非可換量子力学と Seiberg-Witten Map

Refs. Phys.Rev.D69,125007(2004), hep-th/0401180

[*]神戸国際大 [†]関学大理工 [*]小門 陽、[†]岡村 隆、[†]斎藤 武
E-mail: kokado@kobe-kiu.ac.jp, okamura@ksc.kwansei.ac.jp, tsaito@k7.dion.ne.jp

空間が非可換であるとき, 量子 Hall 効果にその非可換性がどのように現れるかを調べる. 非可換ゲージ場は Seiberg-Witten map(SW-map) により可換ゲージ場と等価であることを利用する.

(2 次元) 非可換空間上の量子力学は次の交換関係で定義される：

$$\left[\, \hat{x}^i ,\ \hat{x}^j \,\right] = i\,\theta^{ij}\ , \qquad \left[\, \hat{x}^i ,\ \hat{p}_j \,\right] = i\,\delta^i{}_j\ , \qquad \left[\, \hat{p}_i\, ,\ \hat{p}_j \,\right] = 0\ , \qquad (i,\, j = 1,\, 2)\ . \tag{1}$$

この交換関係は, Bopp shift $\hat{z}^i := \hat{x}^i + \theta^{ij}\,\hat{p}_j/2$ を用いると, 可換空間上のものとなる：

$$\left[\, \hat{z}^i ,\ \hat{z}^j \,\right] = 0\ , \qquad \left[\, \hat{z}^i ,\ \hat{p}_j \,\right] = i\,\delta^i{}_j\ , \qquad \left[\, \hat{p}_i\, ,\ \hat{p}_j \,\right] = 0\ , \qquad (i,\, j = 1,\, 2)\ . \tag{2}$$

したがって, 固有値方程式 $\hat{z}^i\,|\vec{x}\,\rangle = x^i\,|\vec{x}\,\rangle$ を満たす固有値 x^i と 固有状態 $|\vec{x}\,\rangle$ が存在する.

さて, 非可換 U(1) ゲージ場 $A_\mu(\hat{x},\, t)$ $(\mu = 0,\, i)$ と最小結合する荷電粒子の Schrödinger eqn. は

$$i\left(\frac{d}{dt} - i\,g\,A_0(\hat{x},\, t)\right)\,|\psi(t)\,\rangle = \frac{1}{2m}\left[\ \hat{p}_j - g\,A_j(\hat{x},\, t)\ \right]^2\,|\psi(t)\,\rangle\ , \tag{3}$$

である. この方程式に, 左から unitary 演算子 $\hat{U} := \exp\left(-\dfrac{i}{4}\,g\,\theta^{kl}\left[\ \hat{p}_k A_l(\hat{x},\, t) + A_l(\hat{x},\, t)\hat{p}_k\ \right]\right)$ を作用することで, SW-map が施される : その結果は, $|\psi'(t)\,\rangle = \hat{U}\,|\psi(t)\,\rangle$ を用いて次式で与えられる.

$$\begin{aligned} &i\left(\frac{d}{dt} - i\,g\,\mathcal{A}_0(\hat{z},\, t) + i\,\frac{g\,\theta^{kl}}{2}\,\hat{\mathcal{O}}_{kl,0}(\hat{z},\, t)\right)\left|\psi'(t)\,\right\rangle \\ &\qquad = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_i - g\,\mathcal{A}_i(\hat{z},\, t) + \frac{g\,\theta^{kl}}{2}\,\hat{\mathcal{O}}_{kl,i}(\hat{z},\, t)\right)^2\left|\psi'(t)\,\right\rangle\ . \end{aligned} \tag{4}$$

ここで $\hat{\mathcal{O}}_{kl,\mu}(\hat{z},\, t) := \left\{\ \hat{p}_k - g\,\mathcal{A}_k(\hat{z},\, t)\ ,\ \mathcal{F}_{\mu\,l}(\hat{z},\, t)\ \right\}/2$ であり, $\mathcal{A}(\hat{z},\, t)$ と $\mathcal{F}(\hat{z},\, t)$ は SW-map された U(1) ゲージ場と, その曲率である. さらに, $\hat{z}$ は Eq.(2) を満たす可換空間座標である.

この式は、非可換 U(1) ゲージ場と最小結合する非可換空間上の Schrödinger eqn. を, SW-map によって, U(1) ゲージ場 $\mathcal{A}$ と (非最小) 結合する可換空間上のそれに変換したものであり, θ に依存する項が非可換空間効果を表している. 以下この式を 2 次元 Hall 効果に応用する.

定常問題は, $\langle\ \vec{x}\ |\ \psi'(t)\ \rangle = \varphi(\vec{x})\,\exp(-i\omega t)$ として,

$$\left(\omega + g\,\mathcal{A}_0(\vec{x}) - \frac{g\,\theta^{kl}}{2}\,\hat{\mathcal{O}}_{kl,0}(\vec{x})\right)\,\varphi(\vec{x}) = \frac{-1}{2m}\left(\partial_i - i\,g\,\mathcal{A}_i(\vec{x}) + i\,\frac{g\,\theta^{kl}}{2}\,\hat{\mathcal{O}}_{kl,i}(\vec{x})\right)^2\,\varphi(\vec{x})\ . \tag{5}$$

となる. 特に一様定常な電磁場の場合, Eq.(5) は

$$\left(\omega + g\,\mathcal{A}_0(\vec{x})\right)\,\varphi(\vec{x}) = -\frac{1 + g\,\theta\,\mathcal{B}}{2m}\left(\partial_i - i\,g\,\mathcal{A}_i(\vec{x}) + i\,\frac{m\,g\,\theta^{ij}}{2}\,\mathcal{F}_{0j}\right)^2\,\varphi(\vec{x})\ . \tag{6}$$

となる. 可換空間上の問題に変換されているので, この後は通常の場合と同様に議論できる. Impurity 効果も考慮できるが, Eq.(6) が示すように, θ の効果は, 結局, 荷電粒子の有効質量の変化とサイクロトロン運動の guiding center のシフトにのみに表れ (Eq.(6) の右辺にある $\theta^{ij}\,\mathcal{F}_{0j}$ を含む項は定数であり、空間並進の位相変換によって吸収される), 量子ホール効果の整数 (半整数) 値は変わらないことが分かる.