

基礎物理学研究所 2009 年度前期研究会

場の理論と弦理論

日程：2009 年 7 月 6 日（月） - 7 月 10 日（金）

場所：京都大学 湯川記念館 Panasonic 国際交流ホールおよび 会議室 (Y206, Y306)

概要

本研究会は、弦理論・場の量子論を中心とした幅広い研究に関する成果の発表及び討論の場を提供し、今後のこの分野の発展を促すことを目的としたものです。また、若手の育成のため、若手研究者が発表の機会を持つと共に、最先端の研究に触れ他の研究者と議論を深める貴重な機会となるよう企画されました。研究会の参加者は 120 人を超え、5 つの招待講演、40 の口頭講演および 18 のポスター発表がありました。招待講演の内容と研究会で議論された具体的なテーマは以下の通りです。

招待講演

- 坂本 真人 氏（神戸大）
“Quantum Field Theory at a Lifshitz Point”
- 高橋 史宜 氏（IPMU）
“Dark matter and cosmic-ray anomalies ”
- 疋田 泰章 氏（KEK）
“超伝導のホログラフィック双対な記述に向けて ”
- 古崎 昭 氏（理研）
“トポロジカル絶縁体・超伝導体 ”
- 渡利 泰山 氏（IPMU）
“F-理論のコンパクト化の理論的進展と現象論への応用 ”

具体的なテーマ

- 弦理論および重力理論
弦の場の理論、行列理論、ブラックホール、量子重力、ブレーンワールド、等
- 場の量子論における進展
超対称ゲージ理論、高次元ゲージ理論、ゲージ理論の双対性、ラージ N 展開、格子ゲージ理論、繰り込み群、等
- 弦理論と場の理論の交流
AdS/CFT 対応、共形場理論、非可換時空上の場の理論、位相的場の理論と弦理論、可解模型と弦理論、Chern-Simons 理論、Holographic QCD 等

世話人

今村 洋介 (東京大)、太田 信義 (近畿大)、加藤 光裕 (東京大)、国友 浩 (京大基研)、坂本 真人 (神戸大)、佐藤 勇二 (筑波大学)、杉本 茂樹 (IPMU)、高柳 匡 (IPMU)、橋本 幸士 (理研)、浜中 真志 (名古屋大)、森山 翔文 (名古屋大)、寺嶋 靖治 (京大基研、連絡責任者)

プログラム

括弧内の数字は講演時間(分)です。タイトル末尾の * は招待講演、† は研究会報告未着をそれぞれ表します。

基研研究会「場の理論と弦理論」
プログラム (2009年7月6日~7月10日)

— 会場：湯川記念館 Panasonic 国際交流ホール 及び 会議室 (Y206,Y306) —

7月6日(月)

午後 1 12:30-13:40

高橋史宜 (東大 IPMU) Dark matter and cosmic-ray anomalies (60)*

————— 休憩 (30 分) —————

午後 2 14:10-15:25

伊藤克美 (新潟大教育) Anomalies in Exact Renormalization Group (20)
水上史絵 (中央大理工) Fine tuning problems in gauge hierarchy and inflation (20)
佐野正和 (北大理) ブレーンガスを用いたダークマターの可能性 (20)

————— 休憩 (15 分) —————

午後 3 15:40-16:30

松尾俊寛 (岡山光量子研) Massless radiation from rotating string (20)
知崎陽一 (お茶大人間文化) pp-wave 上の共变的超弦の場における低エネルギー作用 (20)

————— 休憩 (15 分) —————

午後 4 16:45-17:35

松本拓也 (名大多元数理) Serre Relation and Higher Grade Generators of the AdS/CFT Yangian Symmetry (20)
一ノ瀬祥一 (静岡県立大食品栄養科学) 高次元場の理論の量子化と新しい正則化法 (20)†

7月7日(火)

午前 1 9:00-10:10

渡利泰山 (東大 IPMU) F-理論のコンパクト化の理論的進展と現象論への応用 (60)*

————— 休憩 (30 分) —————

午前 2 10:40-11:30

溝口俊弥 (KEK)

Yet Another Alternative to Compactification - Nambu, Kobayashi-Maskawa in string theory - 小林・益川の予言は交差するブレイン上の南部・Goldstone モードによって実現されていた! ”Mo Calabi-Yau wa iranai” (20)

安達裕樹 (神戸大理)

ゲージ・ヒッグス統一模型における異常磁気モーメント・電気双極子モーメントの性質 (20)

————— 休憩 (15 分) —————

午前 3 11:45-13:00

太田信義 (近畿大理工)

Black Holes in the Dilatonic Einstein-Gauss-Bonnet Theory in Various Dimensions -Case with negative cosmological term- (20)

島田英彦 (Max Planck 研)

On on-shell closure of maximal superconformal symmetry and its application (20)

清水将英 (北大理)

コンパクト Calabi-Yau 多様体に対する開弦のミラー対称性の解析 (20)

————— 昼食 (75 分) —————

午後 1 14:15-15:30

西中崇博 (阪大理)

Holographic Renormalization Group with Gravitational Chern-Simons Term (20)

西岡辰磨 (京大理)

CFT Duals for Extreme Black Holes (20)

小川軌明 (京大基研)

Higher-Derivative Corrections to the Asymptotic Virasoro Symmetry of 4d Extremal Black Holes (20)

————— 休憩 (45 分) —————

午後 2) 16:15-17:30

黒木経秀 (立教大)

Spontaneous supersymmetry breaking in matrix models (20)

東武大 (撰南大工)

Monte Carlo studies of the six-dimensional IKKT model (20)

Cecilia Albertsson (京大基研)

Structures on doubled geometry (20)

7月8日(水)

午前 1 9:00-10:10

坂本真人 (神戸大理)

Quantum Field Theory at a Lifshitz Point (60)*

————— 休憩 (30 分) —————

午前 2 10:40-11:55

岸本功 (理研)
大橋圭介 (京大理)
衛藤稔 (理研)

Vacuum structure around identity based solutions (20)
一般の非アーベリアンゲージ理論におけるポーテックスについて (20)[†]
高密度 QCD におけるカラー超伝導ポーテックス (20)

————— 休憩 (15分) —————

午前 3 12:10-13:00

中島宏明 (Sungkyunkwan 大) Vortex-type BPS Solitons in Mass-deformed ABJM Model (20)
八木太 (京大基研) Toward M5 branes from ABJM action (20)

————— 昼食 (75分) —————

午後 1: ポスター紹介 14:15-14:45

午後 2 (Poster Session) 14:45-16:15, 16:35-18:00

新井真人 (Sogang 大) Domain walls in massive nonlinear sigma model on quadric surface
石田明 (名大多元数理) Towards boundary open-closed string field theory
大谷聡 (神戸大理) Particle Propagation on a Circle with a Point Interaction
木村祐介 (London 大 Queen Mary) Holomorphic maps and the complete $1/N$ expansion of 2D SU(N) Yang-Mills
坂拓哉 (東工大理) Instanton Calculus in Deformed N=4 Super Yang-Mills Theory
土屋陽一 (東大理) Right-handed Neutrinos in F-theory Compactifications
富野弾 (台湾国家理論科学研究中心) Supersymmetric reduced models with a symmetry based on Filippov algebra
西山精哉 (Coimbra 大) Anomaly-Free Supersymmetric Sigma-Model Based on the SO(2N+1) Lie Algebra of the Fermion Operators - Optimization of a Reduced Scalar Potential and a Proper Solution -
西脇健二 (神戸大理) 余剰次元空間の幾何学を起源とする高次元ゲージ理論における CP の破れ
長谷部一気 (諺問電波高専) Supersymmetric Quantum Spin Model and Quantum Hall Effect
浜中真志 (名大多元数理) 非可換 Anti-Self-Dual Yang-Mills 方程式の数理と可積分系
林博貴 (東大理) Codimension-3 Singularities and Yukawa Couplings in F-theory
藤田充俊 (京大理) BPS operators from the Wilson loop in the 3-dimensional supersymmetric Chern-Simons theory
藤森俊明 (東工大理) Monopoles in the Higgs phase with arbitrary gauge groups[†]
堀田健司 (北大理) Creation of D9-brane-anti-D9-brane Pairs from Hagedorn Transition of Closed Strings — whether first order phase transition or second order one?[†]
本多正純 (総研大) 4次元 N=4 Super Yang-Mills 理論におけるウィルソン・ループのモンテカルロ計算
松尾善典 (APCTP) 球面及び非可換空間上の N=1 SYM の行列模型を用いた正則化
丸吉一暢 (京大基研) N=1 dualities from N=2 dualities

7月9日(木)

午前 1 9:00-10:10

古崎昭(理研)

トポロジカル絶縁体・超伝導体 (60)*

————— 休憩 (25 分) —————

午前 2 10:35-11:45

足田泰章(KEK)

超伝導のホログラフィック双対な記述に向けて (60)*

————— 休憩 (25 分) —————

午前 3 12:10-13:00

岡村隆(関西学院大理工)

ホログラフィック超伝導モデルの超流動特性について (20)

阪口真(岡山光量子研)

Super Galilean conformal algebra in AdS/CFT (20)

————— 昼食 (75 分) —————

午後 1 14:15-15:30

吉田健太郎(京大理)

Coset construction of gravity duals for NRCFTs (20)

畔柳竜生(京大理)

On String Theory Duals of Lifshitz-like Fixed Points (20)

平山貴之(國家理論科學研究
中心)

Unruh effect and Holography (20)

————— 休憩 (45 分) —————

午後 2 16:15-17:30

丸信人(中央大理工)

Meson-Nucleon Coupling from AdS/QCD (20)

石原雅文(九大理)

Baryonium in Confining Gauge Theories (20)

笹井裕也(京大基研)

The Cutkosky rule of three dimensional noncommutative field theory in Lie algebraic noncommutative spacetime (20)

7月10日(金)

午前 1 9:00-10:15

伊藤悦子(工学院大)

格子シミュレーションによる共形場の理論の探索 (20)

斉藤 準(北大理)

Lattice Supersymmetry with a Deformed Superalgebra (20)

加堂大輔(理研)

Lattice formulation of 2D N=(2,2) SQCD based on the B model twist. (20)

————— 休憩 (15 分) —————

午前 2 10:30-11:45

鈴木博(理研)

Supersymmetry restoration in a small volume lattice (20)

伊敷吾郎(KEK)

行列模型を用いた $R \times S^3$ 上の N=4 SYM における相関関数の数値的解析 (20)

島崎信二(京大理)

A new type of large N reduction for Chern-Simons theory on S^3 (20)

————— 休憩 (15 分) —————

午前 3 12:00-13:15

長岡悟史 (KEK)

吉岡礼治 (大阪市大)

森田健 (Tata 研)

String coupling and interactions in type IIB matrix model (20)

行列模型のオリエンティフォルディングと有効相互作用における時
空の非対称性 (20)

Dynamical Topology Change of Black hole and Matrix Model. (20)

Dark matter and cosmic-ray anomalies

Institute for the Physics and Mathematics of the Universe, University of Tokyo

Fuminobu Takahashi

E-mail: `fuminobu.takahashi@ipmu.jp`

After giving a review of recent cosmic-ray observations such as PAMELA, ATIC/PPB-BETS, Fermi and H.E.S.S, I explain what kind of conditions must be met if the PAMELA/Fermi excesses are due to dark matter. Finally I will give one dark matter model based on a Wino LSP with a tiny R-parity violation.

The presence of dark matter (DM) has been firmly established by numerous observational data, although we have not yet understood what dark matter is made of. Recent cosmic-ray measurements aiming for indirect DM detection may be providing us with insights into DM.

The PAMELA data [1] showed that the positron fraction starts to deviate from a theoretically expected value for secondary positrons around 10 GeV, and continues to increase up to about 100 GeV. The ATIC collaboration [2] released the data, showing a clear excess in the total flux of electrons plus positrons peaked around 600 – 700 GeV, in agreement with the PPB-BETS observation [3]. The excess in the positron fraction may be explained by astrophysical sources like pulsars [4, 5] or microquasars [6], although it was not easy to account for the electron flux with a sharp drop-off observed by ATIC.¹ An alternative explanation is the annihilation and/or decay of DM. Indeed, the exciting PAMELA and ATIC/PPB-BETS data has stimulated new directions in dark-matter model building [8].

Recently, the Fermi collaboration has released data on the electron/positron fluxes from 20 GeV up to 1 TeV [9]; the spectrum falls as $E^{-3.0}$ without prominent spectral features, and it is in agreement with the H.E.S.S. data at $E \sim 1$ TeV [10, 11]. The index of the observed electron/positron spectrum is close to the high end of theoretically expected value. Moreover, if we combine the Fermi data for $E \leq 1$ TeV and the H.E.S.S. data for $E \geq 1$ TeV, it looks that the spectrum becomes softer at energies above 1 TeV. Importantly, the Fermi result did not confirm the excess around $E \simeq 600$ GeV reported by ATIC. From this observation, we regard the relatively hard (and almost featureless) electron/positron spectrum below 1 TeV reported by Fermi as an excess with respect to the background. If the electron/positron spectrum observed by Fermi (as well as the positron fraction observed by PAMELA) is to be explained by the DM annihilation/decay, the mass of DM must be $\mathcal{O}(1)$ TeV.

One important constraint on the DM models comes from the absence of excess in the anti-proton flux [12, 13]. Also, the anomalies in the electrons and positrons require that the initial energy spectrum of the electrons and positrons should be relatively hard. Those observational evidences suggest that DM annihilation/decay mainly produces leptons, while hadronic activities

¹See however Ref. [7] which pointed out that astrophysical sources may lead to a sharp drop in the spectrum.

of DM are suppressed. The models proposed so far are broadly divided into two categories concerning how to suppress the antiproton production. One category is such that the dark matter particle mainly annihilates or decays into leptons. For instance, the dark matter may be a hidden $U(1)_H$ gauge boson decaying into the standard model particles through a kinetic mixing with a $U(1)_{B-L}$ gauge boson; the smallness of quark's quantum number under the $U(1)_{B-L}$ naturally suppresses the anti-proton production [14]. Perhaps the dark matter particle has a lepton number [15, 16], or the lepton number as well as a discrete symmetry, which is responsible for the longevity of dark matter, may be slightly broken altogether [17, 18, 19]. The other category introduces a light particle in the dark sector so that the dark matter particle annihilates or decays into the light particles, which then decay into the standard model particles. If the mass of the light particle is lighter than 1 GeV, the hadronic branch will be suppressed [20]. In addition, the presence of such light particle may enhance the annihilation rate to account for the relatively large positron production rate suggested by the PAMELA/Fermi data.

While the above recently proposed DM models certainly have new interesting features, a model would become more attractive if it relies on a conventional weakly interacting massive particle (WIMP) scenario. This is because the observed DM abundance can be naturally explained by its thermal relic abundance, and such a coincidence is known as “the WIMP miracle.” One of the WIMPs that have been discussed extensively in many different context is the lightest supersymmetry (SUSY) particle called as LSP in the SUSY standard model (SSM). The stability of the LSP can be guaranteed by assuming an exact R parity. However, the R-parity may not necessarily be an exact symmetry. In fact, the LSP can still account for DM as long as R-parity breaking terms are sufficiently small and the lifetime of the LSP is much longer than the present age of the Universe. If this is the case, the decay of DM may give rise to some excesses in cosmic rays.

It is known that the superpotential possesses a constant term C_0 to cancel the positive energy density induced by SUSY breaking. The constant term is equal to the gravitino mass, $C_0 = m_{3/2}$, in the Planck unit in which the Planck mass $M_P \simeq 2.4 \times 10^{18}$ GeV is set to be unity. The constant term breaks the continuous $U(1)_R$ symmetry down to a discrete Z_2 symmetry, which is nothing but the R-parity. A crucial observation is that, if the R symmetry at high-energies is not the continuous $U(1)_R$ but a discrete Z_{2k+1} ($k = \text{integer}$), the constant term C_0 results in the R-parity breaking [21]. In this article we take $k = 2$, since, as we will see later, it leads to the required magnitude of the R-parity breaking operators to account for the anomalous excess in the cosmic-ray electrons and positrons.

Let us take the R charges for the quark and lepton chiral multiplets to be 1 and those for the Higgs chiral multiplets H_u and H_d to be 0. (See Table 1.) Then, the following lepton-number violating trilinear term is allowed by the Z_{5R} symmetry:

$$W = \kappa_{ijk}(C_0)^2 \bar{e}_i L_j L_k, \quad (1)$$

	Q	\bar{u}	d	L	\bar{e}	H_u	H_d	N	M	C_0
R	1	1	1	1	1	0	0	1	0	2

Table 1: The assignment of R-charge.

where κ_{ijk} is a numerical coefficient, $i, j, k = 1, 2, 3$ denote the generation, and the summation over the SU(2) gauge indices is understood. The coupling κ_{ijk} must be antisymmetric under exchange of the last two indices ($j \leftrightarrow k$) due to the SU(2) gauge invariance. Note that the R charge of $C_0 (= m_{3/2})$ is 2. We may presume that the coefficient κ_{ijk} takes a larger value for the third (and second) generation. Therefore, in the following we focus on κ_{i23} with $i = 1, 2, 3$, which is assumed to be unsuppressed with the other terms of different combination of flavors being suppressed.

