非臨界弦の非摂動効果

石橋　延幸　（筑波大）
E-mail: ishibash@het.ph.tsukuba.ac.jp

非臨界弦の非摂動効果について最近わかってきたことを概観する。

1　はじめに

超弦理論の研究はいまや非常に多様になっており、研究の対象によって使う手法も様々である。ただ強引に分ければ、弦理論を研究するときに使う手法は次の 3 種類のうちのどれかに入ると言えるであろう。

1. worldsheet theory: 弦の第一量子化で現れる世界面上の共形場の理論を研究する手法であり、ある意味もっとも信用できる手法である。
2. string field theory: 弦の場を研究する手法であり、この手法を使わなければ答えられない問題がある。
3. D-brane: 弦そのものではなく、弦理論に現れるソリトン解である D-brane やそれに関係した対象を研究する。

もちろん、この 3 種類にきれいに分類できるわけではなく、D-brane を研究するために worldsheet theory や string field theory を研究することもある。いずれにせよ、手法がこれほど多様になってきたので、これら全てを導き出せるような定式化があったらいいと多くの人が考えている。

そのような定式化として昔から考えられてきたのが弦の場の理論である。worldsheet theory は弦の第一量子化に対応するのであるから、点粒子の場合と同じであるとすれば、これを第二量子化して弦の場の理論を作れば「弦理論」は完成するはずである。弦の場の理論では、弦の配位 $X(\sigma)$ の汎関数 $\Psi[X(\sigma)]$ として弦の場を定義し、それらの作用を作って経路積分量子化しようと考える。弦理論のゲージ不変性が明白な理論を closed string の場合に作ろうと多くの人たちが努力してきたが、その結果得られる古典作用は模式的に書けば次のような形になる:

$$S[\Psi]=\frac{1}{g_s^2}\int(\Psi K\Psi+\Psi^3+\Psi^4+\cdots). \tag{1}$$

つまり、無限個の相互作用項が必要であり、量子論に行くとそれらがさらに補正される。この点はある意味自然なことである。というのは、この作用は一般相対論におけるアインシュタイン・ヒルベルト作用を

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+\kappa h_{\mu\nu}, \tag{2}$$

のように平坦な計量 $\eta_{\mu\nu}$ の周りの揺らぎで展開したものの string 版であり、揺らぎ $h_{\mu\nu}$ に対応するのが弦の場 $\Psi[X(\sigma)]$ であるからである。アインシュタイン・ヒルベルト作用はスカラー曲率を使ってコンパクトに書けるが、$h_{\mu\nu}$ で書くと無限個の相互作用項を含む非常に複雑な形になる。この類似性を真面目に考えれば、我々がやるべきことは、弦の場の無限個の相互作用をまとめる原理・対称性を見つけると言うことになる。一般相対論の場合は等価原理から導き出される時空は曲がっているという描像、あるいは一般座標不変性と言う対称性から、計量と言う理論を記述するのに最も適した自由度を見つけ出すことができた。従って、同様の論理を弦理論の場合に見つ

けてやれば、弦の場の理論の作用をうまく書くことができ、弦理論の定式化を完成させることができるかもしれない。

ここまでの議論は弦の場の理論は点粒子の場の理論に比べて複雑ではあるが質的にはあまり違わないと言う仮定のもとで進めてきた。ところが、弦の場の理論は点粒子の場合の単純な拡張ではなく、質的に違うのではないかと考えられる兆候がある。そのひとつが弦の非摂動効果である。Eq.(1) の作用は全体に $\frac{1}{g_s^2}$ がついている。これはもちろん古典作用であるからであり、g_s は弦の結合定数である。これまでの研究で、closed string 理論の非摂動効果はこの g_s を使って $\exp(-C/g_s)$ の形になるだろうということがわかってきた。この事実を弦の場の理論からどのように解釈したらよいのかというのが本稿で考えたい問題である。

2 弦理論の非摂動効果

弦理論の非摂動効果が $\exp(-C/g_s)$ の形になるという最も直接的な証拠は非臨界弦の理論の解析からもたらされる。非臨界弦とは 1 次元以下の時空で定義された string 理論であり、行列模型の手法を使って厳密に解ける模型である。例えば、この理論の分配関数は

$$F(g_s^2) = \sum_{n=-1}^{\infty} C_n g_s^{2n}, \tag{3}$$

という g_s に関する漸近級数の形で求まっており、係数 C_n を n が小さいほうから順番に厳密に求める方法が知られている。このような量に対する非摂動効果の形は C_n の $n \to \infty$ における振る舞いから求めることができる。一般に

$$C_n \sim (2n)! C^{-2n} \ (n \to \infty), \tag{4}$$

となるので、このことから（最も dominant な）非摂動効果は $\exp(-C/g_s)$ の形になることがわかる。[1]

