非可換空間における Hofstadter butterfly diagram

高橋秀典（日大松戸歯）

山中雅則 氏(日大理工)との共同研究

hep-th/0606168

2007年8月9日 近畿大にて

研究の背景

- ◎ 非可換空间の研究は昔から行われている。場の理論の発散問題の解決策として議論された。

（Snyder,1947）

- ◎ 数学的な試みとして
- ◎ String Theory（AdS/CFT対応）による定式化
- ◎ 積を★（スター）積に置き換える代数的な定式化
- ◎ 最近は、そのスター積を基に非可換空间上の量子力学や場の理論の研究も行われている。

- 空间の非可換性をランダウレベル問題、Aharonov-Bohm効果、量子ホール効果など、物性系に関連した現象へ導入した研究も多数行われている。

- もし、空间に非可換性が存在するならば、そのような現象を通して、観測されるのでは？

- 非可換空间の電磁場が★積で定義されているとき、物理量の(スター)・ゲージ不変性はどうなっているのか？

今回の研究で行ったこと

今回は、NC磁場中の電子の量子力学を取り扱う

- 非可換空间における電子の(スター)ゲージ不変を考慮したSchrodinger方程式の構築
- 非可換空间におけるLandau Level問題
- 非可換空间におけるHofstadter butterfly図の作成

非可換空间の非可換性(θ)が小さい場合を考察した

今日の話の流れ

1、非可換空間の定式化のやり方

2、非可換空間のゲージ理論

3、非可換空間の磁場中の電子の運動

4、非可換空間のランダウレベル問題とAB効果

5、非可換空間のHofstadterバタフライ図

非可換空間の定式化1

Snyder,1947

- 時空間を演算子として捉える。
- 演算子の作用する空間として、de Sitter 空間を考える。

2次元非可換空間

$\mathbf{dS}_2(R_0;\xi_0,\xi_1,\xi_2)$

$$R_0^2 = -\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2,$$

$$\Downarrow$$

閉じた代数：$\{\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \mathcal{M}\}$

$$\mathcal{Y}_m \equiv J_{0m} = \xi_0\partial_m + \xi_m\partial_0, \qquad \mathcal{M} \equiv J_{12} = \xi_1\partial_2 - \xi_2\partial_1,$$

$$\Downarrow$$

$$x \equiv a\mathcal{Y}_1, \quad y \equiv a\mathcal{Y}_2, \qquad (a \text{ is a constant of length dimension})$$

$$s^2 = x^2 + y^2 = a^2\mathcal{Y}^2.$$

$$\Downarrow$$

$$[x,\ y] = a^2\mathcal{M},$$

非可換空间の定式化2

Seiberg&Witten, 1999; Russo&Sheikh-Jabbari,2000

- String理論による定式化
- String理論に存在するmasslessモードの一つである2階反対称テンソル場(B場)をD-brane上に載せたConfigurationを考える。
- AdS/CFT対応によれば、非可換空间のゲージ理論が存在する。
- 例えば、D3-brane上に1,2方向にのみB場が存在する系の場合、Open stringの端点において、非可換性が生じる。

$$[X^1, X^2]=i\theta \quad (\theta \propto B)$$

非可換空间の定式化3

◎ Moyal積による定式化

可換空间の模型において、積をスター積に置き換える

◎ Moyal積(⋆積)

$$f(\hat{x}) \star g(\hat{x}) = \exp\left[\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\xi^{\mu}}\frac{\partial}{\partial\zeta^{\nu}}\right] f\left(x+\xi\right) g\left(x+\zeta\right)\Big|_{\xi=\zeta=0}$$
$$= f(x)g(x) + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_{\mu}f\partial_{\nu}g + \mathrm{O}(\theta^2), \quad (|\theta| \ll 1)$$

where f, g are any functions in the noncommutative space and x is a coordinate of the commutative space.

Moyal括弧

$$\left[\hat{x}^{\mu}, \hat{x}^{\nu}\right]_{\star} = \hat{x}^{\mu} \star \hat{x}^{\nu} - \hat{x}^{\nu} \star \hat{x}^{\mu} = i\theta^{\mu\nu},$$

where $[\ \ ]_{\star}$ is called by Moyal brackets.

◎スター積の演算則について

結合側:

$$\Big(f(\hat{x}) \star g(\hat{x})\Big) \star h(\hat{x}) = f(\hat{x}) \star \Big(g(\hat{x}) \star h(\hat{x})\Big).$$

微分演算に関するスター積の順序に注意

$$\hat{\partial}_\mu \star (f \star g) = (\partial_\mu f) \star g + \underline{\underline{f \star (\partial_\mu g)}}.$$

$$\hat{\partial}_\mu \star (f \star g) \neq (\partial_\mu f) \star g + \underline{\underline{(f \star \hat{\partial}_\mu)}} \star g.$$

◊(ダイアモンド演算子)の定義

$\hat{\Phi} = \hat{\mathcal{A}} \star \hat{\mathcal{B}}$ と $\hat{\mathcal{C}}$ の間に

$$\hat{\Phi} \diamond \hat{\mathcal{C}} \equiv \hat{\mathcal{A}} \star (\hat{\mathcal{B}} \star \hat{\mathcal{C}}).$$