We assume that a Wino LSP accounts for the DM in the Universe. In order to explain the observed DM abundance, the Wino mass must be in the range between 2.7 TeV and 3 TeV [22]. The Wino LSP is naturally realized in the anomaly-mediated SUSY breaking [23]. Then, using the relation between the Wino mass and the gravitino mass in the anomaly mediation, we find that the gravitino mass should be about 10^3 TeV. In the presence of the R-parity breaking (1), the Wino LSP is no longer stable, and decays into neutrinos and charged leptons through the exchange of a virtual slepton. One of the decay diagrams is shown in Fig. 1. The decay rate of the Wino LSP through the interaction (1) with $(j, k) = (2, 3)$ is given by [24]

$$\Gamma(\widetilde{W}^0 \rightarrow \tau^\pm \nu_\mu e_i^\mp, \nu_\tau \mu^\pm e_i^\mp) \sim (10^{27} \text{sec})^{-1} |\kappa_{i23}|^2 \left(\frac{m_{3/2}}{10^3 \text{ TeV}} \right)^4 \left(\frac{m_{\widetilde{W}^0}}{3 \text{ TeV}} \right)^5 \left(\frac{m_{\tilde{\ell}}}{5 \text{ TeV}} \right)^{-4}, \quad (2)$$

where $m_{\widetilde{W}^0}$ denotes the Wino mass, and we have assumed the common slepton mass, $m_{\tilde{\ell}}$, for simplicity. As we will see in the next section, the lifetime (2) is close to what is needed to explain the cosmic-ray observation.

Several comments are in order. First, the bilinear term is also allowed by the Z_{5R} symmetry and takes the following form:

$$W = (C_0)^3 L H_u. \quad (3)$$

Since the bilinear term is suppressed by an additional factor C_0 compared to the trilinear term, the latter becomes much more effective than what is naively expected based on the dimensional grounds. It is not trivial, though, if the trilinear term dominates over the bilinear term as the decay processes of the LSP. Indeed, the bilinear term (3) can give a comparable contribution to the decay amplitude, unless it is further suppressed by imposing some symmetry.

Second, there may be R-parity breaking terms at tree level in the Kähler potential such as

$$K = C_0^{*2} L^\dagger H_d + \text{h.c.}, \quad (4)$$

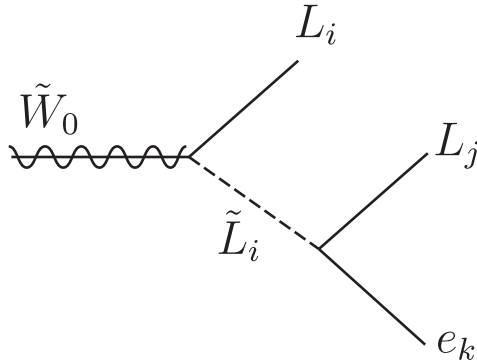


Figure 1: One of the diagrams representing the Wino decay through the trilinear R-parity breaking (1).

which induces the kinetic mixings between slepton and Higgs boson and between lepton and Higgsino. Thus the decay amplitudes through this operator (4) is suppressed by either Higgs boson mass or lepton mass. Therefore we can neglect their effect on the decay. Note that the above terms also arise at one-loop level due to the renormalization group evolution through the R-parity breaking trilinear terms eLL (or QdL) and the Yukawa coupling. In this case the operator is suppressed by a loop factor and the Yukawa couplings. Also, if there is an operator like $K = C_0^{*2}|Z|^2L^\dagger H_d + \text{h.c.}$ with Z being a SUSY breaking field, it give a comparable contribution to the decay amplitude as (3).

Third, there could be the other trilinear terms including quark multiplets, $\bar{u}\bar{d}\bar{d}$ and $Q\bar{d}L$. As to the $\bar{u}\bar{d}\bar{d}$ operator, it may have only negligible effects on the decay processes if the DM is a pure Wino. On the other hand, the Z_{5R} symmetry alone cannot suppress the decay into quarks through the $Q\bar{d}L$ term. Such trilinear operators as well as the above mentioned bilinear term can be suppressed by invoking an additional flavor symmetry [25].

Let us now discuss the cosmic ray signals from the LSP decay. Its decay pattern depends on the R-breaking structure and the SSM mass spectrum. For a demonstration, we consider the case that the $\bar{e}_i L_2 L_3$ ($i = 1, 2, 3$) term dominates the R-breaking and assume that $\text{BF}(\text{DM} \rightarrow \tau^\pm \nu_\mu e_i^\mp) = \text{BF}(\text{DM} \rightarrow \nu_\tau \mu^\pm e_i^\mp) = 0.5$. We have used the constant matrix element in the three-body phase space, for simplicity. The electron and positron energy spectrum is estimated with the program PYTHIA [26]. For the propagation of the cosmic ray in the Galaxy, we adopt the same set-up in Ref. [27], based on Refs. [28, 19]. As for the electron and positron background, we have used the estimation given in Refs. [29, 30], with a normalization factor $k_{\text{bg}} = 0.68$. In Fig. 2, we show the positron fraction and the electron and positron total flux. We set that $m_{\text{DM}} = 3$ TeV and the lifetime is 9×10^{25} sec. As can be seen from Fig. 2, the cosmic-ray signal

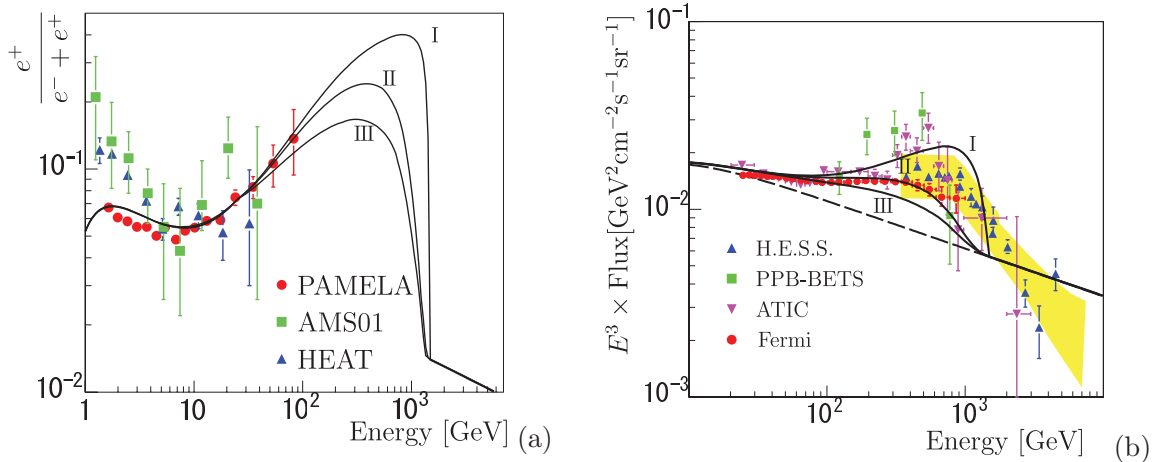


Figure 2: Cosmic ray signals in the present model. (a): positron fraction with experimental data [1, 31, 32]. (b): positron and electron fluxes with experimental data [9, 10, 11, 2, 3]. The yellow zone shows a systematic error and the dashed line shows the background flux. I, II and III represent the cases that $\bar{e}_1 L_2 L_3$, $\bar{e}_2 L_2 L_3$ and $\bar{e}_3 L_2 L_3$ dominate the R-breaking, respectively.

in the present model can nicely fit the PAMELA data for $i = 1, 2, 3$. On the other hand, the prediction in case of $i = 1$ fails to explain the Fermi data due to the presence of hard electrons produced by the LSP decay, leading to the bump at 1 TeV. The prediction in case of $i = 2$ gives a very good fit to the Fermi data. Considering uncertainties in the background estimation as well as the SSM mass spectrum, however, the case of $i = 3$ may be able to give an equally good fit.

In this article we have presented the R-parity breaking model in which the trilinear term becomes important and appears with a coefficient proportional to powers of the gravitino mass. We have also shown that the Wino LSP decaying through the lepton-number violating trilinear term (1) can account for the PAMELA and Fermi data.

There are several non-trivial coincidence in our scenario. First of all, the change in the power index of the electron/positron spectrum suggests the DM of mass a few TeV. This is intriguingly close to the mass of the thermal relic Wino DM. Assuming the anomaly mediation, the gravitino mass is determined to be about 10^3 TeV. In our model on the R-parity violation, the lifetime of the Wino LSP is determined by some combination of the Wino mass and the gravitino mass. Substituting the above values for the Wino and gravitino masses, we have obtained the lifetime which is surprisingly close to what is needed to account for the cosmic-ray anomalies. We also note that there is another interesting coincidence arising from an inflation model: the WMAP normalization leads to the gravitino mass of 10^3 TeV in a new inflation model which is

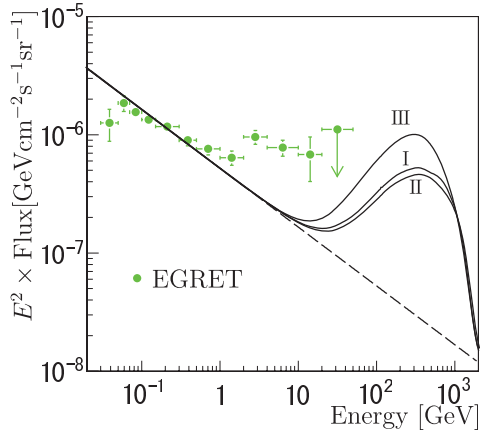


Figure 3: Predicted signals of diffuse gamma-ray flux shown together with the EGRET data [35, 36]. We have included the prompt and final-state radiation from the dark matter decay. We set the gamma ray background flux as $5.18 \times 10^{-7} (E/1\text{GeV})^{-2.499} \text{ GeV}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1}$.

consistent with the Z_{5R} symmetry [33]. Further study of the prediction of other cosmic rays such as gamma-rays, antiprotons and neutrinos², as well as future observational data, will enable us to tell whether those are just coincidence or may reflect from the characteristics of DM and the underlying physics beyond the SM.

We can see from Fig. 2 that the fit to the Fermi data becomes better if the decay products include the charged leptons in the second and third generations, namely, muons and taus. In particular, if the decay product is dominated by the muon (as in the case II of Fig. 2), the fit looks pretty good. It is actually possible to give a equally nice fit to the Fermi data, if we properly combine the contributions from the first and third generations. This is indeed the case if we consider unsuppressed κ_{313} . Such flavor dependence may be probed by studying the diffuse gamma-ray in detail. For reference we show in Fig. 3 the predicted diffuse gamma-ray signals for the cases I, II and III. Including more taus in the final states generically lead to larger signal in the diffuse gamma-ray. We may be able to untangle the flavor dependence by making use of the different predictions.

References

- [1] O. Adriani *et al.*, arXiv:0810.4995 [astro-ph].

²Our model is consistent with the current observational bound on the neutrino production from decaying DM [34].

- [2] J. Chang *et al.*, Nature 456 (2008) 362-365.
- [3] S. Torii *et al.*, arXiv:0809.0760 [astro-ph].
- [4] F. A. Aharonian, A. M. Atoyan and H. J. Volk, Astron. Astrophys. **294**, L41 (1995).
- [5] D. Hooper, P. Blasi and P. D. Serpico, arXiv:0810.1527 [astro-ph];
H. Yuksel, M. D. Kistler and T. Stanev, arXiv:0810.2784 [astro-ph].
- [6] S. Heinz and R. A. Sunyaev, Astron. Astrophys. **390**, 751 (2002) [arXiv:astro-ph/0204183].
- [7] S. Profumo, arXiv:0812.4457 [astro-ph]; K. Ioka, arXiv:0812.4851 [astro-ph].
- [8] C. R. Chen, F. Takahashi and T. T. Yanagida, Phys. Lett. B **671**, 71 (2009) [arXiv:0809.0792 [hep-ph]]. arXiv:0811.0477 [hep-ph]; A. E. Nelson and C. Spitzer, arXiv:0810.5167 [hep-ph]; I. Cholis, D. P. Finkbeiner, L. Goodenough and N. Weiner, arXiv:0810.5344 [astro-ph]; Y. Nomura and J. Thaler, arXiv:0810.5397 [hep-ph]; R. Harnik and G. D. Kribs, arXiv:0810.5557 [hep-ph]; D. Feldman, Z. Liu and P. Nath, arXiv:0810.5762 [hep-ph]; C. R. Chen and F. Takahashi, JCAP **0902**, 004 (2009) [arXiv:0810.4110 [hep-ph]]; P. f. Yin, Q. Yuan, J. Liu, J. Zhang, X. j. Bi, S. h. Zhu, X. Zhang arXiv:0811.0176 [hep-ph]; K. Ishiwata, S. Matsumoto and T. Moroi, arXiv:0811.0250 [hep-ph]; Y. Bai and Z. Han, arXiv:0811.0387 [hep-ph]; P. J. Fox and E. Poppitz, arXiv:0811.0399 [hep-ph]; K. Hamaguchi, E. Nakamura, S. Shirai and T. T. Yanagida, arXiv:0811.0737 [hep-ph]; T. Hur, H. S. Lee and C. Luhn, JHEP **0901**, 081 (2009) [arXiv:0811.0812 [hep-ph]]; E. Ponton and L. Randall, arXiv:0811.1029 [hep-ph]; M. Pospelov, arXiv:0811.1030 [hep-ph]; S. Baek and P. Ko, arXiv:0811.1646 [hep-ph]; E. J. Chun and J. C. Park, JCAP **0902**, 026 (2009) [arXiv:0812.0308 [hep-ph]]; M. Pospelov and M. Trott, arXiv:0812.0432 [hep-ph]; A. Arvanitaki, S. Dimopoulos, S. Dubovsky, P. W. Graham, R. Harnik and S. Rajendran, arXiv:0812.2075 [hep-ph]; R. Allahverdi, B. Dutta, K. Richardson-McDaniel and Y. Santoso, arXiv:0812.2196 [hep-ph]; K. Hamaguchi, S. Shirai and T. T. Yanagida, Phys. Lett. B **673**, 247 (2009) [arXiv:0812.2374 [hep-ph]].
- [9] A. A. Abdo *et al.* [The Fermi LAT Collaboration], Phys. Rev. Lett. **102**, 181101 (2009) [arXiv:0905.0025 [astro-ph.HE]].
- [10] F. Aharonian *et al.* [H.E.S.S. Collaboration], Phys. Rev. Lett. **101**, 261104 (2008) [arXiv:0811.3894 [astro-ph]].
- [11] F. Aharonian *et al.* [H.E.S.S. Collaboration], arXiv:0905.0105 [astro-ph.HE].
- [12] O. Adriani *et al.*, Phys. Rev. Lett. **102**, 051101 (2009) [arXiv:0810.4994 [astro-ph]].

- [13] A. Yamamoto *et al.*, *Adv. Space Res.* **42**, 442 (2008).
- [14] C. R. Chen, F. Takahashi and T. T. Yanagida, in Ref. [8]; C. R. Chen, Mihoko M. Nojiri, F. Takahashi and T. T. Yanagida, arXiv:0811.3357 [astro-ph]; S. Shirai, F. Takahashi and T. T. Yanagida, arXiv:0902.4770 [hep-ph].
- [15] T. Asaka, K. Ishiwata and T. Moroi, *Phys. Rev. D* **73**, 051301 (2006) [arXiv:hep-ph/0512118].
- [16] C. R. Chen and F. Takahashi, in Ref. [8].
- [17] F. Takayama and M. Yamaguchi, *Phys. Lett. B* **485**, 388 (2000) [arXiv:hep-ph/0005214].
- [18] W. Buchmuller, L. Covi, K. Hamaguchi, A. Ibarra and T. Yanagida, *JHEP* **0703**, 037 (2007) [arXiv:hep-ph/0702184].
- [19] A. Ibarra and D. Tran, *JCAP* **0807**, 002 (2008) [arXiv:0804.4596 [astro-ph]]; K. Ishiwata, S. Matsumoto and T. Moroi, *Phys. Rev. D* **78**, 063505 (2008) [arXiv:0805.1133 [hep-ph]].
- [20] I. Cholis, L. Goodenough and N. Weiner, arXiv:0802.2922 [astro-ph]; N. Arkani-Hamed, D. P. Finkbeiner, T. R. Slatyer and N. Weiner, *Phys. Rev. D* **79**, 015014 (2009) [arXiv:0810.0713 [hep-ph]]; M. Pospelov and A. Ritz, *Phys. Lett. B* **671**, 391 (2009) [arXiv:0810.1502 [hep-ph]].
- [21] K. Kurosawa, N. Maru and T. Yanagida, *Phys. Lett. B* **512**, 203 (2001) [arXiv:hep-ph/0105136].
- [22] J. Hisano, S. Matsumoto, M. Nagai, O. Saito and M. Senami, *Phys. Lett. B* **646**, 34 (2007) [arXiv:hep-ph/0610249].
- [23] L. Randall and R. Sundrum, *Nucl. Phys. B* **557**, 79 (1999); G. F. Giudice, M. A. Luty, H. Murayama and R. Rattazzi, *JHEP* **9812**, 027 (1998); J. A. Bagger, T. Moroi and E. Poppitz, *JHEP* **0004**, 009 (2000).
- [24] E. A. Baltz and P. Gondolo, *Phys. Rev. D* **57**, 2969 (1998) [arXiv:hep-ph/9709445].
- [25] S. Shirai, F. Takahashi and T. T. Yanagida, arXiv:0905.0388 [hep-ph].
- [26] T. Sjostrand, S. Mrenna and P. Skands, *JHEP* **0605**, 026 (2006) [arXiv:hep-ph/0603175].
- [27] S. Shirai, F. Takahashi and T. T. Yanagida, in Ref. [14].
- [28] J. Hisano, S. Matsumoto, O. Saito and M. Senami, *Phys. Rev. D* **73**, 055004 (2006) [arXiv:hep-ph/0511118].