点粒子の理論の場合、

$$\frac{1}{g^2} S(\phi) \tag{5}$$

の形の作用から、経路積分量子化して様々な物理量 F を $F(g^2) = \sum_{n=-1}^{\infty} C_n g^{2n}$ のように 結合定数 g で漸近展開すると係数 C_n は

$$C_n \sim (n)! C^{-2n} \ (n \to \infty), \tag{6}$$

のように振舞う。この振る舞いは非摂動効果の形 $\exp(-C/g^2)$ に対応する。

点粒子の場合と string の場合の最も本質的な違いは C_n が $n!$ に比例するか $(2n)!$ に比例するかという点である。点粒子の場合この $n!$ は n ループのファインマンダイアグラムの数が n が大きいとき大体 $n!$ のように増えていくという事実に起源を持つと考えられている。string の場合、このファインマンダイアグラムの数に対応するものは genus n のリーマン面のモジュライ空間の体積になると考えられるが、この量の n が大きいときの漸近的振る舞いは $(2n)!$ であることがわかるので上の結果と consistent である。もし、一般の string 理論の摂動展開の係数の漸近的振る舞いがこのモジュライ空間の体積から決まるとすれば、string 理論の非摂動効果は一般に $\exp(-C/g_s)$ の形になると言うことになる。

弦理論における $\exp(-C/g_s)$ の形の非摂動効果を support するもうひとつの議論として、D-instanton を使ったものがある。点粒子の理論の場合、$\exp(-C/g^2)$ の形の非摂動効果は場の理論

の古典解の寄与に同定できる場合がある。string 理論の場合、このような古典解に当たるものとして D-instanton を考えることができる。instanton 解の寄与は、解の古典作用 S_{cl} を使って、

$$e^{-S_{cl}}, \tag{7}$$

の形になるが、D-instanton の場合 S_{cl} は disk amplitude になるので、C/g_s の形になり、string 理論の非摂動効果の形と一致する。[2]

というわけで、弦理論の非摂動効果が $\exp(-C/g_s)$ の形になるであろうということは様々な議論により support されているだけでなく、点粒子と string の違いを端的に表わす事実のひとつになっている。

3　弦の場の理論

上記の弦の非摂動効果の振る舞いを弦の場の理論の立場から考えると、いろいろわからないことが出てくる。点粒子の場合には $\exp(-C/g^2)$ の形の非摂動効果は古典解の寄与に同定できる場合があった。ところが、弦の理論の場合も同様に弦の場の理論の古典解の寄与を考えると作用の形 eq.(1) から $\exp(-C/g_s^2)$ の形の寄与になることはすぐにわかる。もちろんこのような形の寄与もあるのであろうが、g_s が小さいときには $\exp(-C/g_s)$ の形の非摂動効果の方が dominant である。従って、素直に考えれば、$\exp(-C/g_s)$ の形の非摂動効果は弦の場の理論の古典解によるものとは考えられない。

ところが上に述べたように、$\exp(-C/g_s)$ の形の非摂動効果は D-instanton という「古典解」の寄与と考えられているのである。従って、このように考えていくと、そもそも「 D-brane は closed string field theory の古典解なのだろうか？」と言うことを考えなければならなくなる。

D-brane は string 理論のソリトン解であると考えられている。しかし、D-brane が closed string の場の理論の古典解なのかどうかはよくわからない。この問いは string 理論がそもそもどのように定式化されるべきかという問題と密接に関連している。例えば、 Sen によって示されたように、D-brane は open string の場の理論の古典解として考えることができる。 D-brane が弦の非摂動効果において大きな役割を果たすことは間違いの無いことであるので、closed string の理論はその背後に隠れている open string の自由度を使って記述されるべきだとする考え方もある。 closed string の場の理論をきちんと作れば、その古典解として D-brane が現れるのか、あるいは closed string を基本的自由度として理論を作るべきではなく、 open string あるいは行列、ゲージ理論を基本とするべきなのか、という問題は弦理論をどのように定式化すべきかということを考えるとき、非常に重要な問題になる。