と $\diamond$ 演算子を定義すると便利である。例えば

$$[\hat{\partial}_x, \hat{x}] \diamond \hat{\psi} \equiv (\hat{\partial}_x \star \hat{x}) \diamond \hat{\psi} - (\hat{x} \star \partial_x) \diamond \hat{\psi} = \hat{\partial}_x \star (\hat{x} \star \hat{\psi}) - \hat{x} \star (\hat{\partial}_x \star \hat{\psi}),$$

を計算すると

$$[\hat{\partial}_x, \hat{x}] \diamond \hat{\psi} = \psi, \qquad [\hat{x}, \hat{\partial}_x] \diamond \hat{\psi} = -\hat{\psi}.$$

より、$\diamond$ 演算のもとで形式的に

$$-[\hat{p}, \hat{x}] = [\hat{x}, \hat{p}] = i, \qquad (\hat{p} \equiv -i\hat{\partial}_x)$$

よく知られた量子力学における位置と運動量の同等な交換関係

非可換空间上のゲージ理論

NC $U(N)$ゲージ変換

Seiberg&Witten, JHEP, 1999

The U(N) gauge transformation in the noncommutative space should be natural to define in terms of the star-product as

$$\boxed{\hat{\psi}' = \hat{U} \star \psi = e^{i\lambda^a(\hat{x})T_a} \star \hat{\psi},}$$

where $\hat{\psi}$ is a fermion field in the noncommutative language and T_a $(a = 1, 2, \cdots, N^2)$ are generators of U(N) group which satisfy

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c, \qquad \mathrm{tr}(T_aT_b) = \frac{1}{2}.$$

where f_{abc} is structure constant. On the other hand, the U(N) star-gauge transformation of a gauge field $\hat{A}_\mu$ is defined by

$$\boxed{\hat{A}_\mu \to \hat{U} \star \hat{A}_\mu \star \hat{U}^\dagger + i\hat{U} \star \partial_\mu \hat{U}^\dagger}$$

where $\hat{A}_\mu = \hat{A}^a_\mu T_a$.

NC $U(N)$ゲージ理論

The action of U(N) Yang-Mills fields in the noncommutative space (NC) should be given by

$$S = -\frac{1}{2g^2}\int d^4x\,\mathrm{tr}\left(\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu}\star\hat{\mathcal{F}}^{\mu\nu}\right) = -\frac{1}{4g^2}\int d^4x\,\hat{\mathcal{F}}^a_{\mu\nu}\star\hat{\mathcal{F}}^{a\mu\nu},$$

where the field strength $\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu}$ in the NC space should be given by

$$\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu} = \hat{\partial}_\mu\hat{A}_\nu - \hat{\partial}_\nu\hat{A}_\mu - i\left[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu\right]_\star.$$

Here, the Moyal brackets between the gauge fields becomes

$$\left[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu\right]_\star \equiv \hat{A}_\mu\star\hat{A}_\nu - \hat{A}_\nu\star\hat{A}_\mu = [A_\mu, A_\nu] + i\theta_{ij}\partial_i A_\mu\partial_j A_\nu.$$

Therefore, the NC field strength is written in terms of the commutative language as

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i\,[A_\mu, A_\nu] + \boxed{\theta_{ij}\partial_i A_\mu\partial_j A_\nu} + O(\theta^2).$$

非可換空間ゲージ理論における共変微分とDirac場

On the other hand, the covariant derivative in the NC space should be given by

$$\boxed{\hat{D}_\mu = \hat{\partial}_\mu - i\hat{A}^a_\mu T_a.}$$

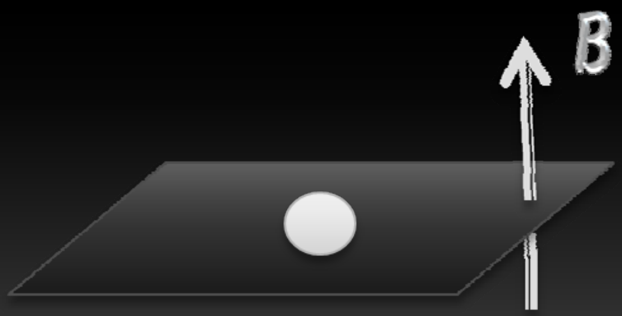
Therefore, the Lagrangian density of the Dirac fields in the NC space should be given by

$$\underline{\mathcal{L} = \hat{\bar{\psi}} \star \left[(i\gamma^\mu \hat{D}_\mu - m) \star \hat{\psi} \right]},$$

where $\hat{\bar{\psi}} = \hat{\psi}^\dagger \gamma^0$.

非可換空間における磁場中の電子の平面運動

- NC U(1)ゲージ理論(NC電磁場)を考える
- 非相対論的な場合を考える
- 物理量は(スター)ゲージ不変な量



NC U(1)ゲージ変換(スター·ゲージ変換)

$$\psi' = U \star \psi,$$
$$\hat{A}'_\mu = U \star \hat{A}_\mu \star U^\dagger + iU \star (\partial_\mu U^\dagger),$$
$$U = e^{i\lambda(x)}$$

無限小NC U(1)ゲージ変換

$$\psi' = e^{i\lambda}\left(1 - \frac{1}{2}\theta_{ab}\partial_a\lambda\partial_b\right)\psi + O(\lambda^2, \theta^2),$$