- [29] I. V. Moskalenko and A. W. Strong, *Astrophys. J.* **493**, 694 (1998) [arXiv:astro-ph/9710124].
- [30] E. A. Baltz and J. Edsjo, *Phys. Rev. D* **59**, 023511 (1999) [arXiv:astro-ph/9808243].
- [31] M. Aguilar *et al.* [AMS-01 Collaboration], *Phys. Lett. B* **646**, 145 (2007) [arXiv:astro-ph/0703154].
- [32] S. W. Barwick *et al.* [HEAT Collaboration], *Astrophys. J.* **482**, L191 (1997) [arXiv:astro-ph/9703192].
- [33] K. I. Izawa and T. Yanagida, *Phys. Lett. B* **393**, 331 (1997) [arXiv:hep-ph/9608359]; M. Ibe, Y. Shinbara and T. T. Yanagida, *Phys. Lett. B* **642**, 165 (2006) [arXiv:hep-ph/0608127].
- [34] J. Hisano, M. Kawasaki, K. Kohri and K. Nakayama, arXiv:0812.0219 [hep-ph].
- [35] P. Sreekumar *et al.* [EGRET Collaboration], *Astrophys. J.* **494**, 523 (1998) [arXiv:astro-ph/9709257].
- [36] A. W. Strong, I. V. Moskalenko and O. Reimer, *Astrophys. J.* **613**, 956 (2004) [arXiv:astro-ph/0405441].

Anomalies in Exact Renormalization Group¹

新潟大学教育学部物理 伊藤 克美

E-mail: itoh@ed.niigata-u.ac.jp

本講演では、1) 厳密くりこみ群においてアノマリーがどう位置づけられるか、あるいはどう現れるべきか、という話をした後、2) $U(1)_V \times U(1)_A$ ゲージ論を例にとって具体的に計算して見せた。

スケール Λ_0 で定義された作用 $S[\phi; \Lambda_0]$ についての経路積分

$$\mathcal{Z}_\phi[J] = \int \mathcal{D}\phi (-S[\phi; \Lambda_0] - K_0 J \cdot \phi) \quad (1)$$

を考える。²この経路積分を赤外切断 Λ のところまでのモードについて積分すると分配関数

$$Z_\Phi[J] \equiv \int \mathcal{D}\Phi (-S[\Phi; \Lambda] - K_\Lambda^{-1} J \cdot \Phi) \quad (2)$$

を得る。 $S[\Phi; \Lambda]$ は Wilson 作用、 $S[\Phi; \Lambda] \equiv \frac{1}{2} \Phi \cdot K^{-1} D \cdot \Phi + S_I[\Phi; \Lambda]$ である。但し、相互作用項は以下で与えられる：

$$\exp(-S_I[\Phi; \Lambda]) \equiv \int \mathcal{D}\chi \exp \left[-\frac{1}{2} \chi \cdot (K_0 - K_\Lambda)^{-1} D \cdot \chi - S_I[\Phi + \chi; \Lambda_0] \right].$$

さて、 Λ_0 で定義される理論に対称性があるとすると、変換 $\delta\phi$ を用いて表わされる Ward-Takahashi 演算子

$$\Sigma[\phi; \Lambda_0] \equiv \frac{\partial^r \mathcal{S}}{\partial \phi^A} \delta\phi^A - \frac{\partial^r}{\partial \phi^A} \delta\phi^A. \quad (3)$$

がゼロになる。この性質は Λ まで積分した後も Wilson 作用に対して同様に定義された WT 演算子 $\Sigma[\Phi; \Lambda]$ が消える、ということに受け継がれる： $\Sigma[\phi; \Lambda_0] = 0$ なら $\Sigma[\Phi; \Lambda] = 0$ 。

この結果は、実は、WT 演算子がくりこみ群方程式 (Polchinski 方程式) によって定義される「複合場」であることの帰結である。講演では、重要な概念である複合場について説明し、次に対称性がアノマリーを持つ場合には

$$\Sigma \sim \text{ghost} \times \text{anomaly}$$

が期待されることを説明し、具体的な例で実際にその様な形でアノマリーが現れることを確認した。

[1] Y. Igarashi, K. Itoh, and H. Sonoda, work in progress.

[2] Y. Igarashi, K. Itoh, and H. Sonoda, Prog. Theor. Phys. **118** (2007) 121-134; ibid. **120** (2008) 1017-1028.

¹本発表は [1] の共同研究に基づいている。

²記法については文献 [2] に従う。 K_0 は $p^2/\Lambda_0^2 \sim 1$ まではほぼ 1 で、それ以上の運動量についてはすばやくゼロになる様な関数。

Fine tuning problems in gauge hierarchy and inflation¹

中央大学 理工学研究科 水上史絵
E-mail: minakami@phys.chuo-u.ac.jp

高次元ゲージ理論ではコンパクト化によりゲージ場からスカラー場が現れる。このスカラー場によって対称性の破れを引き起こそうとしたのが gauge-Higgs unification model である。さらに、高次元ゲージ対称性の存在による量子効果の有限性により、Higgs 質量の微調整問題も解決されている。Higgs 質量の微調整問題は主に electroweak の対称性を破ったときに現れる Higgs に関して議論されるが、GUT の対称性の破れで生じる Higgs の質量に関しても、electroweak の Higgs 程の違いはないが微調整問題は存在する。

一方、inflation においても微調整問題が存在する。inflation を inflaton と呼ばれるスカラー場で引き起こすモデルでは、一般に inflaton potential に含まれるパラメーターの微調整問題が存在する。厳密に inflation について議論するには inflaton potential に対する量子効果を含めた effective potential を扱う必要がある。一般に量子効果は発散するので、パラメーターは cut-off scale になるが、宇宙背景放射の観測から制限されるこれらのパラメーターは小さな値を取るため、微調整が必要となる。

Higgs 質量及び inflaton の微調整問題に着目し、これらを高次元ゲージ理論によって解決するモデルを構成した。これと同時に Higgs と inflaton を同一の場とみなし、この可能性の模索を行った。我々は超弦理論の toy model として、高次元 supersymmetric SU(2) ゲージ理論を用いた。ここで Higgs と inflaton は同一の場と見なし、高次元ゲージ場からコンパクト化 (半径 R) によって現れるスカラー場を対応させた。Scherk Schwarz mechanism によって supersymmetry を破り、破れを表すパラメーターを β とした。従ってこのモデルのパラメーターは gauge coupling, β , R である。

one-loop までの Higgs-inflaton の有効ポテンシャルは cosine 型であり、インフラトンのべき関数で書かれる chaotic inflation のポテンシャルに似ている。Chaotic inflation との相違点は、既に量子効果が含まれた上で有限である為、観測から決まるポテンシャルの値に対する微調整問題が解決されているということである。また chaotic inflation では inflaton 場の値が Planck 質量より大きなところで inflation が起こるため、量子効果を含めて考えるとポテンシャルが定義できないという問題もあるが、ここでは解決されている。Inflation をうまく引き起こし、また宇宙背景放射の観測結果に合うようにモデルに含まれるパラメーターの範囲を決めると、これらの値はどれも現象論的に意味のある値であった。また、inflaton の質量はおよそ $10^{13} GeV$ であり、Higgs と同一の場であるならば、これは GUT と標準模型の間に存在する intermediate scale の理論の対称性を破る Higgs であると考えられる。

詳細は脚注の文献を参照していただきたい。

¹この話は稲見武夫、小山陽次 (中央大)、林青司 (神戸大) との共同研究 arXiv:0903.3637 [hep-th] に基づく。

ブレンガスを用いたダークマターの可能性¹

北海道大学 大学院理学院 素粒子論研究室 佐野 正和

E-mail: sano@particle.sci.hokudai.ac.jp

弦理論から宇宙を理解しようとする試みの一つに String/Brane gas model [2, 3] がある。このモデルでは、弦理論に自然に含まれている弦やブレンが様々な空間に巻き付く場合に、宇宙のダイナミクスを解析することを目的としている。

弦理論は 10 次元時空で定義されるので、4 次元時空を出すためには 6 次元空間をコンパクト化する必要がある。String/Brane gas model では、トーラスコンパクト化を考えた場合に、そのトーラスのスケールを固定することができるが、ディラトンが安定化されない問題が指摘されていた [4]。我々は論文 [5] で、NS5-brane や Kaluza-Klein monopole、D-brane 上の電場を含めるとディラトンも同時に固定できる具体例を示した。論文 [5] で示唆されたことは、モジュライが固定されると brane gas のエネルギー密度はダストのエネルギー密度 $\rho \propto a^{-3}$ (a は三次元空間のスケール因子) に等しくなるということである。これは内部空間方向のみに巻き付いたブレンは点粒子に見えることに理由がある。ブレンから生成される点粒子は我々の知っているバリオン等ではない。もし、この点粒子の質量が軽く電荷が小さければダークマターの候補の期待が出てくる。

この期待を調べるため、我々は論文 [1] で内部空間方向のみに巻き付いたブレンの質量、RR 電荷、そして内部空間のモジュライの揺らぎによるブレン間の相互作用を、トーラス及び Calabi-Yau コンパクト化の下で調べた。4 次元 Einstein frame での固有時間が我々の時間であるとした場合、D0-, D1-, D2-brane が weak string coupling, large volume の内部空間に対して軽くなることがわかった。また、RR 電荷やモジュライによる相互作用もそれらのブレンに対して、同じ条件で小さくなることがわかった。例えば、D0 ブレンの質量と相互作用の強さの 2 乗は、内部空間の体積の大きさがおよそ $(\mathcal{O}(10^5) \times l_{\text{Planck}})^6$ のときに、 $m_{D0} \sim \mathcal{O}(10)$ TeV、 $g_{D0}^2 \sim \mathcal{O}(10^{-30})$ となる事が示された。この事実の 1 つ理由として、背景時空が時間に依存しているにもかかわらず、 Dp と $D(6-p)$ の質量や電荷の間に”時間依存しない”電気磁気-双対性があることがわかった。

References

- [1] M. Sano and H. Suzuki, Wrapped brane gas as a candidate for Dark Matter, arXiv:0907.2495
- [2] R. H. Brandenberger and C. Vafa, Nucl. Phys. B **316**, 391 (1989)
- [3] S. Alexander, R. H. Brandenberger and D. Easson, Phys. Rev. D **62**, 103509 (2000)
- [4] A. Berndsén, T. Biswas and J. M. Cline, JCAP **0508**, 012 (2005)
- [5] M. Sano and H. Suzuki, Phys. Rev. D **78**, 064045 (2008)

¹本講演は北大の鈴木久男氏との共同研究 [1] に基づく

Massless radiation from rotating string

岡山光量子科学研究所 松尾 俊寛

E-mail: tmatsuo@yukawa.kyoto-u.ac.jp

回転する重いストリングからの零質量状態輻射率を摂動論的弦理論の方法で計算した。対応原理によれば Kerr black hole からのホーキング輻射と関係するはずである。

重いストリングからの輻射スペクトラムは、始状態の縮退について平均し、終状態の縮退について足し上げれば熱的になる事が知られているが (Amati-Russo '99)、そこでは異なる角運動量固有状態が縮退として扱われている。しかし、角運動量はマクロに観測可能なものであるので縮退として処理するのはおかしい。そこで我々は質量に加えて角運動量 J_{12} を指定した (それ以外は指定しない) 計算をおこない、輻射スペクトラムの角運動量依存性を決定した。ただし、ブラックホールには角運動量の上限 $J \leq M \simeq \sqrt{N}$ があるので、ここでは $J \ll N$ なるストリング状態に対しての結果だけを述べる。 ($J \ll N$ のような条件が出てくるのは単に計算の都合上。)

具体的に計算するものは次のとおり。レベル N 角運動量 J の始状態 $|N, J\rangle$ から、零質量ベクトル $V_\zeta(k)$ が運動量 k をもって放出され、終状態 $|N', J'\rangle$ になる確率。始状態については縮退を平均し、終状態については足し上げる :

$$P(\Phi_{N,J} \rightarrow \zeta(k) + \Phi_{N',J'}) = \frac{1}{\mathcal{G}(N, J)} \sum_{\Phi_{(N,J)}} \sum_{\Phi_{(N',J')}} \sum_{\zeta} |\langle \Phi(N', J') | V_\zeta(k) | \Phi(N, J) \rangle|^2. \quad (1)$$

ここで $\mathcal{G}(N, J)$ は状態 $|N, J\rangle$ の状態数であり、具体的には、 β_H を逆ハゲドン温度として

$$\mathcal{G}(N, J) \sim N^{-\frac{D+3}{4}} \exp(\beta_H \sqrt{N}) \cosh^{-2} \left(\frac{\beta_H J}{4\sqrt{N}} \right) \quad (2)$$

と計算できる (Russo-Susskind '94)。"光子" (偏光ベクトルが 1-2 平面内にある状態) 輻射に対する計算結果は

$$P \sim \omega \sqrt{N} e^{-\beta_H \omega} \frac{\cosh^2 \left(\frac{\beta_H J}{4\sqrt{N}} \right)}{\cosh^2 \left(\frac{\beta_H (J \pm 1)}{4\sqrt{N'}} \right)}. \quad (3)$$

この結果は、期待される熱的分布 ($\sim e^{-\beta_H(\omega \pm \Omega)}$) を示していないが、実は今の設定ではストリング状態の角速度が見えないほど小さいので、熱的分布と矛盾していない。実際、(2) と第一法則 $\delta M = T\delta S + \Omega\delta J$ から計算される角速度は

$$\Omega \sim \frac{1}{M} \tanh\left(\frac{J}{M}\right) \quad (4)$$

となり、おおきな M に対しては無視できるほど小さい。これは、サイズに関する対応原理のときと同じ状況かもしれない。つまり、ストリング状態のサイズ (ランダムウォークのサイズ \sqrt{M}) と BH のサイズ (シュバルツシルト半径 $GM \sim 1$ at 対応点) は一見一致しないのであるが、ストリングの自己相互作用を考慮にいれた計算をすると対応点で両者のサイズが一致するという議論がある (Horowitz-Polchinski, Damour-Veneziano)。角速度に関しても同様の事情になっていると思われる。自己相互作用がないストリングはもわっと膨らんでしまって第一法則から決まる角速度は大きな値を持ってないが、相互作用があればぎゅっと固まって、同じ角運動量を持つ状態でも大きな角速度を持つことができるのであろう。これを具体的に示すのは次の課題である。

pp-wave 上の共变的超弦の場における低エネルギー作用

産業技術総合研究所ナノテクノロジー研究部門 知崎 陽一

E-mail: y.chizaki@aist.go.jp

さまざまな背景場が存在している場合に、超弦の場の理論は矛盾することなく成立しているだろうか。ここで、背景場とは時空の曲がりによって表される重力場、NS-NS および R-R 反対称テンソル場、ディラトン場などである。もし、一般の背景場中の超弦の場の理論について詳しい理解が得られれば、背景場が強く効くようなブラックホール内部の物理や AdS/CFT 対応に対して詳しい解析が可能となり非常に面白い。ここでは、背景場中の超弦の場の理論を理解する第一歩として、NS-NS フラックスを持つ pp-wave (NS-NS pp-wave) 上の共变的な超弦の場の理論を構成し、その NS-NS セクターを成分場展開した低エネルギー作用と NS-NS pp-wave 上の超重力作用を 2 次摂動展開した作用との比較を行った。弦の場の理論の構成には、以前の研究 [1][2] で、NS-NS pp-wave 上の超弦理論を第一量子化する際に構成した、一般解としての弦座標や Majorana フェルミオン場および、それらを自由モードで表示する表現も用いた。弦の場の状態を定義する際必要なモードは、弦座標や Majorana フェルミオン場を直接フリーモード展開して定義するが、すべてこの自由モードを用いて表示できる。具体的には、まず超弦の場として NS-NS セクターを成分場展開した低エネルギー状態を平坦な弦の場の理論と同様な構成で定義する。すなわち、NS-NS セクターの真空に、左右 $1/2$ レベルの生成モードをかけて状態を定義し、それらのモードの係数として重力場、反対称テンソル場、2つのスカラー場および補助場を導入する。モードには自由モードの積としての相互作用が含まれるが、実はこの相互作用は期待値をとるとほとんど消えて、一部のモードに座標の一次の依存性だけが残る。この座標依存性が非常に重要である。通常、(超)Virasoro 演算子の中に含まれる微分は、運動量演算子すなわち偏微分であり、背景場の共変微分は含まれない。しかしながら、この座標依存性のおかげで、微分がモードにもかかり、係数の場に一階の微分がかかるものや微分がかからないものが登場する。そして、補助場の運動方程式の解を代入し消去すると最終的に背景時空のクリストッフェル記号が再現され、背景時空の共変微分が再現される。さらに2つのスカラー場のうちの1つをゲージ自由度によって消去し、もう1つをディラトン場と重力場のトレースに置き換えると、同じ背景場中の超重力場の2次展開作用と厳密に一致することがわかった。

(これは、立教大学理学部の矢彦沢茂明氏との共同研究に基づく)

References

- [1] Y. Chizaki and S. Yahikozawa, "Covariant BRST Quantization of Closed Strings in the pp-Wave Background", Prog. Theor. Phys. **116** (2006), 937; hep-th/0608185
- [2] Y. Chizaki and S. Yahikozawa, "General Operator Solutions and BRST Quantization of Superstrings in the pp-Wave with Torsion" Prog. Theor. Phys. **118** (2007), 1127; arXiv:0709.2991