4　非臨界弦の非摂動効果

このような問題は、もちろん誰でも認識していた問題であろうが、考える手段があまりなく、横においておいた問題であろう。しかし、いまやこのような問題を考える恰好のおもちゃの模型が存在する。それが非臨界弦である。非臨界弦の理論は約 15 年前から活発に研究されてきた。ここ数年の発展によって、臨界弦を研究する際に有効な方法がほぼ全て非臨界弦の場合にも使えるようになってきたのである。すなわち、冒頭で述べた 3 種類の手法が非臨界弦の場合にも有効に使えるようになった：

1. worldsheet theory: この場合 Liouville theory + CFT 。

2. string field theory: loop equation と呼ばれる方程式が立てられており string field theory を与えるものと考えることができる。

3. D-brane: 非臨界弦の理論における D-brane とは何かがわかってきて、行列模型との関係も明らかになってきた。

非臨界弦の理論は自由度が非常に少ないので、臨界弦に比べて簡単であり、非摂動効果に関わる上記の問題を考察することができるはずである。最も簡単な $c=0$ の臨界弦の場合にどうなるか議論してみよう。[3]

$c=0$ の非臨界弦は 1-matrix model で記述することができる。例えば、$c=0$ の非臨界弦の分配関数は次のような行列積分を実行することで計算できる：

$$\int dM e^{-NTrV(M)}. \tag{8}$$

ここで、M は $N\times N$ のエルミート行列であり、$V(M)$ としては例えば $\frac{1}{g^2}(\frac{1}{2}M^2-\frac{1}{3}M^3)$ をとればよい。$g\to g_c$, $N\to\infty$ の極限をうまくとってやれば worldsheet 上の cosmological constant μ, string coupling g_s を持った $c=0$ の弦理論の分配関数を得ることができる。

この場合、弦理論の非摂動効果は行列模型の立場からは次のように理解できる。行列 M のひとつの固有値 ζ に注目してみる。ζ の振る舞いを見るために、行列積分 eq.(8) において 1 個の固有値を ζ に止めておき、それ以外の成分の積分を先にやってしまった後に ζ 積分をすることを考える。g_s が小さいという近似で、この ζ 積分は次のような形になる：

$$\begin{aligned}&\int d\zeta e^{-V_{eff}(\zeta)},\\&V_{eff}(\zeta)\propto -\frac{1}{g_s}\mathrm{Re}(\zeta-\frac{3}{2}\sqrt{\mu})(\zeta+\sqrt{\mu})^{1/2}.\end{aligned} \tag{9}$$

従って、g_s が小さいとき、ζ は V_{eff} という形のポテンシャルの中で安定な領域 $\zeta<-\sqrt{\mu}$ に分布することになる。ところが、V_{eff} には不安定な停留点 $\zeta=\frac{1}{2}\sqrt{\mu}$ が存在し、ζ がその点にいる配位が弦の非摂動効果を与える。実際、上の積分の形から明らかなようにそのような配位の効果は $\exp(-C/g_s)$ の形をしている。C の具体的な値はほかの解析から期待される非摂動効果のそれと一致する。

さて、このような非摂動効果は D-instanton の寄与で説明できると期待される。従って、ここで出てきた行列の配位は何らかの形で D-instanton と関係しているはずである。実際そのような関係を示すことができる。非臨界弦の場合、Liouville 方向の境界条件の違う ZZ-brane と FZZT-brane の 2 種類の D-brane が知られている。$c=0$ の場合、ZZ-brane が D-instanton に対応しているはずである。また、上記のように行列のひとつの固有値に注目し、その値 ζ を固定することは実は FZZT-brane に対応する境界条件を持った境界を世界面にあけることになる。 ZZ-brane の boundary state は FZZT-brane の boundary state のパラメタを解析接続した形で得ることができるのだが、それはちょうど ζ を上記の配位の値 $\zeta=\frac{1}{2}\sqrt{\mu}$ に置くことに対応している。従って、非臨界弦の場合には非摂動効果と D-instanton の寄与との関係を直接的に示すことができるのである。

それでは、この D-instanton は closed string field theory の古典解と考えられるのであろうか？ $c=0$ の臨界弦の場合、 closed string の configuration を記述するパラメタはその長さ l しかないので、 closed string field は $\psi(l)$ と l の関数になると考えられる。$\psi(l)$ のグリーン関数に当たるものは長さ l の穴のあいた世界面に対応し、計算することができる。従って、原理的にはこれから逆に closed string action がどんな形かわかるのであるが、この場合も、eq.(1) のように無限個の相