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\lambda - \theta_{ab}\partial_a\lambda\partial_b A_\mu + O(\lambda^2, \theta^2).$$

◎共変微分の(スター)ゲージ変換性

共変微分 $\hat{D}_\mu = \hat{\partial}_\mu - i\hat{A}_\mu$

$$\hat{D}_\mu \star \hat{\psi} = D_\mu \psi + \frac{1}{2}\theta_{ab}\partial_a A_\mu \partial_b \psi.$$

の無限小 U(1) star-gauge 変換性

$$\hat{D}'_\mu \star \hat{\psi}' = e^{i\lambda} \star (\hat{D}_\mu \star \hat{\psi}),$$

更に

$$\hat{D}'_\nu \star (\hat{D}'_\mu \star \hat{\psi}') = e^{i\lambda} \star \left(\hat{D}_\nu \star (\hat{D}_\mu \star \hat{\psi}) \right),$$

◎電子のSchrodinger方程式と(スター)ゲージ不変性

NC電磁場中における電子のSchrödinger方程式

$$-\frac{1}{2m}\Big(\boldsymbol{D}\star(\boldsymbol{D}\star\psi)\Big)=E_0\psi.$$

ゲージ不変性

$$-\frac{1}{2m}e^{i\lambda}\star\Big(\boldsymbol{D}\star(\boldsymbol{D}\star\psi)\Big)=E_0e^{i\lambda}\star\psi$$

電子のハミルトニアンは

$$\hat{H} \diamond \hat{\psi} = E_0 \hat{\psi},$$

但し、

$$H = \frac{1}{2m} \hat{\Pi} \star \hat{\Pi}, \qquad \mathbf{\Pi} = \boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A}.$$

ここで、

$$\boldsymbol{p} = -i\nabla, \qquad \hat{\Pi} = -i\hat{\boldsymbol{D}}.$$

エネルギー固有値は(スター)ゲージ不変な物理量

◎他の(スター)ゲージ不変な関係式

共変微分の交換関係とそのゲージ不変性

$$\left[\hat{D}_\mu, \hat{D}_\nu\right] \diamond \hat{\psi} = c_0 \hat{\psi}, \qquad (c_0\text{は定数})$$

ここで

$$\left[\hat{D}_\mu, \hat{D}_\nu\right] \diamond \hat{\psi} \equiv \hat{D}_\mu \star (\hat{D}_\nu \star \psi) - \hat{D}_\nu \star (\hat{D}_\mu \star \hat{\psi}).$$

証明：

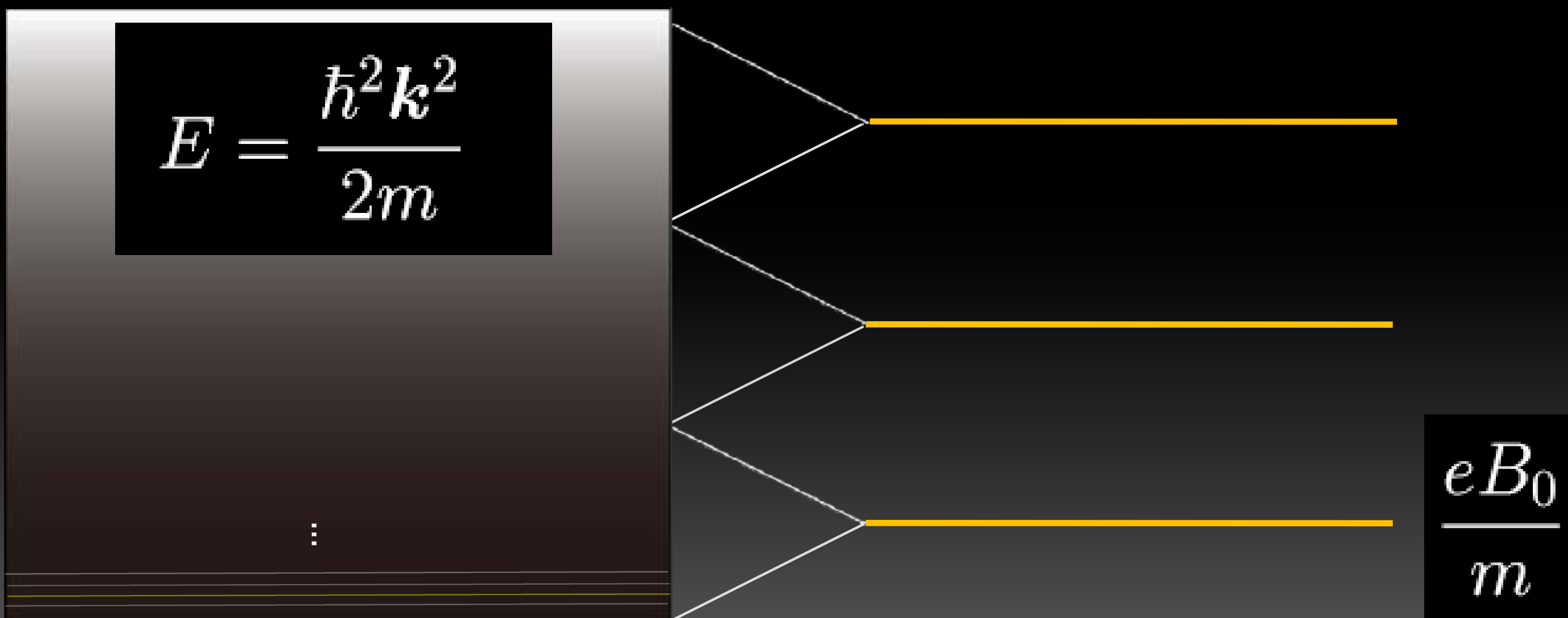
$$\hat{D}'_\nu \star (\hat{D}'_\mu \star \hat{\psi}') = e^{i\lambda} \star \left(\hat{D}_\nu \star (\hat{D}_\mu \star \hat{\psi}) \right),$$

