Correlation functions and emptiness formation probabilities in the XYZ antiferromagnet

鈴鹿医療科学大学 臨床工学科　桑野泰宏
E-mail: quanoy@suzuka-u.ac.jp

$P(n)$ を EFP(Emptiness Formation Probability)[1], すなわち, スピン鎖模型の反強磁性境界条件において, サイト 1 から n まで連続して spin up である確率とする. Boos らは, $n \leqslant 6$ に対して XXX 模型の場合に $P(n)$ を計算した結果, $P(n)$ は $\log 2, \zeta(3), \zeta(5), \cdots, \zeta(2n-3)$ の有理係数多項式として表せるという予想を得た [1][2]. さらに, XXX, XXZ 模型における $P(n)$ の $n \to \infty$ における振る舞いが Gaussian decay であるなど, 長距離相関の情報 (の一部) が調べられている [1, 2].

本講演では反強磁性 XYZ スピン鎖模型に対して, 前段の考察を拡張する. その準備として, n 点函数 $Z_n^{(i)}(\zeta_1, \cdots, \zeta_n) = \langle \sigma_1^z \cdots \sigma_n^z \rangle_i(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ の積分表示を次のようにして構成する. XYZ 模型のブートストラップ方程式 [3] により, $Z_n^{(i)}$ は $\zeta_1, \cdots, \zeta_n$ について対称で, 漸化式

$$Z_n^{(i)}(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)|_{\zeta_n = x^{\pm 1}\zeta_{n-1}} = -Z_{n-2}^{(i)}(\zeta_1, \cdots, \zeta_{n-2})$$

を満たす. また, 理論に含まれるパラメータ $r = 2$ のとき Ising case に帰着し, XXZ 極限や massless 極限などが既知の結果と一致するように, n 点函数の積分表示を構成する.

$$\begin{aligned} Z_n^{(i)}(\zeta_1, \cdots, \zeta_n) &= c_n \prod_{j<k} \Theta_{x^2}\left(\frac{z_j}{z_k}\right) \frac{\{u_{jk}\}}{[u_{jk}]} \prod_{a=1}^{n} \oint \frac{dw_a}{2\pi \mathrm{i} w_a} \Theta_{x^2}\left((-)^{n-1} \frac{z_1 \cdots z_n}{w_1 \cdots w_n}\right) \\ &\times \prod_{a<b} \Theta_{x^2}\left(\frac{w_a}{w_b}\right) \frac{\{v_{ab}-1\}}{[v_{ab}-1]} \prod_{a,j} \Theta_{x^2}\left(\frac{z_j}{w_a}\right)^{-1} \prod_{a>j} \frac{[v_a - u_j]}{\{v_a - u_j\}} \prod_{a<j} \frac{[v_a - u_j - 1]}{\{v_a - u_j - 1\}}. \end{aligned} \tag{1}$$

ここで, $\zeta_j = x^{-u_j}$, $v_a = x^{-2w_a}$, $u_{jk} = u_j - u_k$, $v_{ab} = v_a - v_b$,

$$[u] = x^{\frac{u^2}{r}-u}\Theta_{x^{2r}}(x^{2u}), \qquad \{u\} = x^{\frac{u^2}{r}-u}\Theta_{x^{2r}}(-x^{2u}),$$

$$\Theta_p(z) = (z;p)_\infty (pz^{-1};p)_\infty (p,p)_\infty, \qquad (a;p_1,\cdots,p_n)_\infty = \prod_{k_i \geqslant 0} (1 - a p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}).$$

参考文献

[1] Boos H E, Korepin V E, Nishiyama Y and Shiroishi M: Quantum correlations and number theory, *J. Phys. A: Math Gen* **35** (2002) 4443–4452.

[2] Kitanine N, Maillet J M, Slavnov N A and Terras V: Large distance asymptotic behavior of the emptiness formation probability of the XXZ spin-1/2 Heisenberg chain, *J. Phys. A: Math Gen* **35** (2002) L753-L758.

[3] Quano Y.-H: Bootstrap equations and correlation functions for the Heisenberg XYZ antiferromagnet, *J. Phys. A: Math Gen 35* (2002) 9549–9572.

[1] 拙訳: 連続不倒確率

[2] この予想は, 電子の異常磁気能率の摂動展開を思い起こさせる. たとえば, 中西襄「場の量子論」(培風館) の p294 (11) 式を見よ. 摂動展開の 4 次の項が $f_2^{(4)}(\alpha/\pi)^2$(ただし, $f_2^{(4)}$ は $\log 2, \zeta(2) = \pi^2/6, \zeta(3)$ の有理係数多項式) の形に書けている.