Non-Abelian Statistics of Axion Strings

東京大学 物性研究所　佐藤　昌利
E-mail: msato@issp.u-tokyo.ac.jp

soliton(vortex、monopole、skyrmion、など) は、非自明な topology を持ち、その統計性は多様な形で現れる。ここでは、soliton に束縛された fermion zero mode による新しい統計性を紹介する。

模型として、complex scalar 場 ϕ と Majorana fermion $\psi_{\rm M}$ から成り、axial U(1) 対称性を持つ系を考える。場 ϕ が真空期待値を持ち、axial U(1) 対称性が自発的に破れた場合、homotopy

fileds	axial U(1)charge
$\psi_{\rm M}$	1
ϕ	2

表 1: axial U(1)charge

$\Pi_1({\rm U}(1)) = \mathbf{Z}$ に基づく安定な vortex(axion string) が作られる。

z 方向にまっすぐ伸びた axion string が $x = X_i (i = 1, \cdots, n)$ に n 個ある場合を考え、その状態を $|X_1, X_2, \cdots, X_n\rangle$ とする。この時、各 string あたり 1 個づつ fermionic zero mode $u_0^{(i)} (i = 1, \cdots, n)$ が存在する。量子化するために、$\psi_{\rm M}$ をモード展開すると、$\psi_{\rm M}$ が Majorana であることから、zero mode の係数 $c_0^{(i)}$ は hermite となり、その交換関係は SO(n) の Clifford 代数 $\{c_0^{(i)}, c_0^{(j)}\} = \delta^{i,j}$ となる。よって、$c_0^{(i)}$ の作用する状態 $|X_1, X_2, \cdots, X_n\rangle$ は、SO(n) の spinor 表現となる。SO(n) の spinor 表現を作るには、$d_0^{(I)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_0^{(2I-1)} + ic_0^{(2I)})$ の様に、異なる 2 つの string の zero mode を使って消滅演算子をつくり、$d_0^{(I)}|X_1, X_2, \cdots, X_n\rangle = 0$ を課せば良い。この場合、消滅演算子はどのように作っても良いが、かならず異なる string 上の zero mode の係数の組み合せで作られ、非局所的になる。この非局所性 (と holonomy) により、非自明な統計性が現れる事になる [1]。

z 方向にまっすぐ伸びた string は、z 依存性を完全に無視すると、1+2 次元での点粒子と見なすことができ、string の統計性は、1+2 次元の点粒子の統計性 (=braid group の表現) と見なすことができる。実際、今考えている axion string の統計性は braid group の表現 (その中でも特に non-abelian な表現) となっている。

今までは、まっすぐな string だけを考えてきたが、closed string の場合にも不思議な性質が現れる。例えば、2 つの closed string を交換させる時、一方を他方にくぐらせてから交換させると、boson、 fermion や anyon とは全く異なった non-abelian 的な振る舞いをすることが分かる。

ここで述べた統計性を、string だけでなく、monopole など他の soliton へ拡張することは可能であろうか？　一般に空間が 3 次元以上の場合、理論に locality を要請すると、boson と fermion の 2 つの統計性しかないことが知られている。しかし、soliton がある場合、locality は厳密には成り立っていないかもしれない。また、soliton に束縛された fermionic zero mode が現れることは、string に特徴的な事ではなく、soliton 一般に起こる事である。そういった意味では、他の soliton でもここで議論した統計性が見られても不思議ではないかもしれない。

参考文献

[1] M. Sato, "Non-Abelian Statistics of Axion Strings", hep-th/0307005.