Serre Relation and Higher Grade Generators of the AdS/CFT Yangian Symmetry

名古屋大学大学院多元数理科学研究科 松本拓也

E-mail: m05044c@math.nagoya-u.ac.jp

AdS/CFT 対応は、その対応を用いた様々な応用が研究されている一方、ゲージ理論側と弦理論側で結合定数が強弱の関係であるために、この対応を摂動論的に検証することは一般に困難である。近年、両理論の可積分性に注目することで、AdS/CFT 対応の最も基本的な例である $AdS_5 \times S^5$ 上の IIB 型超弦理論と 4 次元 $\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論との対応において、結合定数の全領域での対応が構成された。これが $SU(2|2)$ スピン鎖模型 [1] である。このスピン鎖模型で定義される 2 体の散乱行列 S_{12} は、ある表現 (Evaluation 表現) を仮定すると無限次元のヤンギアン代数の対称性をもつことが知られている。この代数は無限個の Grading をもち、Grade-0(Lie 代数) の生成子 J^A 及び Grade-1 の生成子 \hat{J}^A から生成される。この \hat{J}^A に対する Evaluation 表現は $\hat{J}|\chi\rangle = uJ|\chi\rangle$ と表わされる。 u は Evaluation パラメーターであり、物理的にはスピン鎖上の励起の運動量の関数である。Evaluation 表現が仮定されていた主な理由は、ヤンギアン代数の定義方程式の一つであるセール関係式 (1) が複雑であることによる。特に、超 Lie 代数 $SU(2|2)$ はキリング形式が縮退しているため、構造定数の添え字の上げ下げを正しく行うことが困難である。

$$[\hat{J}^A, [\hat{J}^B, J^C]] + \text{cyclic} = -\frac{\hbar^2}{24} \{J^L, J^M, J^N\} f_L^{AI} f_M^{BJ} f_N^{CK} f_{IJK} \quad (1)$$

もし、このスピン鎖模型で採用されている $SU(2|2)$ の基本表現がヤンギアンの Evaluation 表現に持ち上がっていれば、表現の上で (1) の左辺は $u^2 \times (\text{ヤコビ恒等式}) = 0$ であるので、右辺も表現上で消えていなくてはならない。本研究では、超リー代数 $SU(2|2)$ の 1-parameter 変形であり、縮退のないキリング形式をもつなど、より良い性質をもつ例外超リー代数 $d(2, 1; \varepsilon)$ で、任意の ε に対して Evaluation 表現がセール関係式と両立していることを 3 次元ガンマ行列を導入することにより実際に示した。

また、ヤンギアンの高次生成子、特に Grade-2 生成子を標準的な方法で構成すると、 $SU(2|2)$ のキリング形式が分母に来ることにより特異項が現れるが、あるゲージ固定条件を採用すると高次生成子が正則に構成できることを示した。この研究は森山翔文氏 (名大多元数理) との共同研究 [2] に基づきます。

References

- [1] N. Beisert, “The $su(2|2)$ dynamic S-matrix,” Adv. Theor. Math. Phys. **12** (2008) 945 [arXiv:hep-th/0511082].
- [2] T. Matsumoto and S. Moriyama, “Serre Relation and Higher Grade Generators of the AdS/CFT Yangian Symmetry,” arXiv:0902.3299 [hep-th].

F-理論のコンパクト化の理論的進展と現象論への応用

東京大学 数物連携宇宙研究機構 (IPMU) 渡利 泰山

E-mail:

ここ一年半の間に、F-理論の4次元へのコンパクト化に関する理解にかなりの進展があった。その理論的進展のうちの核心部分、および現象論について得られたストリング理論ならではの成果を報告する。

1 序論

Type IIA, IIB, Type I, Heterotic 理論などと並び、F-理論は超弦理論のいくつかある記述の仕方のひとつである。しかし、上述した理論には、F-理論以外にはワールドシート上の超対称共形場の理論を用いた微視的量子論的記述があるのに対し、F-理論のそれはよく知られていない。「F-理論」と呼ぶものがあるのではないかと提示されたのは1990年代の第2次ストリング革命の最中であり [1]、その当時はそれなりの関心と呼んだ。しかし、90年代末から今世紀にかけて AdS/CFT、ブラックホールの D-ブレーンによる記述、非可換幾何などといった新しい発展にともない、人々の関心は離れていった。F-理論のコンパクト化に関しては、モデュライ固定の文脈においてはその後も発展があった。しかし、非可換ゲージ理論は素粒子の標準模型の核心部分であり、非可換ゲージ理論は F-理論では幾何の特異点で表される。ゆえに F-理論のコンパクト化を標準模型の素粒子物理に用いるには、代数幾何を駆使して特異点を扱わねばならない。その難しさもあって、その為の技術開発は長いこと放置されてきた。

素粒子物理への応用の文脈では、F-理論には Type II や Type I 理論にはない利点がある；SU(5)_{GUT} 統一理論で必要とされる湯川結合を F-理論では出せるのである。SU(5)_{GUT} 統一理論では、クォークやレプトンは $\mathbf{10} = (Q, \bar{U}, \bar{E})$ と $\bar{\mathbf{5}} = (\bar{D}, L)$ という SU(5)_{GUT} の既約表現にまとめられ、湯川結合は

$$\Delta\mathcal{L} = \lambda_{ij}^{(u)} \mathbf{10}_i^{ab} \mathbf{10}_j^{cd} h(\mathbf{5})^e \epsilon_{abcde} + \lambda_{ij}^{(d/e)} \bar{\mathbf{5}}_{a;i} \mathbf{10}_j^{ab} \bar{h}(\bar{\mathbf{5}})_b \quad (1)$$

という形にまとめられる。 u, c, t クォークのアップ型湯川結合 $\bar{u}_i q_j h$ はこの第1項に含まれている。超弦理論での問題は、この第1項のような ϵ_{abcde} 完全反対称テンソルを用いる相互作用がどのようにしたら出てくるのか、ということである。Type IIA, IIB, Type I 超弦理論の D-ブレーン上の開弦の摂動的相互作用では、このような形の相互作用は出てこない。最低でも E_6 などの例外系リー代数とその $\mathfrak{su}(5)_{\text{GUT}}$ 部分代数への破れが背後にあって初めて¹、上記第1項の相互作用を出せる [2]。それが可能なのが、Heterotic $E_8 \times E_8$ 超弦理論、M-理論の G_2 ホロノミーコン

¹Pati-Salam 型の $SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$ 統一理論を考えるならば、例外系の代数にともなう相互作用を必要としない。 $\mathfrak{su}(8)$ の代数とその破れから、全ての粒子とその湯川結合を出せる。但し、Pati-Salam 型の統一理論は SU(5) 統一理論とは異なり、左巻きクォーク 2 重項 Q とレプトン 2 重項 L がおなじ既約表現に属する。ニュートリノ振動の大角度混合（とクォーク世代間の小角度混合の対立）に鑑みて、これはあまりよい可能性であるようには見えない。ニュートリノ振動は、フレーバー構造に残りうる統一対称性としては、SU(5)_{GUT} を示唆する。

コンパクト化、そして、F-理論なのである。この現象論からの動機の下では、F-理論のコンパクト化の技術開発が不足しているのは不満な状況である。

2 理論的な進展

2.1 低エネルギー自由度の同定

技術開発について最大の不満は、Kaluza–Klein スケールより下での有効場の理論に現れる自由度 (乱暴に言えば、世代数) が、F-理論のコンパクト化の幾何のどのような要素とどのように結びつくかが完全には知られていなかったことである。低エネルギーでの自由度をどのように同定するか分からなければ、その自由度がどのような相互作用をするかを議論する術はない。

$G'' = \text{SO}(10)$ や $G'' = \text{SU}(5)$ の統一理論を F-理論で実現しようとするれば、 G'' の下で非自明な表現に従う物質場が少なくとも 2 種類現れる。 $G'' = \text{SO}(10)$ の場合はスピノル表現 (もしくはそのエルミート共役) とベクトル表現であり、 $G'' = \text{SU}(5)$ の場合は $10 = \wedge^2 5$ 表現と $\bar{5}$ 表現 (もしくはそれらのエルミート共役) である。これらの物質場が F-理論では実 2 次元の内部空間 (物質場曲線 (matter curve) という) に局在しているということは、90 年代から知られていた [3, 4]。また、 $\text{SO}(10)$ -スピノル表現や $\text{SU}(5)$ - 10 表現の 4 次元の低エネルギー有効理論の独立な物質場が、物質場曲線上の独立な滑らかな波動関数 (正確には、線束の正則切断) に対応することも知られていた。この結果は、Heterotic 超弦理論で解析を行い、Heterotic–F 双対性を用いて翻訳することにより得られた [5]。しかしながら、 $\text{SO}(10)$ -ベクトル表現や $\text{SU}(5)$ - $\bar{5}$ 表現に属する物質場については、物質場曲線上の滑らかなもののみに対応するのか、それとも特異点に特別に属するような自由度があるのか、一切分からないままであった。この問題は、難しい、という理由で積み残しとなり [5]、その後 10 年が経った。しかし、 $G'' = \text{SO}(10)$ 統一理論のヒッグス場や $G'' = \text{SU}(5)$ 統一理論の $\bar{5} = (\bar{D}, L)$ 物質場やヒッグス場はこれらの表現にあたる。低エネルギー自由度のもつ湯川相互作用を F-理論を用いて調べようとするなら、この問題を避けては通れない。

F-理論に 2 次元共形場の理論を用いたような微視的量子論的定式化が知られていない以上、この問題を演繹的に解決するのは不可能である。文献 [6] では、この問題を Heterotic–F 双対性を用いて、Heterotic 理論で知られていることと無矛盾なようにという要請をおくことで解決した。要は、「難しいから」と放置されたプロセスをやりぬくことである。得られた結果は、 $G'' = \text{SO}(10)$ -ベクトル表現や $\text{SU}(5)$ - $\bar{5} + 5$ 表現の低エネルギーでの自由度もまた、物質場曲線から構成されるある実 2 次元内部空間の上での滑らかな波動関数に対応する、ということであった。また、独立な波動関数を求める際に必要になる“ポテンシャル” (線束の複素構造を決める因子) を F-理論のコンパクト化の幾何からどのように読み取るか、という問題にも同時に解決が与えられた。詳細は文献 [6] をご覧いただきたい。また、その波動関数の具体的な計算は文献 [7] に詳しい。

低エネルギーに残る独立自由度の同定の仕方が分かった今、次なる課題はそれらの相互作用をコンパクト化の幾何から導くことである。これまでに述べたような非可換ゲージ理論の非自明表現に従う物質場は、M-理論の言葉を用いれば、物質場曲線上にあるつぶれた 2-cycle に巻きついた M2-ブレーンである。そのような 2-cycle C_1 、 C_2 、そして $C_1 + C_2$ があるとき、湯川相互作用

用は、 C_1 に巻きついた M2-ブレーンと C_2 に巻きついた M2-ブレーンが合流して、 $C_1 + C_2$ に巻きついた M2-ブレーンになることに当たる。どのような湯川相互作用が必要か、という現象論的要請は、2-cycle の代数としてどのようなものが必要か、という情報に焼きなおされる。(1) 式の第 1 項を出すには E_6 の代数、第 1 項と第 2 項をまとめて同時に出すには、 E_7 もしくは E_8 が必要なことが知られている [2]。

$G'' = \text{SU}(5)$ となる F-理論のコンパクト化を以下では例に取る。F-理論の 4 次元へのコンパクト化に用いる elliptic fibered カラビ・ヤウ多様体 $\pi: X \rightarrow B_3$ は

$$y^2 = x^3 + fx + g \quad (2)$$

の形で与えられる。ここで、 f と g は B_3 上では局所的には関数として理解できるもの (線束の正則切断) であり、 B_3 の中で、 $\Delta \equiv 4f^3 + 27g^2 = 0$ となるところが 7-ブレーンになる。その中の既約成分のひとつを S とし、 B_3 の中で S の法線方向の座標を z としよう。 $G'' = \text{SU}(5)$ の対称性が破れずに 7-ブレーン S に残るのは、 X の定義方程式が、 $S \hookrightarrow X$ の周りで

$$y^2 = x^3 + a_5xy + a_4zx^2 + a_3z^2y + a_2z^3x + a_0z^5 + \dots \quad (3)$$

となるときで [3]、ただし、ここでは、 $a_{5,4,3,2,0}$ は S 上で局所的に関数となるもの (線束の正則切断) である。先に述べた物質場曲線は、それぞれ、

$$a_5 = 0 \quad (\text{for } \mathbf{10} + \overline{\mathbf{10}} \text{ repr.}), \quad P^{(5)} \equiv a_0a_5^2 - a_2a_3a_5 + a_4a_3^2 = 0 \quad (\text{for } \mathbf{5} + \mathbf{5} \text{ repr.}) \quad (4)$$

である [3]。これらは、 B_3 の中で、 $z = 0$ と上記の定義式で決まり、複素余次元 2 の特異点となっている。さらに、 B_3 の中には複素余次元 3 の特異点もあり、それは、 $a_5 = a_4 = 0$ の点、 $a_5 = a_3 = 0$ の点、そしてもう一種類の 3 種類があることが分かった [6]。これらの複素余次元 3 の点においては、 (x, y, z) 方向の特異性が、 A_4 からそれぞれ、 E_6 、 D_6 そして A_6 にはねあがる。湯川相互作用が F-理論のコンパクト化で出るとは 2-cycle の代数から分かるのだが、複素余次元 3 の点の周りの 2-cycle の代数を調べることで、実は湯川相互作用はこれらの点の周りに集中して出るとも明らかになった [6]。

2.2 特異点周りの物理の場の理論を用いた記述法

湯川相互作用は特異点の周りに集中して出る、ということなのだが、F-理論には微視的量子論的定式化が知られていない。その状況でどのようにして特異点周辺に由来する物理を扱い、湯川相互作用を定量的に計算することが可能になるのだろうか。

F-理論の定式化として、文献 [8, 9] は $7 + 1$ 次元時空 $S \times \mathbb{R}^{3,1}$ 上の超対称ヤン・ミルズ理論を用いることを提案した。その提案内容を紹介しよう。

Type IIB 超弦理論をカラビ・ヤウ複素 3 次元多様体でコンパクト化し、その正則 4-cycle に D7-ブレーンを巻くことを考えよう。サイクル S_1 に N 枚の D7-ブレーンを巻き、サイクル S_2 に M 枚の D7-ブレーンを巻くならば、コンパクト化のエネルギースケール以下での有効理論では、

D7-D7 開弦からくる自由度の物理は、 $SU(N) \times SU(M)$ ゲージ理論で記述される。2つのサイクル S_1 と S_2 の交差部分 $S_1 \cdot S_2$ は実2次元の内部空間をなし、そこには、 $SU(N) \times SU(M)$ の下で (N, \bar{M}) もしくは (\bar{N}, M) 表現に従う物質場が局在している。

この物質場の物理の記述の仕方として、ワールドシートを用いた Type IIB 弦理論の記述のかわりに、7+1 次元時空中上の $SU(N+M)$ 超対称ゲージ理論を用いることも（ある限られた目的の範囲なら）可能である。既に述べた2つの4-cycle S_1 と S_2 が、交差曲線 $S_1 \cdot S_2$ の周囲で、 $z_3 = z_{3,1}(z_1, z_2)$ for S_1 , $z_3 = z_{3,2}(z_1, z_2)$ for S_2 となっていたとしよう。このとき、通常ミンコウスキー時空 $\mathbb{R}^{3,1}$ の他に実四次元分の内部時空 S を考え、その複素局所座標を (z_1, z_2) とする。その7+1次元時空中上で $SU(N+M)$ 超対称ヤン・ミルズ理論を考える。そのボソンの自由度は、7+1次元ベクトル場と、 z_3 方向にあたる複素スカラー場 ϕ からなる。 N 枚の D7-ブレーンと M 枚の D7-ブレーンが交差している状況は、この $SU(N+M)$ ヤン・ミルズ理論で、

$$\langle \phi \rangle(z_1, z_2) = \text{diag}(\overbrace{0, \dots, 0}^N, \overbrace{z_{3,2} - z_{3,1}, \dots, z_{3,2} - z_{3,1}}^M) \quad (5)$$

という形の期待値を与えることで実現できる。対称性が $SU(N) \times SU(M)$ に破れることは明らかであるし、 $(N, \bar{M}) + (\bar{N}, M)$ 表現の非対角部分のモード展開を上記のスカラー場の期待値の下で調べれば、ゼロ質量のハイパーマルチプレットに対応する自由度が $S_1 \cdot S_2$ 交差曲線に対応する $z_{3,2} - z_{3,1} = 0$ の部分に局在することも分かる。この局在した物質場は、Type IIB 理論の D7-D7 開弦の一番軽い自由度としても捉えられるが、 $SU(N+M)$ 超対称ヤン・ミルズ理論に上記のスカラー場期待値を入れた枠組みでも、捕まえることができるのである。

F-理論のコンパクト化で、カラビ・ヤウ4次元多様体の定義方程式が局所的に

$$y^2 = x^2 + (z - z_{3,1}(z_1, z_2))^N (z - z_{3,2}(z_1, z_2))^M \quad (6)$$

という形をしているとしよう。この定義方程式は、 A_{N+M-1} 型特異点 $y^2 = x^2 + z^{N+M}$ が変形パラメータ $(z_{3,2} - z_{3,1})$ によって A_{N-1} 型特異点と A_{M-1} 型特異点にまで変形され、その変形パラメータが (z_1, z_2) の座標に依存している、と読める。この状況は上述の Type IIB 理論のコンパクト化と等価であることが知られていて、このような A 型の特異点の変形によって与えられる幾何による F-理論のコンパクト化では、D7-D7 開弦に相当する自由度の一部を $SU(N+M)$ ゲージ理論によって取り扱うことができる。

