Entanglement entropy の strong subadditivity と AdS/CFT 対応について

Department of Physics , Kyoto University Tomoyoshi Hirata
E-mail: hirata@gauge.scphys.kyoto-u.ac.jp;

(based on hep-th/0608213 by Tomoyoshi Hirata and Tadashi Takayanagi)

Entanglement Entropy に対して知られている最も強い加法性は次の Strong Subaddtivity である。

$$S_A + S_{A'} \geq S_{A\cup A'} + S_{A\cap A'}$$

2+1 次元の CFT で無限に大きい角度 α の扇形の領域を A とする。この領域の Entanglement Entropy は a を cut off γ を定数として、

$$S_A = \gamma \cdot \frac{|\partial A|}{a} + f(\Omega)\log a + b \tag{1}$$

と表される。この系に Strong Subadditivity を適応すると、
$f(\pi) = 0, f''(\Omega) \geq 0, f'(\Omega) \leq 0, f(\Omega) \geq 0 \ (0 \leq \Omega \leq \pi)$ (2) が得られる。

同様に 2+1 次元あるいは 3+1 次元において、半径 r_1 と半径 r_2 の同心円に囲まれる領域の Entanglement Entropy はそれぞれ、

$$S_A = \gamma \cdot \frac{(r_1 + r_2)}{a} + b(\rho_2 - \rho_1), \quad S_A = \gamma \cdot \frac{r_1^2 + r_2^2}{a^2} - f \cdot \log\left(\frac{r_1 r_2}{a^2}\right) + b(\rho_2 - \rho_1) \tag{3}$$

となり、この系に Strong Subadditivity を適応すると、$b'(\rho) \geq 0, b''(\rho) \leq 0$ (4) が得られる。

d+1 次元の CFT の Entanglement Entropy は AdS/CFT 対応を仮定することにより d+2 次元の AdS 空間の量を用い

$$S_A = \frac{A(\gamma_A)}{4G_N^{(d+2)}}$$

と計算される。ここに $A(\gamma_A)$ は面 γ_A の面積、γ_A は領域Aを境界として持つ AdS 空間上の minimal surface を表す。(S.Ryu and T.Takayanagi, hep-th/0603001)

我々は数値計算を行い、AdS 空間の minimal surface から計算される Holographic Entanglement Entropy が Strong Subaddtivity を満たすことを確かめた。

扇形の領域に対して、Holographic Entanglement Entropy は確かに (1) の形となり、$f(\omega)$ は Strong Subadditivity から期待される凸性 (2) を満たした。

同心円に囲まれる領域に対しても、Holographic Entanglement Entropy は (3) の形になった。一つの ρ に対して二つの解 $b(\rho)$ が存在したが、$b(\rho)$ の小さいのが物理的な解であり、そのブランチ対して、Strong Subadditivity から要請される凸性 (4) が満たされることが分かった。