって提案された双対性を、背後にあったストリングデュアリティーから説明し、これまでに深められてゲージ理論の理解をレビューしたい。

1 Introduction

4 次元の $\mathcal{N}=1$ 超対称ゲージ理論は、超対称性からくる制限がそれほど強くないために、自然界を理解する上で重要な物理現象、電荷の閉じ込めや動的なカイラル対称性の破れ、そして、質量の動的な生成などを起こす理論である。一方で、超対称性を持つ理論には、正則性と呼ばれる制限が存在し、これにより摂動的な方法では得ることができなかった厳密な結果を得ることができる。こうした 2 つの側面を持ち合わせた 4 次元 $\mathcal{N}=1$ のゲージ理論は大変興味深く、より詳しい理解が求められている。

94 年ごろに Seiberg の一連の論文、及びその後に出た多くの重要な論文により、超対称ゲージ理論の非摂動的な側面の理解が非常に深まった。そこでは、正則性及び大域的な対称性を駆使し多くの厳密解が与えられた。

この Introduction では、まず Dijkgraaf-Vafa Conjecture が提案されるに至る背景となったストリングデュアリティー[1]について触れてみたい。基本的な精神は、ラージ N ゲージ理論をストリング理論で記述することができるという、トフーフトの考えに基ずいている。D ブレーン上で Yang-Mills 理論を構成することで、ストリング理論との双対性または、ゼロスロープ極限を取った gravity デュアルの実現が現実的なものとなった。マルダセナによって $\mathcal{N}=4$ の超対称性を持つ Yang-Mills 理論と ADS 空間の双対性が議論され、その後超対称性を下げる試みがなされてきた。Cachazo と Vafa による議論もこの精神を引き継いだものである。彼らの議論のすばらしいところは、Holomorphic Information を調べるには、実は具体的なメトリックを必要とせず、空間のトポロジーと RR-NSNS フラックスの情報のみでよいことを、浮き彫りにしたことであろう。それゆえ、非常に多くのモデルに対して、同じ処方箋で議論できたのである。その処方箋を簡単にまとめてみたい。

$4d$ $\mathcal{N}=1$ Yang-Mills 理論を TypeIIB ストリング理論における D ブレーン (3,5,7) 上の有効理論として実現する。$W_{tree}(\Phi)$ を含めるには、D5 ブレーンを局所的に Conifold に見えるジオメトリーを持ってきてその $\mathbf{S}^2$ に巻きつけることにより実現できる。ジオメトリーをしては、かなり広いものが許され $\mathcal{O}(-1)+\mathcal{O}(-1)$ や $\mathcal{O}(0)+\mathcal{O}(-2)$ などが議論されている [4]。こうして実現した Yang-Mills 理論に対応する古典重力のジオメトリーはすべて一つの処方箋で与えられる。それが『Geometric Transition』である。

- ブレーンのまきついている $\mathbf{S}^2$ を $\mathbf{S}^3$ と入れ替える。または、特異性の解消としてケーラー変形していたものを、複素変形に変えると言ってもよい。
- D ブレーンを古典重力で記述するために、RR フラックスを含めて考える。そのフラックスは $\mathbf{S}^3$ を貫くように入れる。これが、処方箋である。
- $\mathbf{S}^3$ の volume 積分をグルーボール場と同一視する。

[1] このデュアリティーについての包括的なレヴューとしては [1] がある。

ところが、[5] において明らかになったことは、実はこうした Holomorphic Information はラージ N でなくてもよいことである。真空は F-term によって与えられることを考えると、このことはゲージ理論の真空のモデュライをストリングデュアリティーなる崇高な概念をもとに、映し出しただけに過ぎない気もする。

最後に、最もシンプルで本質的なことは、すべて含まれていると思われるモデルのセッティングをしたい。以下ではこのモデルをメインに議論を進めることにする。

$$4 \text{ 次元 } \mathcal{N}=2 \text{ Super Yang-Mills} + W_{\rm tree}(\Phi), \qquad W_{\rm tree}(\Phi) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{g_k}{k} {\rm Tr}\Phi^k$$