F-理論のコンパクト化では、一般に A 型だけでなく、D 型や E 型の特異点とその変形を扱わねばならない。とくに式(1)の第1項のアップ型湯川相互作用を出すには E 型の特異点の変形が必要である。E 型の特異点とその変形は、Type IIB 超弦理論の D7-ブレーンで扱うことはできない。Katz-Vafa [4] の提案は、ならば E 型のゲージ群の超対称ヤン・ミルズ理論に適切なスカラー場期待値を与えればいいではないか、というものである。文献 [8, 9] ではこの考えを推し進め、「スカラー」場 ϕ は、実は座標 (z_1, z_2) をもつ複素曲面の上の $(2, 0)$ -form とすべきであることを見出した²。この結果に基づき、超対称性を要請することによって、7+1次元時空中上の α' -展開に相当す

²F-理論では、複素曲面の canonical bundle K_S と3次元多様体 B_3 の中での normal bundle $N_{S|B_3}$ は異なる。Type IIB 理論から F-理論へ一般化する際、このどちらをとるべきかは自明ではない。 ϕ は $(2, 0)$ -form であるべき、というのはこの問題を決定したことを意味する。

るものの初項が完全に決定された [9]。なお、F-理論における展開パラメータは、 $1/M_*^4 \equiv (g_s l_s^4)$ である。

この複素曲面 ($\times \mathbb{R}^{3,1}$) 上の場の理論の適用範囲とその限界について、コメントしておこう。

- F-理論の一部の自由度とそれらを含む相互作用を記述するのに用いられる。4次元での重力を含む全ての自由度の物理を扱えるわけではない。ただ、F-理論で実現される、non-Abelian ゲージ理論とその非自明表現に従う物質場、そしてそれらを含む相互作用には十分である。この場の理論の使い方、威力の発揮の仕方は、[10, 11] を参照されたい。
- 複素4次元多様体 X の特異点の構造とその変形の仕方から $(2, 0)$ -form の場の期待値に読み替える手続きは、さほど自明ではない。その詳細は、[10, 11, 7] をごらん頂きたい。
- F-理論の微視的量子論的定式化が存在しないことには変わりなく、このことは、 $1/M_*^4 = (g_s l_s^4)$ 展開の高次項の係数を超対称性のみでは決められないというところに反映されている。しかし、この場の理論を Kaluza–Klein スケールより下のスケールの物理にのみ適用する限りは、この係数不明の高次項の効果は高々 (M_{KK}/M_*) の冪で抑えられた補正を出すに過ぎない。故に、現象論への適用に関する限りは、この不定性がどのように現れてくるかを追いかけることは可能かもしれない。(現時点ではきちんとした議論はなされていないが。)

また、次の視点はとても大事である。通常、4次元有効場の理論や10次元での場の理論から出発すると、それらの次元の時空でのゲージ対称性やゲージ群があって、すべての対称性に基づく議論はそこから出発する。しかし、もっとも一般的なF-理論のコンパクト化では、そういった対称性が次のように決まる。まず、複素曲面 $S \hookrightarrow B_3$ が、統一对称性のゲージ群 $G'' = \text{SU}(5)_{\text{GUT}}$ にあたる、 A_4 特異点の場所になっていたとしよう。 S をいくつかの領域 U_α , $\cup_\alpha U_\alpha = S$ に分けて、4次元多様体 X の $U_\alpha \subset S$ の周りの幾何学が、局所的に U_α 上の A-D-E 型のどれかの ALE ファイバー空間として近似的に見られるとしよう。そのとき、7+1次元空間 $U_\alpha \times \mathbb{R}^{3,1}$ の上で、その A-D-E 型のどれかの対応するものをゲージ群 G に採用して、ヤン・ミルズ理論を考えよう、というのが、[4, 8, 9] 以来の提案の内容である。だから、このヤン・ミルズ理論のゲージ群 G は、 S 上局所的には決まるのだが、 S 上全域で唯一つつのものが決まる、という保証は一般にはない。 S 上、局所的には、 G'' よりも大きな対称性 G があるのだが、そのヤン・ミルズ理論のゲージ群として選ぶのが適切な G (近似的な ALE 空間のかたち) は S 上一定である保証はない。ゆえに、このような一般的なF-理論のコンパクト化から従う4次元有効理論には、 G'' を超える大きな対称性の群で有効理論全体を統括するものが必ずしも存在しないのである³。このことは、たとえば、後述する右巻きニュートリノのマヨラナ質量に関して本質的に重要な役割を果たす。

³にもかかわらず、たとえば、 $G'' = \text{SU}(5)_{\text{GUT}}$ の10-表現や $\bar{5}$ -表現の物質場は、局所的にはつねに $\text{SO}(10)$ や $\text{SU}(6)$ を含む G のヤン・ミルズ理論の $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}''$ の部分から出てきている。また、アップ型湯川相互作用やダウン型湯川相互作用などは、つねに E_6 や $D_6 = \text{SO}(12)$ を含むゲージ群の局所場の理論で記述できる。これらは、 G'' の非自明表現を持つ各々の物質場や、それらの相互作用が生成される機構が、 S 内で局在していることに由来する。しかし、右巻きニュートリノは S 内で局在してはいない。ゆえに、 G'' を超える対称性に従ってはいない。

2.3 Heterotic–F 双対性

ここ 1 年半ほどの F-理論の研究の中で、Heterotic 超弦理論と F-理論の間の双対性についても、新しい知見が得られた。また、Heterotic 超弦理論の解析を双対性で翻訳したものが、2.2 節の F-理論を場の理論で扱う方法の結果と一致することが確かめられた。2.2 節の場の理論を用いる方法論には論理的な飛躍がないわけではないのだが、この一致は、2.2 節の場の理論の手法が間違っていない、という傍証と見ることもできる。以下では、その進展を大まかに紹介する。

Heterotic 超弦理論を T^2 上にコンパクト化したものは、F-理論の (elliptic fibered) K3 多様体上にコンパクト化したものと同じである [1]。この双対性対応では、8 次元の平坦な時空と、16 の超対称性の変換生成子を残す真空を扱っている。この一般形として、4 次元の平坦な時空と 4 つの超対称性変換生成子を残す真空解の間の双対性対応があることも知られている。Heterotic 超弦理論の側では、elliptic fibered カラビ・ヤウ 3 次元多様体、 $\pi_Z : Z \rightarrow S$ の上へのコンパクト化を考え、 $E_8 \times E_8$ ゲージ群の中に、 Z 上のベクトル束 V_1 と V_2 を入れる。その 2 次 Chern 指標は必ず

$$\text{ch}_2(V_{1,2}) = -\sigma \cdot \eta_{1,2} + \pi_Z^*(\dots) \quad (7)$$

の形に書け、第 2 項が底空間 S 上の 4-form に当たるもの、第 1 項が荒っぽく言って底空間でもファイバー T^2 方向にも 2-form になっているものである。 $\eta_{1,2}$ は S 上の因子 (乱暴に言って 2-form) であり、Heterotic 超弦理論の理論的自己無矛盾の条件から、 $\eta_1 + \eta_2 + 12K_S = 0$ を満たす必要がある。一方、F-理論の側では、コンパクト化に用いるカラビ・ヤウ 4 次元多様体 $\pi_X : X \rightarrow B_3$ の底空間 B_3 が、 S 上の \mathbb{P}^1 fibration $\pi_{B_3} : B_3 \rightarrow S$ であることを要請する。ここでは、共通の複素曲面 S を用いる必要がある。この \mathbb{P}^1 fibration 構造の位相的条件が η_1, η_2 で適切に与えられるとき、F-理論のコンパクト化が Heterotic 理論のコンパクト化と同じ物理を与えることになる。

90 年代から知られていたのは、この Heterotic 超弦理論と F-理論の間のコンパクト化のモデュライ空間の次元が一致すること、そして、そのモデュライ空間の中で対称性の破れのパターンが完全に一致することである。現在では、その両側の理論の モデュライ空間の間の写像 も、きちんと分かっている。それをまず説明しよう。

Heterotic $E_8 \times E_8$ 超弦理論のコンパクト化では、 T^2 ファイバー空間の体積が α' より十分大きければ、 $E_8 \times E_8$ ゲージ理論のゲージ場のモデュライと、カラビ・ヤウ 3 次元多様体 Z のモデュライは分けて別個に考えることができる。このうち、ゲージ場のモデュライは、 T^2 ファイバーが底空間の大きさよりも相対的に小さい場合、ファイバー方向にはゲージ場はウィルソンラインとしてのみ入っている、として求めることができる。 T^2 内のウィルソンラインは、 T^2 内の点で表される。 E_8 内に構造群 $\text{SU}(5)_{\text{str}}$ のベクトルバンドルを入れて対称性を $\text{SU}(5)_{\text{GUT}}$ にまで破る場合、構造群 $\text{SU}(5)_{\text{str}}$ の T^2 方向のウィルソンラインは、 T^2 内の

$$a_0 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy = 0 \quad (8)$$

で決まる 5 点で表される。 (x, y) は、elliptic fibration $\pi_Z : Z \rightarrow S$, $y^2 = x^3 + f_0x + g_0$ のファイバー方向の座標 (x, y) である。

同様に、もう一方の E_8 にもベクトルバンドルを入れれば、その T^2 方向のウィルソンラインは

$$a_0'' + a_2''x + a_3''y + a_4''x^2 + a_5''xy = 0 \quad (9)$$

で表されることになる。単純化のため、構造群は $SU(5)$ に含まれるとした。(8, 9) は、カラビ・ヤウ 3次元多様体 Z 中の部分多様体を定義し、スペクトル曲面と呼ばれる。

このようなデータで与えられる Heterotic $E_8 \times E_8$ 超弦理論のコンパクト化に対して、これに双対な F-理論のコンパクト化は、

$$y^2 = x^3 + f_0z^4x + g_0z^6 + (a_0z^5 + a_2z^3x + a_3z^2y + a_4zx^2 + a_5xy) + (a_0''z^7 + a_2''z^5x + a_3''z^4y + a_4''z^3x^2 + a_5''z^2xy) \quad (10)$$

で与えられる。ただし、ここでの (x, y) は elliptic fibered カラビ・ヤウ 4次元多様体 X を与える式 (2) のそれであり、 z は \mathbb{P}^1 fibration の \mathbb{P}^1 の非斉次座標である [6, 7]。Heterotic 理論のコンパクト化に用いる S とその上の位相的な情報 $\eta_{1,2}$ を F-理論の双対なコンパクト化にも共通して用いるだけでなく、モデュライパラメーター、 $f_0, g_0, a_{0,2,3,4,5}, a_{0,2,3,4,5}''$ を F-理論の側でも用いている。同じパラメーターを用いて F-理論のコンパクト化の幾何のパラメーターを決めているということは、両側のモデュライ空間の間の写像を決めていることに他ならない。端的に言えば、Heterotic 理論と F-理論の間の双対性写像は、Heterotic 理論のスペクトル曲面の定義式をほぼそのままの形で F-理論のカラビ・ヤウ多様体 X の定義式の中に使うべし、ということである。

2.2 節で紹介した場の理論による定式化では、4次元の $\mathcal{N} = 1$ 超対称性を保つ X の局所幾何は、 S 上の場で、BPS 条件

$$F^{(0,2)} = 0, \quad \bar{D}\varphi = 0, \quad \omega \wedge F - \frac{1}{2}[\varphi, \varphi^\dagger] = 0 \quad (11)$$

を満たすものとして扱われる。 $\varphi = \varphi_{12}dz_1 \wedge dz_2$ は S 上の (2,0)-form である。式 (3) で表されるような局所幾何にどのような φ の期待値を割り当てるか、ということは、[4, 8, 10, 11, 7] に詳述されている。この φ の期待値の S 上での振舞いから、

$$\det(\xi_{12}\mathbf{1} - \varphi_{12}) = 0 \quad (12)$$

によって、 S の正則バンドル K_S の全空間、 \mathbb{K}_S 中の部分多様体が定義される。 ξ_{12} は K_S のファイバー空間の座標である。この部分多様体もまた、スペクトル曲面と呼ばれる。

Heterotic 理論のスペクトル曲面は、elliptic fibered コンパクトなカラビ・ヤウ 3次元多様体 Z 中の部分多様体であり、F-理論のスペクトル曲面は、コンパクトでない \mathbb{K}_S の部分多様体である。しかし、 Z の elliptic fibration のゼロセクション近傍に着目すれば、 Z もまた、非コンパクト多様体みたいなものである。 K_S のファイバー空間座標 ξ_{12} と、非コンパクト多様体として扱った Z のファイバー空間方向の座標 $\xi \simeq (x/y)$ をしかるべく同一視すれば、Heterotic 理論と、F-理論の両方でのスペクトル曲面を比較することができる。双方の理論に共通のモデュライパラメーター、 $a_{0,2,3,4,5}$ を用い、(10) の双対対応を用い、そして [4, 8, 10, 7] にあるように F-理論の局

所幾何を φ に読み替えた場合、双方のスペクトル曲面は完全に一致することが分かった [10]。故に、Heterotic 超弦理論と F-理論の間の双対性写像は、(10) による対応とは別に、スペクトル曲面の同一視、として定式化することもできる。

低エネルギー有効理論に現れる物質場は、場の理論による F-理論の定式化では、BPS 条件 (11) を満たす背景場期待値からの 1 次の無限小変形として特徴付けられる。そうして得られる微分方程式を解くことによって、その解が物質場曲線 (4) のまわりに局在すること、さらには、その解の物質場曲線方向の振る舞いが、Heterotic 理論の解析の双対性による翻訳が予言した滑らかな波動関数の振る舞いと完全に一致することも分かった [10]。

3 現象論的帰結

もともと、F-理論の技術開発の動機は、アップ型湯川相互作用を含むフレーバー構造を議論できる理論的枠組みを手にしよう、ということにある。しかしながら、このレビュー講演が行われた 09 年夏の時点では、その方向での研究がなお進行中であったため、中途半端な内容でのレビューをすることを避けた。ゆえに、この研究会報告でもフレーバー構造についての議論は含めない。しかし、夏以降文献 [12, 7] が出て、この報告の執筆時点ではこの方向での研究の落ち着き先が見えてきた状況にある。

以下では、夏の研究会で話した、その時点で見えていた F-理論のコンパクト化の現象論的帰結の中から、ストリング理論ならではのものについて記す。

3.1 次元 6 の陽子崩壊

$SU(5)_{\text{GUT}}$ 統一理論のゲージボソンが飛ぶことでおきる陽子崩壊は、低エネルギーでは次の 2 つの次元 6 の相互作用で表される。

$$\frac{1}{M_{\text{eff},1}^2} 10^\dagger 10 10^\dagger 10 \quad \text{and} \quad \frac{1}{M_{\text{eff},2}^2} 10^\dagger 10 5^\dagger 5. \quad (13)$$

ここに出てくる次元 (-2) のパラメーターは、4 次元時空での統一理論であれば、 $1/M_{\text{eff}}^2 \approx g_{\text{GUT}}^2/M_{\text{GUT}}^2$ となる。これがもし高次元時空でのトポロジーを利用しての $SU(5)_{\text{GUT}}$ の対称性の破れであれば、 M_{GUT} は Kaluza–Klein スケール M_{KK} に置き換えてほぼ問題ない。

しかし、物質場がゲージ場に対して内部空間で局在している場合には、これよりも大きな率で陽子崩壊が期待される [13]。M-理論の G_2 ホロノミー多様体によるコンパクト化の場合、物質場はゲージ場に対して相対的に実 3 次元分、内部空間方向に局在化している。そのため、 $1/M_{\text{eff},1}^2$ が $(M_*/M_{\text{KK}})^{3-2}$ だけ大きくなる。この状況では、陽子崩壊の振幅が 1 次の紫外発散をしまい、それがストリングスケール M_* でカットされる、というところから来ている。これが 1 次発散なのは、実 3 次元空間でのグリーン関数が $1/r^{3-2} = 1/r$ であることに対応する。なお、 $1/M_{\text{eff},2}^2$ には紫外発散がなく、そのためこちらは大きくなる。そのため、核子崩壊で、荷電レプトンへと崩壊する割合が大きめになると予言される [13]。物質場がゲージ場に対して内部空間で相対的

に局在する状況といい、紫外発散が M_* で有限になるところといい、ストリング理論ならではの結果と言える。

物質場がゲージ場に対して局在化している状況は F-理論でも同じである。しかし、その局在化の仕方は M-理論のものとは異なるので、どのていど $1/M_{\text{eff}.1}^2$ や $1/M_{\text{eff}.2}^2$ が大きくなるかは M-理論とは別個に調べる必要がある。2.1 節で述べたように、低エネルギー有効理論の物質場は、F-理論では物質場曲線上の滑らかな波動関数で記述される。内部空間の複素余次元 3 の特異点に局在化した物質場がない、ということが大事な点である。このことを用い、丁寧な解析をした結果、 $1/M_{\text{eff}.1}^2$ は (M_*/M_{KK}) の log で大きくなり、一方 $1/M_{\text{eff}.2}^2$ は大きくならない、という結果が F-理論の場合には得られた [14, 15]。

3.2 右巻きニュートリノと NMSSM

F-理論のコンパクト化では 3 種類のモデュライ場があり、それぞれ、 $H^{3,1}(X)$, $H^{1,2}(X)$, $H^{1,1}(B_3)$ に相当する。このうち前 2 者は、Heterotic 超弦理論による双対な記述がある場合には、Heterotic 理論でのゲージ場モデュライに対応する。このことから、それらが、 $5 \cdot 1 \cdot 5$ の 3 点相互作用を持つことが期待される。ゆえに、モデュライ場とはいいながら、決して $1/M_{\text{Pl}}$ で抑えられた相互作用しか標準模型の粒子としないというわけではない。この 3 点相互作用の故に、これらの「モデュライ」場は、たとえば、右巻きニュートリノのカイラル多重項や NMSSM (next-to-minimal 超対称標準模型) のニュートラル場の候補になりえる。

