

Affine Lie Algebras and S -Duality of $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills Theory for ADE Gauge Groups on $K3$

名古屋大学大学院多元数理科学研究科 佐々木 徹

E-mail: x03001e@math.nagoya-u.ac.jp

我々は $K3$ 上のツイストされた $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論の分配関数を決定することを目指して、アフィン・リー環と $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論の双対性との関係を調べた。その結果 ADE 群の分配関数が ADE 型の theta 関数を用いて記述されることを示した。

ツイストされた $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論 (所謂 Vafa-Witten 理論) は $\mathcal{N} = 4$ の超対称性とローレンツ対称性を組み合わせることにより作られた位相的場の理論である [7]。位相的場の理論であるので、結合定数や計量によらない。また、 \mathbf{R}^4 以外の 4 次元ケーラー多様体上でも定義されていると考えられる。この Vafa-Witten 理論は、その分配関数の以下のような性質で特徴付けられる。

(i) 分配関数はインスタントンモジュライのオイラー数の母関数である。(ii) 分配関数は $\mathcal{N} = 4$ の双対性である Montonen-Olive の双対性を持つ [4]。(iii) モジュライの次元公式からくるギャップ条件を満たす [1, 2]。

(i)(ii)(iii) の性質は Vafa-Witten 理論で予想されているが、我々の立場としては、この Vafa-Witten 予想を仮定することにより分配関数が如何に決定していくかを見ることに主眼を持つ。特に、我々は $K3$ 上の ADE 群の場合に、Vafa-Witten 予想を仮定することで分配関数を決定することを目指してきた [2, 5, 6]。

今回の仕事では Montonen-Olive の双対性を theta 関数と eta 関数の組み合わせ $(\theta_G/\eta^{r+1})^{24}$ で再現できることを示した。ここで θ_G は \mathcal{G} theta 関数である [3]。特に A_{N-1} の場合は

$$\eta(\tau)^N/\eta(\tau/N) = \sum_{\beta \in M^*/NM} n^\beta \theta_{A_{N-1}}^\beta(\tau), \exists n^\beta \in \mathbf{Z},$$

のような eta 関数と theta 関数の間の恒等式が存在して、よく知られた Vafa-Witten による eta 関数で記述された分配関数を theta 関数を用いても記述できることを示した。

また E_7 の場合では、Montonen-Olive の双対性以外の Vafa-Witten 予想も議論して、実際に分配関数を構成した。

今後の課題としては、 A_N, E_7 以外の群でもすべての Vafa-Witten 予想を満たす分配関数を決定することである。また theta 関数による分配関数の記述を得たので、そこからアフィン・リー環による双対性のより深い理解が得られるものと期待している。

参考文献

- [1] M.F.Atiyah, N.H.Hitchin and I.M.Singer. *Self-duality in four dimensional Riemannian Geometry*, Proc.R.Soc.Lond A362(1978)425.
- [2] M.Jinzenji and T.Sasaki. *An Approach to $\mathcal{N} = 4$ ADE Gauge Theory on $K3$* , JHEP 0209 (2002) 002.
- [3] V. G. Kac. *Infinite dimensional Lie algebras*, Cambridge 1990.
- [4] C.Montonen and D.Olive, *Magnetic monopoles as gauge particles ?*, Phys.Lett.B 72 (1977) 117;
P.Goddard, J.Nyuts and D.Olive, *Gauge theories and magnetic charge*, Nucl. Phys. B125 (1977) 1.
- [5] T.Sasaki. *Hecke Operator and S-Duality of $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills for ADE Gauge Group on $K3$* , JHEP 0307 (2003) 024
- [6] T.Sasaki. *Gap Condition and Self-Dualized $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills Theory for ADE Gauge Group on $K3$* , Mod.Phys.Lett. A19, No.7(2004)p511
- [7] C.Vafa and E.Witten. *A strong coupling test of S-duality*, Nucl. Phys. B431 (1994) 3.