古典的な真空は F-term 条件と D-term 条件によって与えられるが、それは次のように $W_{\rm tree}$ の critial point でパラメトライズされる。

$$\Phi_{cl} = {\rm diag}(a_1 \cdots a_1, a_2, \cdots a_2, \cdots, a_n, \cdots, a_n), \quad W'_{\rm tree}(a_k) = 0$$

この用に真空期待値を取ると、ゲージ群はブレイクし、そのうちの $SU(N_i)$ が confine するこで、最終的な量子論的に残っているゲージ群 $U(1)^n$ となる。

$$U(N) \to \prod_{i=1}^{n} U(N_i) \Rightarrow U(1)^n$$

このシンプルなモデルに対して Geometric Transition を適応すると得られる Geometry としては、以下のようである。

$$W'_{\rm tree}(x)^2 + y^2 + z^2 + w^2 + f_{n-1}(x) = 0 \tag{1}$$

しかしながら、(y,z,w) については球対称になっているので、実質的には一つの変数で置き換えてもよい。その結果現在では Matrix Model curve とか、$\mathcal{N}=1$ curve とか呼ばれるリーマン面が出てくる。

$$W'_{\rm tree}(x)^2 + y^2 + f_{n-1}(x) = 0 \tag{2}$$

このリーマン面には、コンパクトな Cycle とノンコンパクトな Cycle が存在し、それらを A_i, B_j と書くとその intersection は (A_i, B_j) ととる。この Cycle に対して以下の周期積分が定義できる。

$$\begin{aligned} S_i &= \oint_{A_i} y(x)dx, \quad \Pi_i = \oint_{B_i} y(x)dx = \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial S_i} \\ N_i &= \oint_{A_i} h(x)dx, \quad \tau_0 - ib_i = \oint_{B_i} h(x)dx \end{aligned}$$

$h(x)$ はフラックスからくる one-from である。

2 Dijkgraaf-Vafa Conjecture

ここでは Dijkgraaf-Vafa によって議論された行列模型とトポロジカル closed ストリング理論との関係に触れてみたい。前章で見たように、TypeIIB ストリングの枠内で

$$Z = \int d\Phi \, \exp\left[\frac{1}{g_s}{\rm Tr}W_{tree}(\Phi)\right] \sim \exp\left[\sum_g g^{2g-2}\mathcal{F}_g^{Mat}(S_i)\right] \tag{3}$$

$g_s \to 0, M_i \to \infty$ でトフーフトカップリング $S_i = g_s M_i$ をフィックスさせる。この Matrix Model がゲージ理論のある種の側面をうまく捕らえているのである。リゾルベント R_m を定義して、運動方程式を求めると、その形はまさに、Geometric Transition に現れたリーマン面そのものになっていることが分かる。

$$y^2 = W'_{\rm tree}(z)^2 + f_m(z), \qquad y \equiv W'_{\rm tree} - 2R_m.$$

非常に面白いことは、Matrix Model 立場で、このリーマン面のプレポテンシャルを解釈すると、それは Matrix Model のジーナスゼロの Free エネルギーといえることである。この議論が Dijkgraaf-Vafa の [6] によって議論された一部である。彼らの議論はもっと一般的で、まとめると以下のようである。

ジーナス g の **Closed topological amplitude** = ジーナス g の **Matrix Model Free energy**

この関係はトポロジカルなもので S_i はトフーフトカップリングの意味をもっている。また既に知られていた Gopakumar-Vafa によって議論されていた双対性の B-version ということもできる。Vafa はこのトポロジカルな対応関係を、Superstring 理論で使うことで、4 次元 $\mathcal{N} = 1$ Super Yang-Mills に対して興味深い議論をしている。ストリング理論でこの関係を使うには、ある種トポロジカルツイストの逆バージョン見たいな操作がひつようである。それがトフーフトカップリング S_i をダイナミカルなグルーボール場と同一視する操作である。この操作に対して彼らは、スーパーストリングに埋め込むといっているわけである。

これまで [28, 18] などの議論により、ジーナスが 2 以上の free energy は重力のコレクションに相当することが分かっており、それ以下の Free energy を用いると、ゲージ理論の有効ポテンシャルが以下のように表せることが明らかになっている。

$$W_{\mathbf{eff}} = \sum_{i=1}^{n} N_i \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial S_i} + \tau S_i + 4\mathcal{G}_{RP^2} + \mathcal{F}_{boundary}$$

