N.C. Cohomological Field Theory and Matrix model

慶應義塾大学理工学部　佐古　彰史
E-mail: sako@math.keio.ac.jp

非可換空間のトポロジーを場の理論で解析することを目標として非可換空間上の位相的場の理論について論じる。ただしここで言うトポロジーは厳密な意味でのトポロジーよりやや弱い意味で使う。非可換空間のトポロジーは代数的 K 理論で分類されるわけであるが、例えば非可換トーラスの非可換パラメータの無限小変換で K_0 のランクが変わるなど、直観とはなじまない敏感さを持ったものになっている。従来の解析から、可換な場合の位相不変量を自然に非可換空間に拡張したものは依然として整数値を与える場合が多く、そういった (ナイーブな可換空間のトポロジーを変形量子化後も引きずった) 意味での「トポロジー」について論じる。それは行列模型のトポロジーを分析することに等しい。非可換空間上の位相的場の理論は特に非可換パラメータのシフトで不変な理論であることを利用することで解析が容易になることがある。さらに、非可換空間のトポロジーの解析にはすでに確立されている K 理論との関係を議論する。

Cohomological Field Theory (CohFT) が非可換パラメータの変形に依らないことは既に示した。また、変数変換との組み合わせにより微分項を落とすことが、強非可換極限に対応することもわかる。また、非可換空間の場の理論は、ヒルベルト空間の無限次元ベクトルの線形変換行列を力学変数とする行列模型とみなすことができる。従って CohFT の強非可換極限は微分項のない単純な行列模型となる。そういった理論の具体例を構築し、モヤル平面の場合にその分配関数も計算した。具体例とは以下のようなものを考える。非可換幾何における最も重要な作用素のひとつは、代数的 K_0 の構成からもわかるように、射影演算子だ。そこで具体的なモデルとして、射影演算子の全体からなる空間のオイラー数を足し上げるものが分配関数として与えられる CohFT を構築する。(CohFT は一般にある方程式の解の空間上のあるベクトル束のオイラー数の足し上げを分配関数に持つ) 特に射影演算子のランクが自然数で与えられるような場合 (例えばモヤル平面) では、グラスマン多様体のオイラー数の足し上げが分配関数として与えられ、それらの結果が得られた。こういった量は、K 群より弱い分類を与える位相不変量であり、実際、モヤル平面や非可換トーラスの場合にこうして得られた位相不変量は K_0 が変わらない変形のもとでは不変であることが観察される。

またゲージ対称性を持った非可換空間上の CohFT は、非可換パラメータの変形で理論が不変かどうかは非自明な問題であるが、今回それが不変であることが示された。その結果、以下のような様々な事実が判明、もしくは従来にない非可換空間の変形の見地からの再確認がされた。 N.C. Cohom. Yang-Mills Theory on 10-dim Moyal space と IKKT 行列模型の分配関数は等しい。(非摂動的な効果を含めて) さらに 2,4,6,8 次元などに dimensional reduction したものとも等価 N=4 の Vafa-Witten theory と関係する非可換の場合には $U(1)$ インスタントンの存在がケーラー多様体上でも予想される。これは、Vafa-Witten theory の成立条件である Vanishing Theorem が成立しないことを意味する。その結果 Moore-Nekrasov-Shatashvili との比較で Vanishing Theorem が成立しない部分の分配関数の寄与が求まる。 N.C. Cohomological Yang-Mills Theory on 4-dim Moyal space で ADHM Matrix model との対応が $D_{-1} - D_3$ 双対性を経由することなく理解される可能性がある (現在調査中)。

最後に、上述の分配関数の計算などは行列模型の分配関数を幾何学的な情報からだけ求めることができた初めての例になっているとともに、行列模型のモジュライ空間の幾何学を厳密に捉えている例にもなっていることを注意する。