から

$$e^{i\lambda} \star \left(\left[\hat{D}_\mu, \hat{D}_\nu\right] \diamond \hat{\psi} \right) = e^{i\lambda} \star (c_0 \hat{\psi}).$$

ランダウ・レベル問題

- ◎ 電子が**定数磁場中**で平面運動する系
- ◎ 自由電子場の連続スペクトラムが、離散スペクトラムに「集約」される。



$$E = \frac{\hbar^2 \boldsymbol{k}^2}{2m}$$

$$\frac{eB_0}{m}$$

自由場のスペクトラム　　　　ランダウレベル

◎可換空間におけるランダウ準位問題

U(1) ゲージ変換 $(\lambda = e\chi)$

$$\bar{\boldsymbol{A}}' = \bar{\boldsymbol{A}} + \nabla\chi, \quad \Psi'(x) = e^{ie\chi(x)}\Psi(x)$$

電磁場中の電子のハミルトニアン

$$H = \frac{\boldsymbol{\Pi}^2}{2m} = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A})^2$$

Schrödinger 方程式はゲージ変換に対して不変

$$H'\Psi' = E_0\Psi'$$

また、正準運動量の交換関係もゲージ不変

$$[\Pi_x, \Pi_y] = -ie\partial_x A_y + ie\partial_y A_x$$

z軸方向の定数磁場を生成するゲージ場

対称ゲージ (symmetric gauge)

$$\boldsymbol{A} = \left(-\frac{B}{2}y,\ \frac{B}{2}x, 0\right).$$

ランダウゲージ (Landau gauge)

$$\boldsymbol{A} = (0,\ Bx, 0)$$

定数磁場中の場合

$$[\Pi_x,\ \Pi_y] = -ieB_0.$$

調和振動子の生成・消滅演算子 $a, a^\dagger$

$$\Pi_x = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\hbar e B_0}{2}}\left(a - a^\dagger\right), \quad \Pi_y = \sqrt{\frac{\hbar e B_0}{2}}\left(a + a^\dagger\right), \quad [a,\ a^\dagger] = 1$$

Hamiltonian

$$H = \frac{\hbar e B_0}{m}\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right).$$

2次元非可換空间のランダウレベル問題

電子のハミルトニアン

$$H \diamond \psi = \frac{1}{2m}\Big[\Pi_x \star (\Pi_x \star \psi) + \Pi_y \star (\Pi_y \star \psi)\Big]$$

特に、対称ゲージ (symmetric gauge)

$$\boldsymbol{A} = \left(-\frac{B}{2}y,\ \frac{B}{2}x, 0\right).$$

のとき

$$\Big[\hat{\Pi}_x,\ \hat{\Pi}_y\Big] \diamond \hat{\psi}_s = -i(\ell\xi_\theta)^{-2}\hat{\psi}_s,$$

ここで

$$\xi_\theta^{-2} \equiv 1 - \frac{eB\theta}{4}.$$

◎ 調和振動子による表現

非可換空間おける調和振動子

$$[a, a^\dagger] \diamond \psi = \psi, \quad [a, a] \diamond \psi = 0, \quad [a^\dagger, a^\dagger] \diamond \psi = 0$$

正準運動量の調和振動子による表現

$$\Pi_x = \frac{1}{\sqrt{2} i \ell \xi_\theta}(a - a^\dagger) \qquad \Pi_y = \frac{1}{\sqrt{2} \ell \xi_\theta}(a + a^\dagger)$$

交換関係を再現

$$[\Pi_x, \Pi_y] \diamond \psi = -i \ell \xi_\theta^{-2} \psi$$

固有値方程式

$$H \diamond \psi = \frac{(\ell \xi_\theta)^{-2}}{m}\left(N + \frac{1}{2}\right) \diamond \psi, \qquad (N = a^\dagger \star a, \quad \ell^{-2} \equiv eB)$$

エネルギー固有値

$$E_\theta = \frac{(\ell \xi_\theta)^{-2}}{m}\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{eB}{m}\xi_\theta^{-2}\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

電子のハミルトニアン

$$H \diamond \psi = \frac{1}{2m}\left[\Pi_x \star (\Pi_x \star \psi) + \Pi_y \star (\Pi_y \star \psi)\right]$$

他の手法による結果との比較

非可換空间の座標を可換空间の座標で表す(Bopp shift)

Curtright et al., PRD, 1998

Alternatively, the Moyal bracket between the positions of a quantum particle in the noncommutative spaces is also induced by the replacement (Bopp shifts) [58]

$$\hat{x}^\mu = x^\mu - \frac{\theta^{\mu\nu}}{2} p_\nu \tag{4.48}$$

in a formal manner, where x^μ and p^μ are assumed to be the position coordinate and the momentum of the particle in the commutative space, respectively. Further, they satisfy the commutation relations

$$[x^\mu, p^\nu] = i\delta^{\mu\nu}, \qquad [x^\mu, x^\nu] = 0. \tag{4.49}$$

Therefore, the physics of the noncommutative space should be represent in terms of language of the commutative space.