F-理論のフラックスコンパクト化では、 $H^{3,1}(X)$ に相当する場は、質量を持つ。その質量の大まかな推定は M_{KK}^3/M_*^2 。ゆえに、GUT スケールが Kaluza-Klein スケールに同定されるシナリオでは、この質量は GUT スケールから 1 - 2 桁ほど下に予言される。大気ニュートリノのニュートリノ振動の結果を使えば、 10^{15} GeV くらいより下に 1 つは右巻きニュートリノのマヨラナ質量が欲しい、ということになるが、そのスケールに対し、フラックスコンパクト化の予言する $H^{3,1}(X)$ の質量は見事に一致する。

なお、ここでは F-理論のコンパクト化のパラメーターが本質的に 3 つしか効いていないのに対して、観測可能な物理量が GUT スケール、プランクスケール、統一ゲージ結合定数、そして右巻きニュートリノのマヨラナ質量の 4 つがある。それゆえに、F-理論のコンパクト化を用いて、右巻きニュートリノの質量を予言できるのである。この予言に至る論理は単純至極であり、F-理論のコンパクト化の中での具体的な特定のモデルの作りこみのやり方によっていない。そのような予言が弦理論で可能であり、さらにそれが現実世界の試験をパスするのはすばらしいことである。

一方、 $H^{1,2}(X)$ に相当する場は、標準模型のゲージ場の下では全くニュートラルだが、 $5 \cdot 1 \cdot 5$ の相互作用を持つ。これらの場は、フラックスコンパクト化では質量を持たない。故に、 $h^{1,2}(X) \neq 0$ ならば低エネルギーにあらわれて、直接実験にかかる可能性がある。 $H^{1,2}(X)$ に相当する場は M-理論の双対での言葉を用いれば 3-form 場に相当し、この場にはシフト対称性がある。このシフト対称性の故に、少なくとも摂動論の範囲では、この場の 2 次、3 次といった相互作用の項はスーパーポテンシャルにはあらわれない。ただし、M2-プレーンが 3-form のチャージを持つ、ということから $5 \cdot 1 \cdot 5$ の相互作用は存在する。なので、低エネルギーでは、 $H_u S H_d$ の NMSSM の相

相互作用として見えることになる。シフト対称性からは S^3 の項の係数が少なくとも大きくない、ということが予言(期待)される。この予言(期待)は、NMSSM が真実 ($h^{1,2}(X) \neq 0$) であった場合、検証可能である [11]。

References

- [1] C. Vafa, Nucl. Phys. B **469**, 403 (1996) [arXiv:hep-th/9602022].
- [2] R. Tatar and T. Watari, Nucl. Phys. B **747**, 212 (2006) [arXiv:hep-th/0602238].
- [3] M. Bershadsky, K. A. Intriligator, S. Kachru, D. R. Morrison, V. Sadov and C. Vafa, Nucl. Phys. B **481**, 215 (1996) [arXiv:hep-th/9605200].
- [4] S. H. Katz and C. Vafa, Nucl. Phys. B **497**, 146 (1997) [arXiv:hep-th/9606086].
- [5] G. Curio, Phys. Lett. B **435**, 39 (1998) [arXiv:hep-th/9803224]; D. E. Diaconescu and G. Ionesi, JHEP **9812**, 001 (1998) [arXiv:hep-th/9811129].
- [6] H. Hayashi, R. Tatar, Y. Toda, T. Watari and M. Yamazaki, Nucl. Phys. B **806**, 224 (2009) [arXiv:0805.1057 [hep-th]].
- [7] H. Hayashi, T. Kawano, Y. Tsuchiya and T. Watari, arXiv:0910.2762 [hep-th].
- [8] R. Donagi and M. Wijnholt, arXiv:0802.2969 [hep-th].
- [9] C. Beasley, J. J. Heckman and C. Vafa, JHEP **0901**, 058 (2009) [arXiv:0802.3391 [hep-th]].
- [10] H. Hayashi, T. Kawano, R. Tatar and T. Watari, Nucl. Phys. B **823**, 47 (2009) [arXiv:0901.4941 [hep-th]].
- [11] R. Tatar, Y. Tsuchiya and T. Watari, Nucl. Phys. B **823**, 1 (2009) [arXiv:0905.2289 (th)].
- [12] S. Cecotti, M. C. N. Cheng, J. J. Heckman and C. Vafa, arXiv:0910.0477 [hep-th].
- [13] T. Friedmann and E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. **7**, 577 (2003) [arXiv:hep-th/0211269].
- [14] M. Wijnholt, arXiv:0809.3878 [hep-th].
- [15] R. Tatar and T. Watari, Nucl. Phys. B **810**, 316 (2009) [arXiv:0806.0634 [hep-th]].

Chiral zero modes on intersecting heterotic five-branes

KEK Theory Center & The Graduate University for Advanced Studies

Shun'ya Mizoguchi

E-mail: mizoguch@post.kek.jp

It is known that there exist 30 $D = 6$ hypermultiplets of zero modes on a symmetric five brane in heterotic string theory. They are understood as Nambu-Goldstone modes associated with the spontaneous breakdown of the translational invariance, and also with the breakdown of the scale and global gauge rotation invariances due to the instanton in the transverse dimensions.

The 30 hypermultiplets include 120 bosonic components which consist of four position moduli, one scale modulus and 115 gauge rotation moduli. The last number 115 can be understood in the $E_8 \times E_8$ case as follows (the $SO(32)$ case is similar): Since the brane preserves half of the supersymmetry, the holonomy (or more precisely the generalized connection $\omega + H$) belongs to $SU(2)$. This is embedded in one of the E_8 gauge connection (the standard embedding) so that the Bianchi identity be satisfied. Then the decomposition of $E_8 : \mathbf{248} = (\mathbf{133}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{56}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3})$ into $E_7 \times SU(2)$ shows that the centralizer E_7 ($(\mathbf{133}, \mathbf{1})$) of the embedded $SU(2)$ ($(\mathbf{1}, \mathbf{3})$) remains as the unbroken gauge group, while the rest $56 \times 2 + 1 \times 3 = 115$ become moduli. Fermionic moduli are their superpartners. Thus there exist one set of symplectic Majorana fermion zero modes in the $\mathbf{56}$ representation of E_7 . This is also consistent with the index theorem.

In this contribution we consider a system of two intersecting symmetric five branes in the $E_8 \times E_8$ heterotic string theory. We show that there exist (among others) three $D = 4$ $N = 1$ chiral supermultiplets of zero modes, of which *two are in the $\mathbf{27}$ of E_6 and one in the $\overline{\mathbf{27}}$* . In other words, there is net *one* chiral matter generation in the $\mathbf{27}$ of E_6 at the intersection¹.

We start with the (smeared) intersecting solution without the $E_8 \times E_8$ gauge field. The generalized connection $\omega + H$ is in $SU(3)$, and we set a part of the gauge field A to be equal to it. This is consistent with the Bianchi identity and satisfies the equations of motion to the leading order in α' . Similarly to the single five-brane case, we can deduce from the decomposition $\mathbf{248} = (\mathbf{78}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{27}, \mathbf{3}) \oplus (\overline{\mathbf{27}}, \overline{\mathbf{3}}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{8})$ of E_8 into $E_6 \times SU(3)$ that there must be *three* fermionic moduli (Weyl spinors) in the $\mathbf{27}$ of E_6 . The question is their chiralities.

The relevant Dirac equation is $\Gamma^\mu D_\mu(\omega - \frac{H}{3}, A)\chi = 0$, where μ runs over six-dimensional transverse indices. Since the smeared solution depends only on one coordinate, we can solve this equation explicitly to find, for the metric harmonic function $h(x) = 1 + n|x|$ with $n < 0$, two normalizable zero modes in the $(\mathbf{27}, \mathbf{3})$ representation, and one normalizable mode in the $(\overline{\mathbf{27}}, \overline{\mathbf{3}})$ representation.

This work is in collaboration with Tetsuji Kimura and a manuscript describing these results in detail is in preparation.

¹This corrects the earlier version of this work, in which it was (erroneously) expected that they all three should be in the same chirality.

ゲージ・ヒッグス統一モデルにおける異常磁気モーメント・電気双極子モーメントの性質

安達裕樹 神戸大学

E-mail: yuki1983@kobe-u.ac.jp

Gauge-Higgs Unification scenario is attractive for its finiteness of Higgs mass correction although the theory is nonrenormalizable. In this scenario, Higgs is regarded as extra dimensional component of gauge fields. From this, the local operator A_5^2 is forbidden by gauge symmetry. We are looking for another calculable finite observations similar to Higgs mass. Also the mechanism of CP violation in this scenario is not trivial since the yukawa coupling in here is equal to gauge coupling.

In this study, we found that anomalous magnetic moment (AMM) operator $\langle H \rangle \bar{\psi}_R \sigma^{\mu\nu} \psi_L F_{\mu\nu}$ is forbidden by higher dimensional gauge symmetry and fermion on-shell condition in the gauge-Higgs unification scenario¹. Thus, it is expected that fermion AMM is finite observation like Higgs mass. On the other hand, muon (electron) AMM is investigated in detail. The difference between standard model expectation and experimental result is $\sim 10^{-10}$. Therefore AMM constrain beyond the standard model.

To investigate the UV properties of fermion AMM, we calculated it in SU(3) gauge theory on $M^D \times S^1/Z_2$. In the naive power counting, AMM diverge in $6D, 7D \dots$ since $\langle H \rangle \bar{\psi}_R \sigma^{\mu\nu} \psi_L F_{\mu\nu}$ is dimension six operator. The UV divergences concerning about AMM are almost cancelled, however, it remains in the zero mode sector. Thus we conclude that the UV divergence of fermion AMM is weaken, *i.e.*, AMM is finite even in the six dimension in the gauge-Higgs Unification. In the most realistic case in this model ($D = 4$), we found lower bound of compactification scale.

Also the mechanism of CP violation is studied. In the 5-dimensional case, extra component of gauge field A_5 behave as CP-odd scalar. It is expected that the CP symmetry is broken spontaneously when A_5 takes vacuum expectation value. To check this, we calculate the electric dipole moment(EDM) in this model, and nonzero EDM appear at 1 loop order. Thus we conclude that CP violation occurs in the 5-dimensional gauge-Higgs Unification.

In summary, we have calculated AMM and we show that the UV divergences concerning about it in this scenario is weaken by higher dimensional gauge symmetry and fermion on-shell condition. In the most realistic case $D = 4$, we obtain the constraint on the compactification scale $1/R > 4.9 \sim 6.7$ TeV. Also the CP violation occurs in the 5-dimensional gauge-Higgs Unification scenario and we check it by calculating neutron EDM. Comparing experimental result, the constraint on compactification scale is obtained $1/R > 2.6$ TeV.

¹Electric dipole moment (EDM) operator is $\langle H \rangle \bar{\psi}_R \sigma^{\mu\nu} \gamma^5 \psi_L F_{\mu\nu}$ and it is forbidden in similar argument. We expect that EDM is also finite in any dimensions.

Black Holes in the Dilatonic Einstein-Gauss-Bonnet Theory in Various Dimensions

–Case with negative cosmological term–

近畿大学理工学部 太田信義

E-mail: ohtan@phys.kindai.ac.jp

超弦理論の検証を与えたり、それに基づいた重力をも含む素粒子の統一理論の可能性を探ることは、現在の理論物理学の最大の課題といえる。そのための最も有効な応用分野は、宇宙論とブラックホールの物理であろう。本研究では、ブラックホールの物理について議論する。

超弦理論から予想される低エネルギー有効理論では、アインシュタイン理論のみでなく、曲率に関する高次補正項が存在する。その最低次のもは Gauss-Bonnet 項であるが、今までのところ、超弦理論に必ず存在するディラトンは無視して議論が行われてきた。また、漸近的に AdS のブラックホール解も考えられているが、その場合の高次補正でもディラトンは無視されており、ストリングとの関係は明白でなく、AdS/CFT を安易に使ってよいかどうか疑問が持たれる。本研究では、このような動機に基づき、ディラトンがある Gauss-Bonnet 高次補正項入りの場合に、ブラックホールについて調べた。昨年は、静的球対称かつ漸近的に平坦なブラックホール解について報告したが、今回は負の宇宙項を含む場合の AdS 解について 4 次元から 10 次元を含むいろいろな次元に対して求め、時空の性質と熱力学的性質を調べた。

ここで超弦理論なのに何故宇宙項があるかについてであるが、理論に含まれているフォームが期待値を持つとそのような項が現れる。ただし一般にディラトンとの結合を含む。本研究では、そのような項を入れて解を調べ、ホライズンの半径が正の範囲で解を構成することができた。とくに、空間の曲率が 0 の場合の解は性質が良く、質量と宇宙項、ホライズン半径に関して

$$M \propto |\Lambda|^{\gamma/(\gamma-\lambda)} r_H^{D-1} \quad (1)$$

となることがわかった。ただし γ と λ はそれぞれ、GB 項と宇宙項のディラトン結合定数である。その他の性質や、解の様子などについての詳しい報告は、以下の文献 [1, 2] にあります。是非ご覧ください。この解の AdS/CFT 対応への応用は考えられ、ずれ粘性率とエントロピーの比に大きな影響を持つことが指摘されている [3]。

References

- [1] Z. K. Guo, N. Ohta and T. Torii, Prog. Theor. Phys. **121** (2009) 253 [arXiv:0811.3068 [gr-qc]].
- [2] N. Ohta and T. Torii, Prog. Theor. Phys. **121** (2009) 959 [arXiv:0902.4072 [hep-th]].
- [3] R. G. Cai, Z. Y. Nie, N. Ohta and Y. W. Sun, Phys. Rev. D **79** (2009) 066004 [arXiv:0901.1421 [hep-th]].

On on-shell closure of maximal superconformal symmetry and its application

Albert Einstein Institute Hidehiko Shimada

E-mail: shimada@aei.mpg.de

Theories with the maximal supersymmetry play important roles in the present day string/M theory. It is believed that the maximal supersymmetry implies powerful non-renormalisation theorems. However, the consequence of the maximal supersymmetry is difficult to explore. This is in marked contrast to theories with a smaller supersymmetry such as the $D = 4$, $\mathcal{N} = 1$ supersymmetry, where one can use superfield techniques to prove non-renormalisation theorems.

This difference between the maximally supersymmetric theories and theories with a smaller supersymmetry can be traced back to the following basic property of supersymmetric theories: when one computes the (anti-)commutator of the action of the supersymmetry on (physical) fields, one obtains terms which are proportional to the equation of motion. This is called as the on-shell closure of supersymmetry. For systems with a smaller supersymmetry, one can introduce auxiliary fields, such that the (anti-)commutator closes without using the equation of motion, thereby achieving the “off-shell closure”. These auxiliary fields are essential to formulate the theories in terms of the (off-shell) superfield, which in turn enables one to prove non-renormalisation theorems. However, as number of supersymmetries increases, it becomes more difficult to find auxiliary fields achieving the off-shell closure, and in particular for the maximal supersymmetry, it has not been possible to find them.

It therefore seems worthwhile to seek for an alternative approach to deal with non-renormalisation of supersymmetric theories which does not rely on the use of the auxiliary fields. In the talk, I described an ongoing work with Y. Kazama (University of Tokyo) in this direction. Our idea is to look for a direct connection between the on-shell closure and non-renormalisation theorems: instead of viewing the on-shell closure as an undesirable property preventing the introduction of superfields, we try to use the on-shell closure to prove non-renormalisation theorems.

To achieve this, it is necessary to have the explicit form of the term in the (anti-)commutator which is proportional to the equation of motion. Surprisingly, this has not been appeared in the literature, for the important case of maximal superconformal symmetry of $D = 4$, $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills. In the talk, I outlined our calculation of the anti-commutator. The next step is to invent a method to exploit the information obtained from this calculation (namely, the tensor coefficients multiplying the equation of motion appearing in the anti-commutator). We believe that there is a new class of Ward identities corresponding to symmetries with the on-shell closure. In the talk, I showed this new Ward identities for a simplified case. Although the power of these Ward identities still remains to be uncovered, we hope that our work will lead to a new approach for studying properties of supersymmetric theories.