互作用が入った形になると考えられている。従って、 D-instanton はこのような作用から導かれる運動方程式の解になっているかという問題を考えなければならない。幸いなことに、行列模型から導かれるループ方程式という方程式を使うと、もし $\psi(l)$ がこのような運動方程式の解であるならば次の方程式を満たしていなければならないということがわかるのである：

$$l\int dl'\psi(l')\psi(l-l')+3\delta''(l)-\frac{3}{4}\mu\delta(l)=0. \tag{10}$$

この方程式はラプラス変換すると容易に解くことができ、$\tilde{\psi}(\zeta)\equiv\int dle^{-\zeta l}\psi(l)$ とすると、解は

$$\tilde{\psi}(\zeta)=\sqrt{(\zeta-\frac{\sqrt{\mu}}{2})^2(\zeta+\sqrt{\mu})+C'}, \tag{11}$$

の形になる。ここで C' は不定の積分定数である。非臨界弦の真空に当たる解は $C'=0$ と選んだものになる。 D-instanton が運動方程式の解であるならば、 D-instanton は 0 でない C' の値に対応するはずであるが、実は行列模型の議論に出てきた配位は（g_s が小さいとき）

$$C'=\sqrt{6}g_s, \tag{12}$$

に対応していることを示すことが出来る。というわけで、非臨界弦の場合には、 D-instanton が closed string field theory の古典解だとすれば、どのような形の解かという事が厳密にわかるのである。

注目すべき点は eq.(12) で与えられた C' の値が g_s に比例していることである。このためにこの解の寄与は $\exp(-C/g_s)$ の形の非摂動効果を与える。closed string field theory action は eq.(1) の形なので、これから導かれる運動方程式は g_s によっていないはずである。実際、運動方程式から導かれた方程式 eq.(10) は g_s によっておらず、積分定数 C' を上記の値にすべき理由はここまでの議論からは見つからない。ところが、摂動の all order での無矛盾性を要請すると、C' の値はこの値でなければならないことがわかるのである。[4][3]　従って、この無矛盾性の条件をさらに調べてみれば、 D-brane は closed string field theory においてどのように考えるべきかについての手がかりが得られるはずである。

ここまでの議論だけだと、非臨界弦では D-instanton についてさまざまな見方が全て consistent な描像を与えるということになる。ところが、g_s の次のオーダーの効果まで考えに入れると、実はわからないことだらけになる。g_s の次のオーダーの効果とは非摂動効果 $\exp(-C/g_s)$ の前につく係数のことであり、 D-instanton の化学ポテンシャルにあたるものである。この係数は行列模型ではこれまで決まらないものとされてきたが、実は計算することが出来、結果は正則化の方法によらないユニバーサルな量になることが [3] で示された。ところが、同じ量を worldsheet therory あるいは string field theory で計算しようとすると、発散が出てきて計算できない。すなわち、上に挙げた 3 種類の手法は、このオーダーでは全く違う振る舞いを示すのである。

ここまで、非臨界弦の非摂動効果についてわかってきたことを議論してきた。この問題をさらに考えていくことで、弦理論の定式化について大きな手がかりが得られるのではないかということを期待している。

参考文献

[1] S. H. Shenker, *The strength of nonperturbative effects in string theory*, in *Random Surfaces, Quantum Gravity and Strings*, eds. O. Alvarez, E. Marinari and P. Windey (Plenum, New York, 1991).

[2] J. Polchinski, *Combinatorics of boundaries in string theory*, Phys. Rev. D **50** (1994) 6041, arXiv:hep-th/9407031.

[3] M. Hanada, M. Hayakawa, N. Ishibashi, H. Kawai, T. Kuroki, Y. Matsuo and T. Tada, *Loops versus matrices: The nonperturbative aspects of noncritical string*, Prog. Theor. Phys. **112** (2004) 131, arXiv:hep-th/0405076.

[4] M. Fukuma and S. Yahikozawa, *Nonperturbative effects in noncritical strings with soliton backgrounds*, Phys. Lett. B **396** (1997) 97, arXiv:hep-th/9609210;
Combinatorics of solitons in noncritical string theory, Phys. Lett. B **393** (1997) 316, arXiv:hep-th/9610199.