◉ Bopp shiftによる解析

Dayi & Jella, JMP, 2002

非可換空間の電子のハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2m}\left[\left(\xi_\theta^{-2} p_x - \frac{eB}{2} y\right)^2 + \left(\xi_\theta^{-2} p_y + \frac{eB}{2} x\right)^2\right]$$

調和振動子

$$b^\dagger = -i\xi_\theta(p_x - ip_y) + \frac{eB}{2}(x + iy), \quad b = i\xi_\theta(p_x - ip_y) + \frac{eB}{2}(x - iy)$$

電子の Hamiltonian

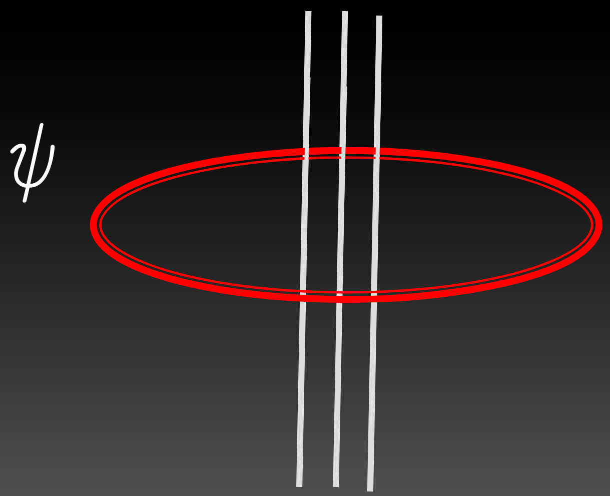
$$H = \frac{eB}{m}\xi_\theta^{-2}\left(b^\dagger b + \frac{1}{2}\right)$$

Aharonov-Bohm効果

- 電子波が磁場のある領域を挟んで運動すると干渉パターンに磁束に応じた干渉パターンのずれが生じる

位相差

磁束Φ



$$\delta\theta = \frac{e}{\hbar}\oint \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$$

$$= 2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (\Phi_0 = h/e, \text{磁束量子})$$

非可換空间におけるAB効果

Dayi & Jella, JMP, 2002

電子のハミルトニアン

$$\frac{1}{2m}\left(-i\nabla_j + eA_j + \frac{ie}{2}\theta_{ab}\partial_a A_j \nabla_b\right)^2 \Psi_{nc}(\boldsymbol{r}) = E_{\boldsymbol{k}}\Psi_{nc}(\boldsymbol{r})$$

この方程式の解 (波数 $\boldsymbol{k}$ の電子の波動関数) は

$$\Psi_{nc}(\boldsymbol{r}) = \Psi_0(\boldsymbol{r})\exp\left[-ie\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} dR_j\left(A_j - \frac{1}{2}\theta_{ab}(k_b - eA_b)\partial_a A_j\right)\right]$$

但し

$$\Psi_0(\boldsymbol{r}) = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

磁場を囲む閉じたループを回ったときの電子の波動関数の位相の変化 $\Delta\Phi_{AB}$ は

$$\Delta\phi_{AB} = -ie \oint dR_j \left(A_j - \frac{1}{2}\theta_{ab}(k_b - eA_b)\partial_a A_j \right)$$

となる。

特に、対称ゲージで位相差は

$$\Delta\phi_{AB} = 2\pi\xi_\theta^{-2}\frac{\Phi}{\Phi_0}$$

$$\left(\text{磁束量子} : \Phi_0 = \frac{1}{e}, \qquad \xi_\theta^{-2} \equiv 1 - \frac{eB\theta}{4} \right)$$

非可換空间の補正

◎ 今回考えた物理系については、可換空间とほぼ同等な結果が得られる。

	可換空間	非可換空間
交換関係	$[\Pi_x, \Pi_y]\,\psi = -i\ell_0\psi$	$[\Pi_x, \Pi_y] \diamond \psi = -i(\ell\xi_\theta)^{-2}\psi$
エネルギー	$H = \dfrac{\ell_0^{-2}}{m}\left(a^\dagger a + \dfrac{1}{2}\right)$	$H = \dfrac{(\ell\xi_\theta)^{-2}}{m}\left(a^\dagger a + \dfrac{1}{2}\right)$
AB位相 $(\Delta\phi_{AB})$	$2\pi\ell_0^{-2}$	$2\pi(\ell_0\xi_\theta)^{-2}$

$$\ell_0^{-2} \equiv eB_0, \ \ \ell^{-2} = eB, \ \ \xi_\theta^{-2} \equiv 1 - \frac{eB\theta}{4}$$

可換空间へのマップ

$$\ell^{-2} \longrightarrow (\ell_0 \xi_\theta)^{-2}$$

又は

$$eB_0 \longrightarrow eB\left(1 - \frac{eB\theta}{4}\right)$$

Hofstadter Butterfly図

Hatsugai, J. Phys., 1997 (review)

