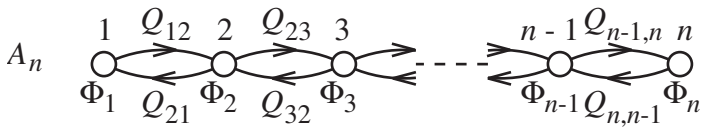
Comments on quiver gauge theories and matrix models

理化学研究所 理論物理学研究室　関 穣慶
E-mail: seki@postman.riken.go.jp

最近, Dijkgraaf と Vafa によって, $\mathcal{N}=1$ ゲージ理論と行列模型と位相的弦理論の対応関係が指摘された [1]. そこで, この講演では $\mathcal{N}=1$ quiver ゲージ理論に注目し, それに対応すると考えられるマルチ行列模型を解析する [2]. まず, A_n quiver について考えよう. 次の図 (A_n quiver diagram) のように, 各 node と link に場を定義する.



Φ_i は $SU(N_i)$ の adjoint 表現の chiral superfield で, Q_{ij} は $SU(N_i)\times SU(N_j)$ の $(N_i,\bar{N}_j)$ bifundamental 表現の matter を表す. A_n quiver ゲージ理論の tree level の superpotential は

$$W(\Phi,Q)=\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{Tr}(Q_{i,i+1}\Phi_{i+1}Q_{i+1,i}-Q_{i+1,i}\Phi_iQ_{i,i+1})+\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Tr}W_i(\Phi_i)$$

で与えられる. $W_i(\Phi_i)$ は Φ_i の多項式である. そこで, Φ_i を $N_i\times N_i$ 行列, Q_{ij} を $N_i\times N_j$ 行列とすると, A_n マルチ行列模型の分配関数は

$$Z=\int d\Phi dQ\exp\left(-\frac{1}{g_s}W(\Phi,Q)\right)=\int\prod_{i,I}d\lambda_{i,I}\frac{\prod_{i,I<J}(\lambda_{i,I}-\lambda_{i,J})^2}{\prod_{i,I,J}(\lambda_{i,I}-\lambda_{i+1,J})}\exp\left(-\frac{1}{g_s}\sum_{i,I}W_i(\lambda_{i,I})\right)$$

となる. $\lambda_{i,I}$ $(I=1,\cdots,N_i)$ は Φ_i の固有値である. $Z=\int d\lambda_{i,I}\exp\left(-\hat{S}\right)$ なる有効作用 $\hat{S}$ から, $\lambda_{i,I}$ $(i=2,\cdots,n-1)$ に対する運動方程式を求めると,

$$\frac{1}{g_s}W_i'(\lambda_{i,I})-2\sum_{J=1,J\neq I}^{N_i}\frac{1}{\lambda_{i,I}-\lambda_{i,J}}+\sum_{J=1}^{N_{i-1}}\frac{1}{\lambda_{i,I}-\lambda_{i-1,J}}+\sum_{J=1}^{N_{i+1}}\frac{1}{\lambda_{i,I}-\lambda_{i+1,J}}=0$$

を得る. $\lambda_{1,I},\lambda_{n,I}$ に対しても同様に運動方程式が求まる. ここで, resolvent $\omega_i(x)\equiv\frac{1}{N_i}\sum_{I=1}^{N_i}\frac{1}{x-\lambda_{i,I}}$ と't Hooft coupling $S_i\equiv g_sN_i$ を導入しておこう. これらの運動方程式から, 次のような 1-form $y_i(x)dx$ $(i=1,\cdots,n)$ を読みとることができる.

$$y_i(x)=W_i'(x)-2S_i\omega_i(x)+S_{i-1}\omega_{i-1}(x)+S_{i+1}\omega_{i+1}(x)\quad(\text{ただし},\omega_0=\omega_{n+1}=0\text{ とする})\quad(1)$$

一方, A_n 特異点を持つ ALE 空間は $u^2+v^2+\prod_{i=1}^{n+1}(y-t_i(x))=0,\quad\sum_{i=1}^{n+1}t_i=0$ で定義され, t_i は特異点の deformation を表すパラメータである. この時, meromorphic 1-form $y_i(x)dx$ が

$$y_i(x)=t_{i+1}(x)-t_i(x)\qquad(2)$$

で与えられる. すると, Eq.(1) と Eq.(2) を同一視することができて, 行列模型から, A_n 特異点のあるべき deformation を導くことができた.

Eq.(1) を用いることで, quiver ゲージ理論の有効 superpotential を近似的に評価することができる. また, ここでは A_n 型について説明したが, D_n,E_n 型についても同様に解析できる [2].

References

[1] R. Dijkgraaf and C. Vafa, Nucl. Phys. B644 (2002) 3; Nucl. Phys. B644 (2002) 21; hep-th/0208048.

[2] S. Seki, Nucl. Phys. B661 (2003) 257, hep-th/0212079.