コンパクト Calabi-Yau 多様体に対する開弦のミラー対称性の解析

北海道大学 大学院理学院 清水 将英

E-mail: shimizu@particle.sci.hokudai.ac.jp

ミラー対称性とは、異なる Calabi-Yau 多様体 (CY) でコンパクト化した弦理論の間の等価性で、弦双対性の中でも最も数学的理解が進んだ双対性である。この双対性を利用すれば、4次元理論の超ポテンシャルへの世界面 instanton 効果が、古典論での計算結果をミラー写像で変数変換することで得られる。(数学的な意味での)コンパクト CY とその中の SUSY サイクルを brane として設定する開ミラー対称性の解析には困難が多かったが、近年 Walcher が突破口を開き、着実に研究が進んでいる。本研究はそこに新たな解析手法を提唱した研究 [3] に基づくものである。

コンパクト CY の場合、brane の moduli が離散的になるため、非コンパクトな時のように Picard-Fuchs (PF) 方程式を立ててその解として周期積分を得るという方法が機能せず、解析が困難であった。しかし Walcher らは [1] において、離散的 moduli を持つ brane の影響で現れる PF 方程式の非斉次項を、Quintic (\mathbb{CP}^4 の中の 5 次超曲面) の場合に求めることで、弦の tree レベルの instanton 効果 (disk 不変量の母関数) の計算に成功した。その後 [2] では、離散的 open moduli は”仮想的”な連続の open moduli の臨界点として実現される事が示され、brane moduli の情報も含むよう周期積分を改良することで、形式的に非コンパクトな時と同様な道筋で計算可能になった。

本研究ではその周期の計算のための新たな手法を提唱した。我々のアイディアは、これまで周期積分の満たす PF 方程式という微分方程式を求めその解として周期を得ていたところを、直接積分によって求めてしまうというシンプルなものである。本来は周期積分の計算が難しかったが故に PF 方程式を求め、その解として得るという回り道をしていたが、うまい変数変換を行う事によってその煩雑さを回避できる。この手法は既に Quintic 等の 1-moduli 超曲面や完全交差等の様々な例に適用した場合には既存の結果との一致を見ており、まだ計算されていない例や解析が不可能だったモデルに対しても汎用性を持っているだろうと期待される。その点に関しては今現在解析中である。コンパクトな場合の研究結果はその後も続々と現れており、様々な手法・観点からの解析が進んでいる。それらの結果との関係や総体的な見方や手法を模索するという方向で研究を進めていき、得られた非摂動的寄与を含む超ポテンシャルの現象論及び宇宙論への応用の可能性についてを明らかにしていきたい。(本研究は、名大の藤博之氏、北大の秦泉寺雅夫氏、中山真作氏、鈴木久男氏との共同研究で、現在準備中の論文 [3] に基づいています)

References

- [1] J. Walcher, Commun. Math. Phys. **276** : 671-689, 2007
D. R. Morrison and J. Walcher, arXiv:0709.4028 [hep-th]
- [2] H. Jockers and M. Soroush, Commun. Math. Phys. **290** (2009) 249
- [3] H.Fuji, M.Jinzenji, S.Shinsaku, M.Shimizu and H.Suzuki, to appear

Holographic Renormalization Group with Gravitational Chern-Simons Term

大阪大学 素粒子論研究室 西中 崇博

E-mail: nishinaka@het.phys.sci.osaka-u.ac.jp

本講演は堀田暁介氏、百武慶文氏、窪田高弘氏、谷田寛明氏との共同研究 (arXiv:0906.1255) に基づくもので、2次元と3次元の gauge/gravity duality に関する新しい発見に関するものである。

そもそも2次元と3次元の gauge/gravity duality としては AdS₃/CFT₂ duality があり、これはいわゆる superstring inspired な AdS/CFT 対応が発見される以前から、Brown-Henneaux たちにより既に示唆されていたものである。彼らは無限遠方で漸近的に AdS₃ となる時空から、自然に2次元 CFT の Virasoro 代数が導きだされることを示した。さらにこの対応関係を non-AdS/non-CFT への duality にまで拡張したのものとして holographic renormalization group という考え方があり、これに従うと2次元の場の量子論のくりこみ群の flow が、3次元重力と結合した scalar 場の古典解に対応づけられる。

しかしこのような2次元と3次元の対応は、通常は3次元側が Einstein gravity の場合、またそうでなくてもせいぜい curvature の高次の項を付け加えた理論ばかりが考えられてきた。ところが近年になって、Einstein gravity に gravitational Chern-Simons term を加えた、topologically massive gravity (TMG) を3次元側で考えるということがなされるようになった。この TMG は面白いことに gravitational Chern-Simons term によって parity を破っているため、TMG に dual な QFT₂ も parity を破っていると考えられる。実際 TMG で AdS₃ 解を考えると、それは2次元で left-mover と right-mover の自由度が異なるような CFT₂ に dual であることが [1] により示されている。

今回我々は [1] の議論を holographic renormalization group にまで拡張することを考えた。これはすなわち、TMG に scalar 場を結合させた系を考えることによって、2次元で parity を破った場の量子論のくりこみ群の flow を調べようというものである。我々は Einstein gravity における [2] などの先行研究をふまえた上で、TMG+scalar の系で Hamiltonian 形式に移り、その Hamilton-Jacobi 方程式を調べることによって、TMG に dual な場の量子論のくりこみ群方程式を導出することに初めて成功した。またこの際、2次元場の量子論の c -function を重力側から定義することができ、それらは確かに2次元場の量子論の一般論から導出される性質を正しく持っていることが示された。特に parity violating な QFT₂ に特有な、left-mover と right-mover の c -function の差がくりこみ群によって flow しないという式

$$\mu \frac{d}{d\mu} (c_L(\mu) - c_R(\mu)) = 0$$

が正しく満たされていることが確認できたことは、我々の議論が TMG についての正しい双対性を見ていることを裏付けるものと考えられる。

[1]: P. Kraus and F. Larsen, JHEP 0601 022, (2006).

[2]: M. Fukuma, S. Matsuura, and T. Sakai, Prog. Theor. Phys. 109 (2003), 489.

CFT Duals for Extreme Black Holes

京都大学大学院 理学研究科 素粒子論研究室 西岡 辰磨

E-mail: nishioka@gauge.scphys.kyoto-u.ac.jp

ブラックホールは理論的に温度を持つことが知られており、熱力学を考えることが出来る。その結果得られるブラックホールのエントロピーはブラックホールのホライズンの表面積に比例するが、このエントロピーを担う微視的状态数が何であるかはそのホライズンの内側が外部からは見えないために、一般相対論の枠内では答えられない。

この問題に対して最近、4次元のゼロ温度回転ブラックホール (Kerr ブラックホール) は共形場理論 (CFT) で記述出来る可能性が Strominger らによって示唆された [1]。彼らは [2] に倣い Kerr ブラックホールのホライズン近傍に注目し、その時空の空間無限遠に適切な境界条件を課すことで漸近対称性としてピラソロ代数を得た。この漸近対称性に付随するネーター電荷の交換子を計算してみるとピラソロ代数は中心拡大された形になり、角運動量 J の Kerr ブラックホールに対してその中心電荷が $c = 12J$ となることが分かった。AdS₃/CFT₂ 対応の経験から、このピラソロ代数は Kerr ブラックホールに双対な CFT の対称性と期待されるが、実際以下の様に CFT の温度を重力理論から読み取ることによってブラックホールエントロピーが CFT の微視的状态数として再現される。

一般に CFT の分配関数は $Z = \text{Tr} e^{-L_0/T}$ で定義され、 L_0 は熱力学でのエネルギーを表している。この分配関数から通常の熱力学におけるエントロピーの定義式 $dS_{CFT} = d\langle L_0 \rangle / T$ が得られる。ここで、CFT のエネルギー L_0 及びエントロピー S_{CFT} を重力理論のもの $Q_0 = J, S_{BH}$ と同一視して上式に代入してみよう: $dS_{BH} = dJ/T$ 。ここで Q_0 は漸近対称性であるピラソロ代数に付随するネーター電荷のゼロモードで、ブラックホールの回転に対応している。結果的に、CFT の温度は $dS_{BH} = dJ/T$ の関係式を用いて Kerr ブラックホールの物理量から読み取れることが分かった。ゼロ温度の Kerr ブラックホールのエントロピーは $S_{BH} = 2\pi J$ なので結局 $T = 1/2\pi$ となる。この温度と先の中心電荷を Cardy 公式に代入すると $S_{CFT} = \frac{\pi^2}{3} cT = S_{BH}$ となり Kerr ブラックホールのエントロピーが CFT から正しく再現された。

私は [3, 4] に於いて上記の手法を拡張し、より一般のゼロ温度ブラックホールに対しても同様に対応する共形場理論が存在することを示した。

References

- [1] M. Guica, T. Hartman, W. Song and A. Strominger, arXiv:0809.4266 [hep-th].
- [2] J. D. Brown and M. Henneaux, Commun. Math. Phys. **104**, 207 (1986).
- [3] T. Hartman, K. Murata, T. Nishioka and A. Strominger, JHEP **0904**, 019 (2009)
- [4] G. Compere, K. Murata and T. Nishioka, arXiv:0902.1001 [hep-th].

Higher-Derivative Corrections to the Asymptotic Virasoro Symmetry of 4d Extremal Black Holes

Yukawa Institute for Theoretical Physics, Kyoto University Noriaki Ogawa
E-mail: noriaki@yukawa.kyoto-u.ac.jp

1 Introduction and summary

Recently, the authors of [1] proposed a way to associate a dual chiral CFT_2 with an extremal Kerr black hole, and they named it the Kerr/CFT correspondence. They showed that their method can reproduce the Bekenstein-Hawking entropy. Subsequently it has been applied to a rather broad class of extremal black holes in Einstein gravity (with matter fields). In our present work [2], we generalized it to extremal black holes in fairly general 4-dimensional higher-derivative gravity theories, and showed that it perfectly reproduces the Iyer-Wald entropy formula.

2 Procedure of entropy derivation in Kerr/CFT

The outline of the calculation of the entropy in Kerr/CFT is as follows:

1. We require an appropriate boundary condition on the near-horizon geometry of the black hole, and identify the generators of the asymptotic symmetry (Virasoro algebra).
2. We calculate the central extension term and obtain the central charge c .
3. We compute the Frolov-Thorne temperature T_{FT} from the black hole thermodynamics.
4. Finally we use the thermal Cardy formula for entropy in 2d CFT, $S = \frac{\pi^2}{3} c T_{FT}$.

3 Generalization to higher-derivative gravities

Out of the sequence above, we can apply most operations in it to higher-derivative cases almost straightforwardly, except those in the step 2. In this stage, we have to define the asymptotic Noether charges for the asymptotic symmetry and their Poisson brackets appropriately. In fact, there is some ambiguity for this definition, whose differences do not contribute in Einstein gravity but do in general. The answer is to adopt the Barnich-Brandt-Compère formalism, based on the principle that those quantities do not depend on total derivative terms in the Lagrangian. It proves to reproduce the Iyer-Wald entropy for arbitrary $\mathcal{L}(g_{ab}, R_{abcd}, \nabla_e R_{abcd}, \nabla_{(e} \nabla_{f)} R_{abcd}, \dots)$.

References

- [1] M. Guica, T. Hartman, W. Song and A. Strominger, arXiv:0809.4266 [hep-th].
- [2] T. Azeyanagi, G. Compère, N. Ogawa, Y. Tachikawa and S. Terashima, arXiv:0903.4176 [hep-th].

Spontaneous supersymmetry breaking in matrix models

立教大学 黒木経秀

E-mail: tkuroki@rikkyo.ac.jp

弦理論の非摂動的定式化の候補である large- N ゲージ理論では超対称性 (SUSY) が本質的な役割を果たしている。しかし非摂動的弦理論ならば、低エネルギーでは標準模型に帰着し、SUSY は破れている必要がある。これを実現する一つのシナリオは、large- N 極限で SUSY が自発的に破れるというものである。そこでこのような機構を持つ簡単な行列模型を構築することを目的とする。

行列模型は通常行列積分で定義されるため、経路積分形式で SUSY の自発的破れを議論できることがまず必要になる。そこで例として有限温度 SUSY 量子力学

$$S = \int_0^\beta dt \left[\frac{1}{2} B^2 + iB \left(\dot{\phi} + W'(\phi) \right) + \bar{\psi} \left(\dot{\psi} + W''(\phi)\psi \right) \right],$$

を考える。この理論は標準的な SUSY ($Q\phi = \psi$, $Q\bar{\psi} = -iB$, $Q^2 = 0$) を持つ。 $W(\phi)$ は superpotential で、偶関数のときは SUSY が保たれるが、奇関数のときは SUSY は破れることが知られている。これを経路積分形式で定式化するため、まず order parameter として $\langle B^n \rangle$ を取る。しかし例えば ψ の境界条件を周期的にとると、興味ある SUSY の自発的破れを起こす模型の場合、分配関数は Witten index そのものになってゼロで、同様の理由で $\langle B^n \rangle$ の分子もゼロになって、 $\langle B^n \rangle$ は不定形になることが分かる。そこで ψ の境界条件を $\psi(t + \beta) = e^{i\alpha}\psi(t)$ と変更すると、分子、分母とも $(1 - e^{-i\alpha})$ に比例するゼロでない有限の数になり、 $\langle B^n \rangle$ 自身は α によらない数になる。すなわち α はよい正則化になっており、ちょうど Ising model のときの磁場のように SUSY を破る無限小の外場と見なせ、SUSY の自発的破れを議論する土台となる。こうして経路積分形式で SUSY の自発的破れを議論する枠組みを与えることができる。実際例えば時間方向を離散化して discretized SUSY 量子力学を考え、さらに周期を 1 としてしまうと、 $\phi(2) = \phi(1)$, $\psi(2) = e^{i\alpha}\psi(1)$ より各場は単なる数になるので経路積分が実行でき、上記の superpotential の偶奇に応じた SUSY の破れの結果を再現することが簡単にチェックできる。

次に discretized SUSY 量子力学を行列模型化し、さらに周期を 1 とした行列模型

$$S_M = N \text{tr} \left[\frac{1}{2} B^2 + iB W'(\phi) + \bar{\psi} \left(e^{i\alpha} - 1 + W''(\phi) \right) \psi \right]$$

を考える。ただし SUSY を持つためには $W''(\phi)\psi$ の項は対称化されている必要がある。行列はすべて $N \times N$ エルミート行列である。このとき、次のことが言える: $N \rightarrow \infty$ とともに $\epsilon \rightarrow 0$ となる ϵ を用いて superpotential の ϕ 依存性が $W'(\epsilon\phi)$ の形なら、SUSY は自発的に破れる、すなわち large- N 極限の後 $\alpha \rightarrow 0$ とすると order parameter $\langle \frac{1}{N} \text{tr} B^n \rangle \neq 0$ となる n がある。また、極限の順番を逆にして $\alpha \rightarrow 0$ ののち large- N 極限を取ると、量子力学の場合の無限体積極限に相当する結果が得られる。特に double-well type $W'(\phi) = (\epsilon\phi)^2 + \mu$ の場合は μ が負のある領域で SUSY が回復する。これは同じ superpotential を持つ SUSY 量子力学の無限体積極限でも起きることが知られており、large- N 極限が無限体積極限に相当することを示している。

Monte Carlo studies of the six-dimensional IKKT model

摂南大学工学部 数学物理学系教室 東 武大

E-mail: azuma@mpg.setsunan.ac.jp

超弦理論は、重力をも含めた自然界の全ての4つの相互作用を統一的に記述する理論として期待されている。1990年代後半には行列模型を用いて超弦理論の構成的定義、つまり摂動論に依らない定式化をする試みがなされてきた。1996年に提唱されたIKKT行列模型 [1] は、その中でも有力な候補と考えられている。行列模型がいかにして私たちの住む4次元時空を生成するかを調べることは、非常に重要な問題である。

IKKT行列模型は10次元で定義されたものであり、フェルミオンの積分から来る部分は複素数となる。このためにいわゆる『符号問題』に直面し、モンテカルロシミュレーションが困難になる。一方、IKKT行列模型ではこの複素部分が時空のローレンツ対称性の自発的破れにおいて本質的な役目を果たすことが知られている。従って4次元時空の生成の仕組みを数値的に理解するためには、『符号問題』を克服することは避けられない問題である。

符号問題を数値的に扱ううえで因子化法という方法が有力な役割を果たし、これまで単純化した行列模型において精力的に調べられてきた [2]。本研究では6次元のIKKT模型について数値的に調べ、私達の住む4次元時空の力学的生成の仕組みについて理解を深める。

この講演は、青山龍美氏、花田政範氏及び西村淳氏との共同研究に基づくものである。

参考文献

1. N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, “A large- N reduced model as superstring,” Nucl. Phys. B **498**, 467 (1997) [hep-th/9612115].
2. K. N. Anagnostopoulos and J. Nishimura, “New approach to the complex-action problem and its application to a nonperturbative study of superstring theory,” Phys. Rev. D **66**, 106008 (2002) [hep-th/0108041].

Structures on doubled geometry

Yukawa Institute for Theoretical Physics, Kyoto University Cecilia Albertsson

E-mail: cecilia@yukawa.kyoto-u.ac.jp

Two constructions recently introduced for the purpose of describing spaces – some of which constitute the compactified part of a consistent string background – in a unified manner, namely generalised geometry [1] and doubled geometry [2], have several properties in common. In particular, the structure group $O(d, d; \mathbf{Z})$ arising from T-duality on the internal (compact) space is naturally encoded in both geometries, and they both support the same kind of almost product structures. On the other hand, the bases on which each construct is built are widely disparate, begging the question of whether the similarities originate in any deeper connection. As a step towards finding the answer, we investigated the structures on doubled geometry, uncovering a neutral almost hypercomplex structure which, at least when integrable, restricts the type of dual string backgrounds that can be described in this framework.

Doubled geometry is constructed for a given nonlinear sigma model by incorporating in the formalism the fields dual to the usual, physical fields (including target space coordinates) in the model, thus doubling the number of degrees of freedom. The result is a coset space, and the duality structure is retained by introducing an $O(d, d)$ invariant metric L . A “doubled” sigma model may be defined on the new geometry, from which the ordinary sigma model can be recovered by a local projection, imposing a self-duality constraint of the form $\mathcal{P} = L^{-1}\mathcal{M} * \mathcal{P}$. Here \mathcal{P} are Maurer-Cartan one-forms and \mathcal{M} is a positive definite metric on the doubled geometry. In any neighbourhood there exist three structures: two almost product structures (APS) and one almost complex structure (ACS). They are defined as

$$\begin{aligned} S &\equiv \Pi - \tilde{\Pi} && \text{APS of projection } \Pi \\ T &\equiv L^{-1}\mathcal{M} && \text{APS from self-duality constraint} \\ \mathcal{I} &\equiv TS && \text{ACS} \end{aligned}$$

They satisfy a para-quaternionic algebra $-\mathcal{I}^2 = S^2 = T^2 = \mathbb{1}$, $\mathcal{I} = TS = -ST$ as well as compatibility conditions with respect to the metrics L and \mathcal{M} . This set of structures precisely constitute a neutral almost hypercomplex structure.