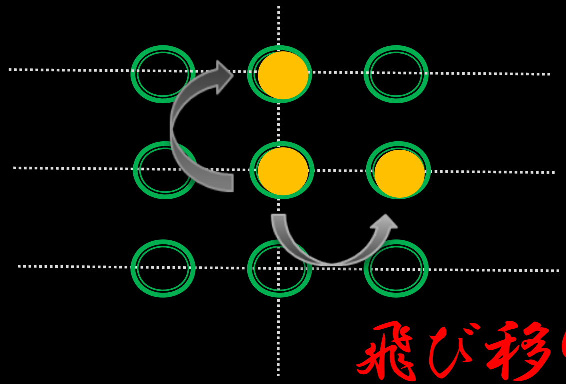
- 磁場中の電子の運動を平面格子系で定式化する。（周期ポテンシャル系とほぼ同等）
- 仮定1：tight binding model
  - A） 各格子点上に1つずつ電子の軌道状態がある。
  - B） 電子は隣り合う格子点間をある確率で飛び移る。
- 仮定2：Peierls substitution

U(1) ゲージ不変性を近似的に格子模型において取り込む手法

$$c_i' = \Omega_i c_i, \quad (e^{i\Theta_{ij}})' = \Omega_i e^{i\Theta_{ij}} \Omega_j^{-1}$$

但し、$|\Omega_i| = 1, j = (m, n)$

正方格子



電子

飛び移り積分 t

◎ 電子の格子ハミルトニアン

☆可換空间

電子の格子ハミルトニアン

$$H = t\sum_{m,n} c^\dagger_{m+1,n} c_{m,n} e^{i\Theta^x_{m,n}} + t\sum_{m,n} c^\dagger_{m,n+1} c_{m,n} e^{i\Theta^y_{m,n}} + \text{h.c.}$$

Landau gauge

$$\Theta^x_{m,n} = 0, \quad \Theta^y_{m,n} = 2\pi\phi\left(1 - \frac{\phi\theta}{4}\right) m,$$

ここで、$\phi = eB$.

1 粒子状態

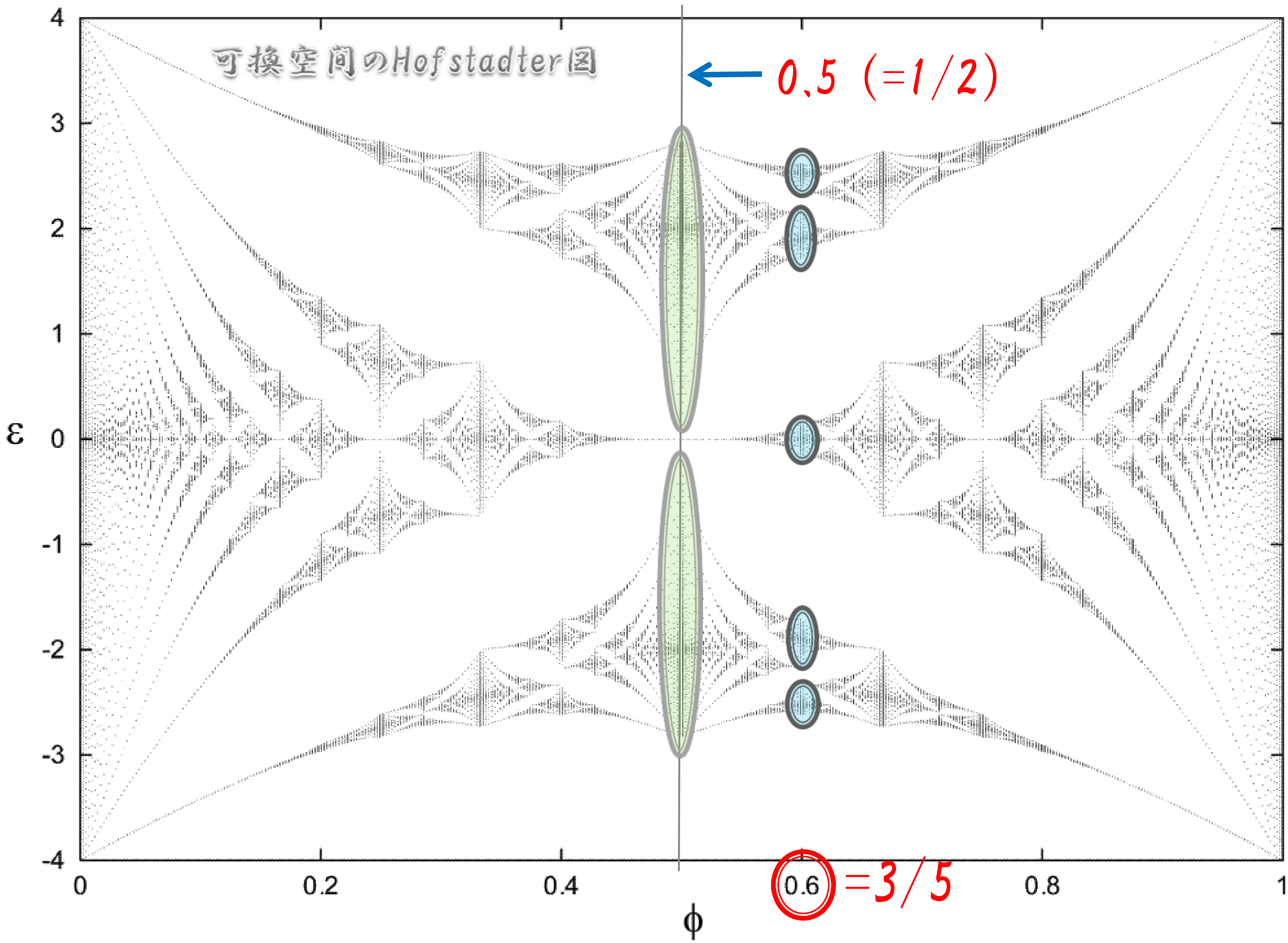
$$|\psi\rangle = \sum_{m,n} \psi(m,n) c^\dagger_{n,m} |0\rangle$$