3 CDSW Evolution

これまで、ある種のリーマン面が Geometric trainsition や Matrix Model に存在し、その類似性から、デュアリティーを議論してきた。それでは、この構造は、Yang-Mills 理論自身で理解することはできないのであろうか？この問いに対して答えたのが [13] の仕事である。彼らは、カイラルリングの構造に注目すれば、ゲージ理論自身でこれまでの、結果を理解できることを示した。カイラルリングとは、カイラルオペレーター (以下の定義) の集合が和と積で閉じていることによる。

$$\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \mathcal{O}(x)\} = 0$$

このカイラルリングには、二つの重要な性質がある。一つは、同一視、もう一つはクラスター decomposition と呼ばれるものである。これらの性質を考慮すれば、カイラルリングで特徴付けられる、ゲージ理論のセクターはいくつかの generating function で与えられる。

$$\begin{aligned} T(z) &= \mathrm{Tr}\frac{1}{z-\Phi}, \quad w_\alpha(z) = \mathrm{Tr}\frac{W_\alpha}{z-\Phi} \\ R(z) &= -\frac{1}{32\pi^2}\mathrm{Tr}\frac{WW}{z-\Phi} \end{aligned}$$

こうした、カイラルリングの構造に対して、条件を小西アノマリー方程式から与えることができる。彼らは普通の小西アノマリー変換をカイラルリングに格上げすることで、一般化した小西ア

ノマリー方程式を用いている。

$$\bar{D}^2 J_f = \mathrm{Tr}[f(\Phi, W)\frac{\partial W_{tree}}{\partial \Phi}] + \frac{1}{32\pi^2}\sum_{ij}[W_\alpha, [W, \frac{\partial f}{\partial \Phi_{ij}}]]_{ij} \tag{4}$$

この一般的な小西アノマリー方程式の解に、これまで見てきたリーマン面が現れるのである。

$$2R(z) = W'_{tree}(z) - \sqrt{W'^2 + f_{n-1}} \tag{5}$$

$$T(z) = \mathrm{y(z)}\text{の関数で無限円に留数}\ \pm N\ \text{のシンプルポールをもつ} \tag{6}$$

ここで新たな変数 $y(z) = 2R(z) - W'_{tree}$ を導入した。またこの結果を用いてリーマン面上での積分を見てやるとそれはこれまで Vafa の Identification として考えてきた対応関係そのものを導いている。

$$\oint_{A_i} y(z)dz = \oint_{A_i} \frac{WW}{z-\Phi} = S_i \tag{7}$$

$$\oint_{A_i} T(z)dz = \oint_{A_i} \frac{1}{z-\Phi} = N_i \tag{8}$$

こうしたことから、これまで議論されてきた Geometric Transtion 及び、Matrix Model との双対性などが、整然と理解され、ゲージ理論の深い理解に到達した。その後の発展として重要なことは、これまでは、主に $\mathcal{N} = 2$ の理論を W_{tree} で defrom したような理論が議論されてきたが、CSWD の議論は、一般の $\mathcal{N} = 1$ の理論に適応でき、これを用いるこで、ゲージ理論の新たな理解が深まっている。これは今なお続いている。

4 まとめ

今回残念ながら紹介できなかった、非常に興味深い論文がたくさん出ている [9]-[37]。その中には、マトリックモデル自身の拡張によるものやゲージ群の拡張、そして、高次のジーナスからの寄与などが含まれている。

参考文献

[1] 大河内豊, 'N=1 超対称ゲージ理論の gravity デュアル'
[http://www.th.phys.titech.ac.jp/ ookouchi/soken.ps]

[2] F. Cachazo, K. A. Intriligator and C. Vafa, Nucl. Phys. B **603**, 3 (2001) [arXiv:hep-th/0103067].

[3] F. Cachazo, S. Katz and C. Vafa, arXiv:hep-th/0108120.

[4] F. Cachazo, B. Fiol, K. A. Intriligator, S. Katz and C. Vafa, Nucl. Phys. B **628**, 3 (2002) [arXiv:hep-th/0110028].

