D-branes in the $c = 1/2$ string theory [1]

黒木　経秀
E-mail: kuroki@riken.jp

$c = 0$ string theory では D-instanton が matrix model の instanton、すなわち有効ポテンシャルの頂上に位置する、他の固有値からは離れた固有値として同定されることが定量的に示されている。この同定に基づき D-instanton の chemical potential を matrix model から求めると、Painlevé 方程式からは決定できない、$\exp(-C/g_s)$ の前の係数まで含めて普遍的である、すなわち matrix model の potential の詳細に依らないという驚くべき結果が得られた（hep-th/0405076）。

しかし、$c = 0$ string theory はあくまで toy model であり、本来重要な問題は critical string theory の非摂動効果が例えば IIB matrix model でどう記述されるかである。target space を非自明にするためには一般に multi-matrix model を考える必要がある。そこで、この第一歩として、2-matrix model、すなわち $c = 1/2$ string theory において、非摂動効果はどう記述されるか研究した。

具体例として、$N \times N$ のエルミート行列 A, B の 2-matrix model

$$S = N \mathrm{tr}\, V(A,B), \quad V(A,B) = V(A) + V(B) - cAB, \quad V(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{g}{3}x^3,$$

を考え、A, B の固有値をそれぞれ λ_i, μ_i $(i = 1, \cdots, N)$ として、一つの固有値 $x = \lambda_N$, $y = \mu_N$ に対する effective potential $V_{\mathrm{eff}}(x,y)$ を理論の分配関数の x, y 依存性として定義する：

$$Z_N \propto \int dxdy\ \langle \det(x - A') \det(y - B') \rangle' e^{-N(V(x)+V(y)-cxy)} \equiv \int dxdy\ e^{-NV_{\mathrm{eff}}(x,y)}.$$

large-N limit で $V_{\mathrm{eff}}(x,y)$ は $V^{(0)}_{\mathrm{eff}}(x,y) = V(x,y) - \int_{x_*}^{x} R_A(x')dx' - \int_{y_*}^{y} R_B(y')dy'$. と与えられる。ここで $R_A(x)$、$R_B(y)$ はそれぞれ A、B に対する resolvent である。この $V^{(0)}_{\mathrm{eff}}(x,y)$ に関して、1-matrix model と大きく異なる点が二つある。一つは、上式に示したように、Vandermonde determinant からくる寄与がそれぞれ 1 乗なため、x, y が固有値分布の中に存在する場合、被積分関数の符号が不定になり、$V_{\mathrm{eff}}(x,y)$ が well-defined かどうかがはっきりしない点である。このため以下では (x,y) が固有値分布の外にある場合のみを考える。第二点は、$V^{(0)}_{\mathrm{eff}}(x,y)$ が 1-matrix model の場合のように plateau を持たないことである。このため、$V^{(0)}_{\mathrm{eff}}(x,y)$ の原点がはっきりしない。これは、1-matrix model の場合は resolvent の non-universal part が $V^{(0)}_{\mathrm{eff}}$ に含まれるポテンシャルの部分をちょうどキャンセルして、$V^{(0)}_{\mathrm{eff}}$ が universal part の積分として書けるのに対し、2-matrix model の場合は resolvent が x、あるいは y のみの関数であるため、その non-universal part は $V(x,y)$ をキャンセルできないことに起因している。

1-matrix model の場合と同様、$V^{(0)}_{\mathrm{eff}}(x,y)$ の鞍点が存在するか、そしてそこでの $V^{(0)}_{\mathrm{eff}}(x,y)$ の値は $1/g_s$ に比例する非摂動効果を再現するか調べたところ、鞍点は実際一つ存在することが分かった。上で述べたように $V^{(0)}_{\mathrm{eff}}(x,y)$ には non-universal part が含まれているため鞍点での $V^{(0)}_{\mathrm{eff}}(x,y)$ の値には double scaling limit で $1/g_s$ より leading の寄与が含まれているように見えるが、それは実は non-universal part の x, y に依らない定数からの寄与のため、chemical potential の分母（あるいは $V^{(0)}_{\mathrm{eff}}(x,y)$ の原点）を考慮すれば instanton action はきちんと $1/g_s$ に比例することが分かった。double scaling limit でのその比例定数は Douglas 方程式から予言される非摂動効果の値とずれているが、これは chemical potential の分母を考慮すれば一致すると期待される。その計算のためにも、上述した $V_{\mathrm{eff}}(x,y)$ の正定値性の問題を解決する必要がある。

[1] 川合光、松尾善典 (ともに京大理) 両氏との共同研究