を使って、エネルギー固有値を求める。

Hofstadter Butterfly Diagram

Hofstadter, PRB, 1976

- 1粒子エネルギーを数値的に評価し、磁束量子 Φ に関する図を作成する。
- $\Phi = p/q$ (p, qは整数)のとき、エネルギーバンドが q 個に分かれる
- 図がフラクタル構造を示している



可換空间のHofstadter図
0.5 (=1/2)
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
ε
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
=3/5
ϕ

◎ 非可換空间におけるHofstadter Butterfly図

H.T.&Yamanaka, hep-th/0606168, 2006

☆非可換空间の磁束をeffectiveな磁束に置き換える
☆そして、可換空间の2次元格子模型で図を作成する

$$\phi \longrightarrow \phi' \equiv \phi\left(1 - \frac{\phi\theta}{4}\right)$$

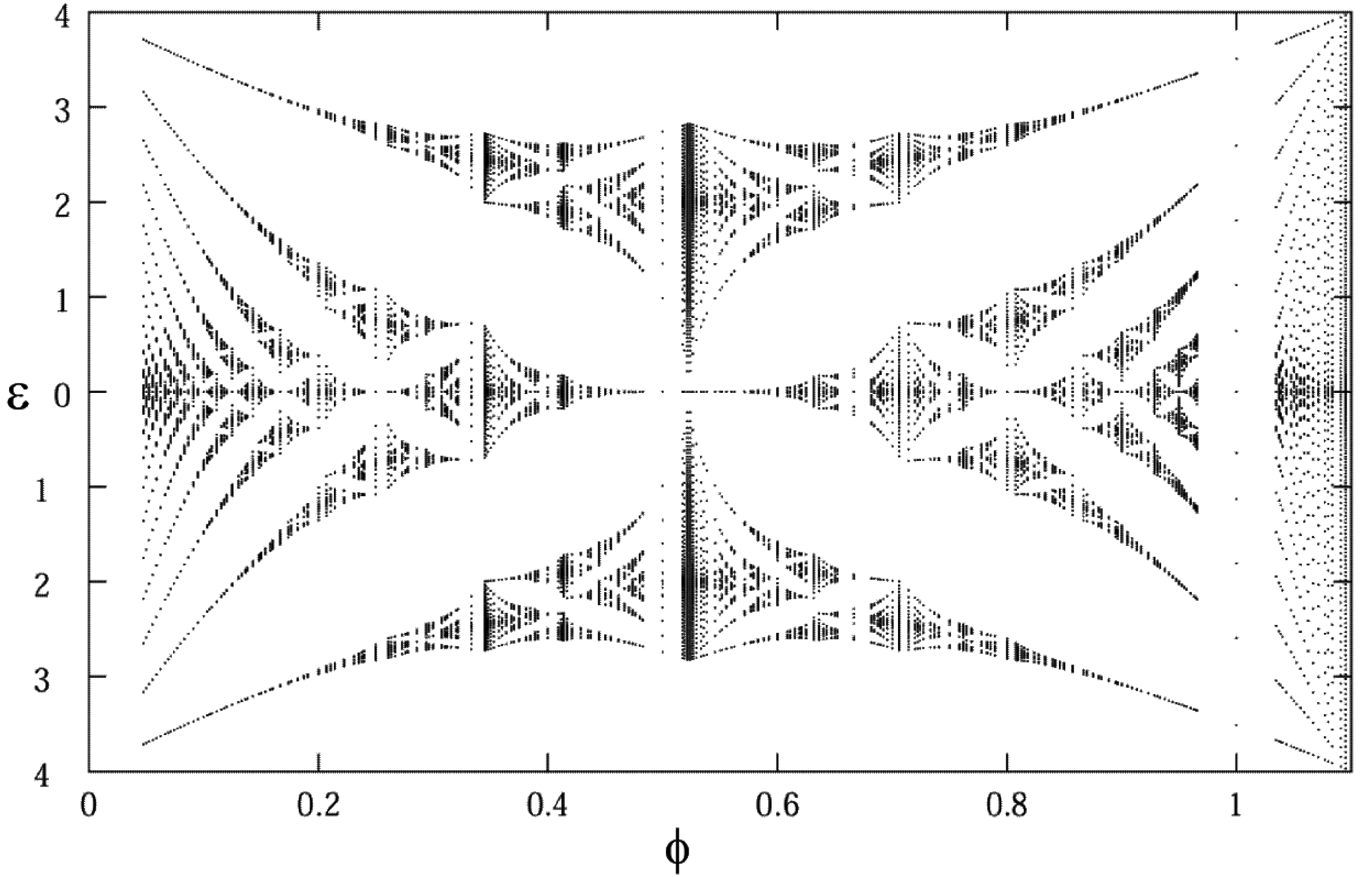
- 可換空间と同様に1粒子エネルギーを数値的に評価し、磁束量子Φに関する図を作成する。
- 可換空间と似たような図である。
- 図がフラクタル構造を示している
- Φ=p/q (p,qは整数)の近くで、エネルギーバンドがq個に分かれている。