[5] F. Cachazo and C. Vafa, arXiv:hep-th/0206017.

[6] R. Dijkgraaf and C. Vafa, Nucl. Phys. B **644**, 3 (2002) [arXiv:hep-th/0206255].

[7] R. Dijkgraaf and C. Vafa, Nucl. Phys. B **644**, 21 (2002) [arXiv:hep-th/0207106].

[8] R. Dijkgraaf and C. Vafa, arXiv:hep-th/0208048.

[9] H. Fuji and Y. Ookouchi, JHEP **0212**, 067 (2002) [arXiv:hep-th/0210148].

[10] R. Dijkgraaf, S. Gukov, V. A. Kazakov and C. Vafa, Phys. Rev. D **68**, 045007 (2003) [arXiv:hep-th/0210238].

[11] R. Dijkgraaf, M. T. Grisaru, C. S. Lam, C. Vafa and D. Zanon, arXiv:hep-th/0211017.

[12] F. Ferrari, Phys. Rev. D **67**, 085013 (2003) [arXiv:hep-th/0211069].

[13] F. Cachazo, M. R. Douglas, N. Seiberg and E. Witten, JHEP **0212**, 071 (2002) [arXiv:hep-th/0211170].

[14] Y. Tachikawa, arXiv:hep-th/0211189.

[15] S. G. Naculich, H. J. Schnitzer and N. Wyllard, JHEP **0301**, 015 (2003) [arXiv:hep-th/0211254].

[16] H. Ita, H. Nieder and Y. Oz, JHEP **0301**, 018 (2003) [arXiv:hep-th/0211261].

[17] Y. Tachikawa, arXiv:hep-th/0211274.

[18] Y. Ookouchi, arXiv:hep-th/0211287.

[19] S. K. Ashok, R. Corrado, N. Halmagyi, K. D. Kennaway and C. Romelsberger, Phys. Rev. D **67**, 086004 (2003) [arXiv:hep-th/0211291].

[20] B. Feng, Nucl. Phys. B **661**, 113 (2003) [arXiv:hep-th/0212010].

[21] K. Ohta, JHEP **0302**, 057 (2003) [arXiv:hep-th/0212025].

[22] H. Itoyama and A. Morozov, Prog. Theor. Phys. **109**, 433 (2003) [arXiv:hep-th/0212032].

[23] H. Suzuki, JHEP **0303**, 036 (2003) [arXiv:hep-th/0212121].

[24] N. Seiberg, JHEP **0301**, 061 (2003) [arXiv:hep-th/0212225].

[25] F. Cachazo, N. Seiberg and E. Witten, JHEP **0302**, 042 (2003) [arXiv:hep-th/0301006].

[26] H. Itoyama and A. Morozov, arXiv:hep-th/0301136.

[27] F. Ferrari, Phys. Lett. B **557**, 290 (2003) [arXiv:hep-th/0301157].

[28] Y. Ookouchi and Y. Watabiki, Mod. Phys. Lett. A **18**, 1113 (2003) [arXiv:hep-th/0301226].

[29] A. Brandhuber, H. Ita, H. Nieder, Y. Oz and C. Romelsberger, arXiv:hep-th/0303001.

[30] V. Balasubramanian, B. Feng, M. x. Huang and A. Naqvi, arXiv:hep-th/0303065.

[31] P. Kraus and M. Shigemori, JHEP **0304**, 052 (2003) [arXiv:hep-th/0303104].

[32] F. Cachazo, N. Seiberg and E. Witten, JHEP **0304**, 018 (2003) [arXiv:hep-th/0303207].

[33] L. F. Alday and M. Cirafici, JHEP **0305**, 041 (2003) [arXiv:hep-th/0304119].

[34] H. Kawai, T. Kuroki and T. Morita, Nucl. Phys. B **664**, 185 (2003) [arXiv:hep-th/0303210].

[35] H. Itoyama and H. Kanno, arXiv:hep-th/0304184.

[36] M. Aganagic, K. Intriligator, C. Vafa and N. P. Warner, arXiv:hep-th/0304271.

[37] T. Eguchi and Y. Sugawara, JHEP **0305**, 063 (2003) [arXiv:hep-th/0305050].