エネルギーバンドが q 個に分かれる ϕ の値は

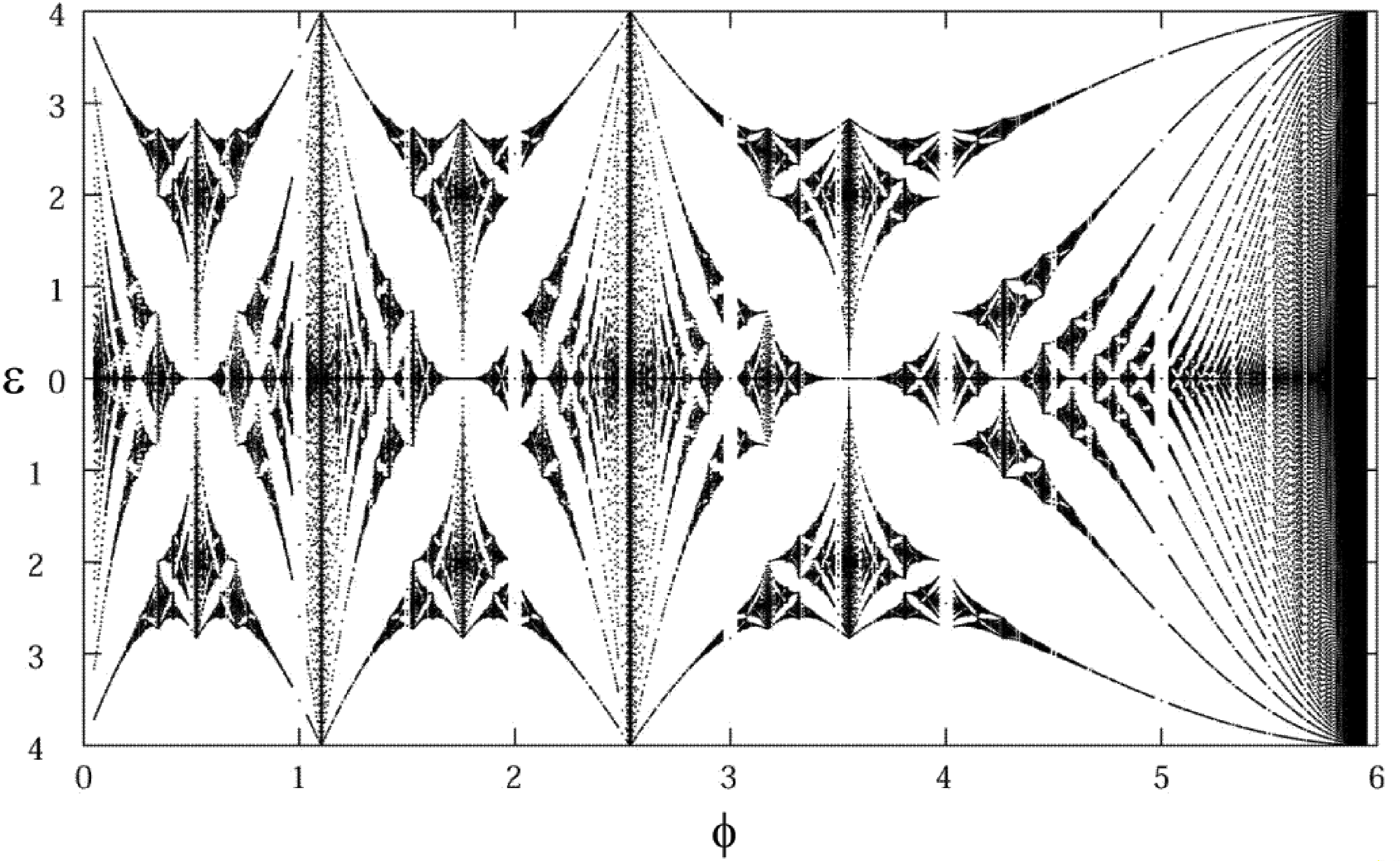
$$qr\phi^2 - 4sq\phi + 4sp = 0, \qquad \left(p\text{ は }q\text{ と互いに素な整数},\quad \theta = \frac{r}{s}\right)$$

の解

$\theta = 1/3$



$\theta = 1/3$



結論

- (スター)ゲージ不変な定式化を行った。
- 可換空间と似たような結果を得たが、非可換性の効果もみられる。
- 但し、非可換空间における磁場は、ゲージ依存の量である。

$$\mathcal{B}_j = -\frac{1}{2}\epsilon_{jkl}\mathcal{F}_{kl}$$

NC磁場はゲージ依存量

スター・ゲージ変換性

$$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = \mathcal{F}_{\mu\nu} - \frac{\theta_{ab}}{2}\partial_a\lambda\partial_b\mathcal{F}_{\mu\nu}$$

- 今回得た置き換えやHofstadter Butterfly図は非可換性が小さい時有効であろう。