References

- [1] N. J. Hitchin, “Generalized Calabi-Yau manifolds,” *Quart. J. Math. Oxford Ser.* **54** (2003) 281, [arXiv:math/0209099](https://arxiv.org/abs/math/0209099)
- [2] C. M. Hull and R. A. Reid-Edwards, “Non-geometric backgrounds, doubled geometry and generalised T-duality,” [arXiv:0902.4032 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/hep-th/0902.4032); C. M. Hull, “A geometry for non-geometric string backgrounds,” *JHEP* **0510** (2005) 065, [arXiv:hep-th/0406102](https://arxiv.org/abs/hep-th/0406102); C. M. Hull, “Doubled geometry and T-folds,” *JHEP* **0707** (2007) 080, [arXiv:hep-th/0605149](https://arxiv.org/abs/hep-th/0605149)

Quantum Field Theory at a Lifshitz Point

神戸大学理学研究科 坂本 真人

E-mail: dragon@kobe-u.ac.jp

最近、 $3 + 1$ 次元 $z = 3$ Hořava-Lifshitz 重力理論が注目を浴びている。この理論の特筆すべき特徴は、(power-counting の意味で) 繰り込み可能であること、もう一つは、長距離スケールではアインシュタインの重力理論に一致するが、短距離では空間と時間が非等方なスケールリングを持つ非相対論的な重力理論となっている点である。空間と時間の非等方性は dynamical critical exponent z で特徴付けられ、短距離スケールでは $z = 3$ と非等方性は非常に大きい、長距離では $z = 1$ となりそこでは等方性が回復しローレンツ対称性が emergent symmetry として現れる。つまり、相対論的不変性は低エネルギーで偶然現れた accidental symmetry であると解釈される。本講演では、Hořava の理論の背景にある様々なアイデアや物理的背景、および、理論構造について詳しく論ずる。

本講演は、最近注目を集めている Hořava 重力理論 [1, 2] について、その背後にある物理的背景の解説を目的としたものである。Hořava の理論のもっとも魅力的な性質は、 $3 + 1$ 次元で (power-counting の意味で) くり込み可能という点にあるだろう。よく知られているように、アインシュタインの量子重力理論はくり込み不可能であり、多くの研究者の努力にもかかわらず未だに誰もが納得する量子重力理論の構築には成功していない。Hořava が目指したものは、重力理論を弦理論に埋め込むことではない。場の量子論の枠内で定義可能な量子重力理論の構築である。そのためには、容易に想像されるように、何らかの大きな概念の変更 (あるいは大きな代償?) が必要とされる。Hořava が選んだ道は、ローレンツ不変性を捨て去ることだった。

ローレンツ不変性を捨て去ることには、多くの人にとって抵抗があるだろう。一世紀以上にわたる相対性理論の成功はローレンツ不変性抜きには語るができない。素粒子理論における場の量子論はローレンツ不変性のもとに成り立っており、非相対論的場の理論はあくまでも速度が光速よりも遅い系、あるいは、エネルギーが静止エネルギーに比べてずっと小さい系で成り立つ近似に過ぎない。Hořava は観測事実を無視してまで、量子重力理論を作ろうとしているのだろうか? Hořava の答えはこうだ。ローレンツ不変性は低エネルギーでの偶発的に出現した“対称性”であり、高エネルギーでは時間と空間が非等方な世界が成り立っているのだ。アインシュタインの重力理論は低エネルギー有効理論に過ぎない。そこで現れた 4次元の一般座標変換の不変性はあくまで低エネルギー領域でのみ成り立つ近似的な対称性なのだ。

謙虚に物事を受け入れることにすると、確かに重力スケール (プランクスケール $\approx 10^{19}$ GeV) に比べれば、相対性理論の検証ははるかに低いエネルギーでなされているに過ぎない。重力のスケールまでローレンツ不変性が成り立っていることを確かめたわけではない。ローレンツ不変性は破れないという“信念”は、これまでの相対性理論の成功を手放したくないという気持ちの裏腹かも知れない。筆者の考えを正直に述べると、Hořava の理論は、多くの人に指摘されているように、いくつか問題を抱えており量子重力理論として今後生き残れるかどうかは微妙なところだ。しかし、ナンセンスだと決めつけて Hořava のアイデアを聞くこともなくすぐに葬り去るのは、物

理屋として了見が狭いと思うしあまりにもつたいない。Hořava 自身も述べているように、彼の提案した量子重力理論の背後には素粒子物理のみならず物性物理学で知られた様々な物理的背景が存在している。まずは Hořava のアイデアに耳を傾けることから始めようではないか。

Hořava の重力理論を紹介する前に、準備として計量の ADM 分解から説明しよう。

$$ds^2 = -(Ncdt)^2 + g_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt). \quad (1)$$

この表式は時間と空間を非等方的に取り扱う Hořava の理論にとって便利なものである。ここで、 N は lapse 関数、 N^i は shift ベクトルと呼ばれる変数である。 g_{ij} は空間 3 次元方向の計量に対応する。これらの変数を用いて Hořava の重力理論は次式で与えられる。

$$S_H = \int dt d^3 \mathbf{x} \sqrt{g} N \left\{ \frac{2}{\kappa^2} K_{ij} \mathcal{G}^{ijkl} K_{kl} - \frac{\kappa^2}{2w^4} C^{ij} \mathcal{G}_{ijkl} C^{kl} \right\}. \quad (2)$$

比較のため、ADM 変数で書かれたアインシュタインの重力理論を書き下しておこう。

$$S_E = \int c dt d^3 \mathbf{x} \sqrt{g} N \frac{1}{16\pi G_N} \left\{ \frac{1}{c^2} K_{ij} \mathcal{G}^{ijkl} K_{kl} + R - 2\Lambda \right\}. \quad (3)$$

(2) 式には光速 c が現れていないことに注意しよう。これは、Hořava の理論は本質的に時間と空間が非等方であり、時間座標と空間座標を結ぶ光速 c は必要とされないからである。ここで、 K_{ij} は外曲率で定義は $K_{ij} \equiv \frac{1}{2N} (\dot{g}_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i)$ である。この定義は両者の理論で等しく、計量 g_{ij} の時間微分を含む。 \mathcal{G}^{ijkl} は DeWitt 計量と呼ばれるもので次式で定義される。

$$\mathcal{G}^{ijkl} = \frac{1}{2} (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) - \lambda g^{ij} g^{kl}. \quad (4)$$

アインシュタインの重力理論では $\lambda = 1$ でなければならないが、Hořava の理論では λ は任意で結合定数とみなされる。これは、Hořava の理論は 4 次元一般座標変換不変性を持たず、次の制限された不変性しか保っていないからである。

$$\delta x^i = \zeta^i(t, \mathbf{x}), \quad \delta t = f(t). \quad (5)$$

この不変性のことを foliation-preserving diffeomorphism 不変性と呼ぶ。 R は g_{ij} のみから構成される 3 次元曲率であり、 Λ は宇宙定数である。また、 G_N はニュートン重力定数である。Hořava 重力理論の第 2 項に現れているテンソル C^{ij} は次式で与えられる。

$$C^{ij} = \epsilon^{ikl} \nabla_k \left(R_l^j - \frac{1}{4} R \delta_l^j \right) - \frac{\mu w^2}{2} \left(R^{ij} - \frac{1}{2} R g^{ij} + \Lambda_W g^{ij} \right). \quad (6)$$

(6) 式の右辺第 1 項は Cotton テンソルと呼ばれ、3 次元の conformal flatness の指標を与える量である。第 2 項は relevant deformation として付け加えられたもので、低エネルギー領域で重要と

なってくる量である。¹ Hořava 重力理論のもつパラメータは、 $\kappa, w, \lambda, \mu, \Lambda_W$ である。なぜ、Hořava がこのような作用を選んだのかについては、後の detailed balance 条件のところでも説明することにする。Hořava とアインシュタインの重力理論のもっとも大きな違いは、作用の右辺第 2 項のポテンシャル項にある。アインシュタイン重力理論では、空間微分は時間微分と同様、2 階微分のみを含む。これはローレンツ不変性、あるいは、時間と空間の等方性からの帰結である。一方、Hořava 重力理論では、時間に関してはアインシュタイン理論と同様に 2 階微分であるが、空間微分の階数が 6 次となっており、時間と空間の間の等方性を持たない。しかし、この性質のおかげで Hořava の重力理論は、power-counting の意味でくり込み可能で、かつ、ユニタリティを保つ。このことについては後でもう少し詳しく触れることにする。

まず始めに Hořava 重力理論が低エネルギーではアインシュタイン重力理論に一致するかどうかを調べてみよう。低エネルギーでは、微分の次数の小さい項が生き残ると考えられるので、(2) 式の右辺は次のように近似されるだろう。²

$$S_H \stackrel{\text{IR}}{\approx} \int dt d^3 \mathbf{x} \sqrt{g} N \left\{ \frac{2}{\kappa^2} K_{ij} \mathcal{G}^{ijkl} K_{kl} - \frac{\kappa^2 \mu^2}{8(3\lambda - 1)} \left(\Lambda_W R - 3(\Lambda_W)^2 \right) \right\}. \quad (7)$$

この表式と (3) 式を見比べれば、次のパラメータ対応のもとに Hořava の重力理論は (低エネルギー領域で) アインシュタイン重力理論に一致することがわかる。すなわち、

$$\begin{aligned} c &\equiv \frac{\kappa^2 \mu}{4} \sqrt{\frac{\Lambda_W}{1 - 3\lambda}}, \\ G_N &\equiv \frac{\kappa^2}{32\pi c}, \\ \Lambda &\equiv \frac{3}{2} \Lambda_W. \end{aligned} \quad (8)$$

これからわかるように Hořava の立場では、光速 c 、ニュートン重力定数 G_N 、宇宙定数 Λ はあくまでも低エネルギー領域でのみ定義される低エネルギー有効“定数”であるということである。特に、光速 c はもはや基本定数ではない。ひとつ注意しておかなければならない点は、Hořava 重力理論が低エネルギーでアインシュタイン重力理論に完全に一致するためには、(4) 式の \mathcal{G}^{ijkl} に含まれる結合定数 λ は低エネルギー極限で $\lambda \rightarrow 1$ というくり込み群の flow を持たねばならない。これは Hořava 理論が意味を持つための必要条件である。³

以下では、Hořava 重力理論への理解を深めるために、次の 4 つの観点から議論していくことにする。

¹高エネルギー、あるいは、短距離領域では (6) 式の右辺第 1 項のみを考えれば十分である。

²(7) 式は、(2) 式に (6) 式、および、 $\mathcal{G}_{ijkl} = \frac{1}{2}(g_{ik}g_{jl} + g_{il}g_{jk}) - \frac{\lambda}{3\lambda - 1}g_{ij}g_{kl}$ を代入し、高階微分の項を無視したものである。

³この条件はまだ確かめられていない重要な問題のひとつである。

- A. ローレンツ不変性の破れの検証
- B. Hořava 重力理論のくり込み可能性
- C. Detailed Balance 条件
- D. Lifshitz 点

A. ローレンツ不変性の破れの検証

素朴な問いから始めよう。ローレンツ不変性は、高エネルギー領域、あるいは、短距離領域でも成り立っているのであろうか？ 量子重力理論の定式化のひとつに Wheeler-DeWitt 方程式 [3] がある。この方程式の物理的帰結のひとつは、宇宙の波動関数は“時間”発展をしないということである。相対論における時間と空間は古典的には等方的に取り扱われるが、量子論的には時間と空間の役割は異なる。量子論の中では、時間はパラメータにすぎずオブザーバブルではない。量子重力がうまくいかないのは、相対性と量子力学の間の相性が悪いからである。もし、そのどちらかを諦めなければならないとしたら、どちらであらうか？ 恐らく量子力学の方がより根本的な原理として最後まで生き残るのではないだろうか。

こう考えるといつまでも時間と空間を平等に取り扱う必然性はないように思える。実際、ローレンツ不変性の破れを検証しようというプロジェクトは多数存在している。残念ながら (!?)、まだローレンツ不変性の破れの実験的証拠は得られていないが、実験の精度は思った以上に進んでいるようである。ローレンツ不変性の破れの検証に興味を持った読者は、総合報告 [4] の一読を勧める。

B. Hořava 重力理論のくり込み可能性

まず power-counting の意味でのくり込み可能とはどういうことかの説明から始めよう。摂動論を考え、その時の摂動パラメータを κ^2 とし、その質量次元⁴ を $[\kappa^2] = q$ としておこう。摂動の初項を 1 として、摂動論は κ^2 について次の展開を与えることになる。⁵

$$1 + \kappa^2 \Lambda^{-q} + \kappa^4 \Lambda^{-2q} + \kappa^6 \Lambda^{-3q} + \dots \quad (9)$$

ここでは、各項の比例係数は重要ではないので無視した。 Λ は質量次元 1 をもつパラメータで、(9) 式の各項は次元を持たないように Λ のべきが決められている。くり込み可能性を議論する際は、 Λ として発散のカットオフパラメータにとるとわかりやすい。 κ^2 の質量次元 q がゼロ以上 ($q \geq 0$) ならば、 Λ のべきは負またはゼロとなり摂動の高次でもカットオフ無限大の極限での振る舞いは悪くない。ところが、 $q < 0$ の場合は摂動の次数が大きくなればなるほどカットオフのべきが大きくなり、摂動と共に (カットオフ無限大にとることにより生じる) 発散をコントロール出来なくなる。

⁴この節の後半の議論では、質量次元と呼ばずにスケール次元と呼ぶことにする。その理由は、Hořava の理論では時間座標と空間座標の次元が通常とは異なるからである。

⁵(9) 式での Λ は宇宙定数ではなくカットオフパラメータとして使われている。混同しないように。

発散をコントロール出来る理論を『power-counting の意味でくり込み可能な理論』と呼び、上の議論から分かるように摂動のパラメータの質量次元がゼロ以上 ($q \geq 0$) をもつ理論に対応する。

アインシュタイン重力理論の場合はどうなっているかというと、 $3+1$ 次元では $[\kappa^2] = -2$ と負の質量次元を持つのでくり込み可能ではないことがわかる。これを回避するために、4次元スカラー曲率の2乗項 \mathcal{R}^2 を作用に加えた高階微分重力理論 [5] が提唱された。このとき結合定数は質量次元ゼロとなり、くり込み可能となる。しかも漸近的自由な理論であることもわかり量子重力理論として有望視されたが、残念ながら内部にゴーストの自由度を含むことからユニタリティが破れることが示され量子論としてはうまくいかなかった。ゴーストが現れる理由は次の等式から理解できる。

$$\frac{1}{k^2 - k^4/M^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - M^2}. \quad (10)$$

ここで、 k^2 は4元エネルギー・運動量ベクトルの2乗である。左辺の分母の第2項がスカラー曲率の2乗項から来る4階微分項であり、高エネルギーでの発散の振る舞いを良くする。右辺第1項は graviton プロパゲータに対応する項であるが、第2項は相対的にマイナス符号を持っていることから、(質量を持つ) ゴーストプロパゲータに対応する。この第2項の存在がユニタリティを破る原因となる。これは、時空 (特に時間) の高階微分を含む理論にとって避けがたい宿命である。

実は、Hořava の重力理論は、上で述べた高階微分重力理論のいいとこ取りをしている。もう一度、Hořava 重力理論の作用 (2) を見直してみよう。(2) 式の右辺第1項が計量の時間微分の二乗 $(\dot{g}_{ij})^2$ を含む項である。一方、(2) 式の右辺第2項は、計量に対する空間微分項であり空間微分の6次 $(\partial^3 g_{ij})^2$ を与える。ここでは“ \cdot ”は時間微分、“ ∂ ”は空間微分を表す。アインシュタイン重力理論との違いは空間微分 (ポテンシャル) 項に見てとれる。注意すべき点は、このように時間と空間が非等方的な理論では、時間と空間のスケール次元が通常とは異なることである。空間座標のスケール次元を通常と同じように -1 、すなわち、 $[x] = -1$ ととると、(2) 式の右辺第2項はスケール次元6を持つことになる。(計量 g_{ij} のスケール次元はアインシュタイン理論と同じく0である。) とすると、第1項もスケール次元6をもつためには、時間座標はスケール次元 -3 、すなわち、 $[t] = -3$ となることがわかる。このことから、 $[dt d^3 \mathbf{x}] = -3 + (-1) \times 3 = -6$ であることと、作用 S_H の次元はゼロであることを考慮すると結合定数 κ^2 のスケール次元は $[\kappa^2] = 0$ であることがわかる。このように Hořava の重力理論では空間微分の次数を6とすることによって時間のスケール次元が -1 から -3 へと変更され、そのおかげで結合定数 κ^2 のスケール次元がゼロとなったのである。したがって、前に述べた通り、摂動の一般論から Hořava の重力理論は power-counting の意味でくり込み可能であることがわかる。読者は、任意のファインマングラフの発散の次数が6であることを確かめられたい。すなわち、Hořava の重力理論は、摂動計算による発散のコントロールが出来る理論 (=くり込み可能な理論) となっているのである。

C. Detailed Balance 条件

Hořava は結合定数 κ^2 のスケール次元がゼロになることと detailed balance 条件を課すことに

よって作用 (2) を導いた。一方で、Hořava は detailed balance 条件の必要性は議論の余地があると述べている。実際、宇宙論への応用を考えると detailed balance 条件を外した方が現象論的には都合が良い場合があるようだ。しかし、detailed balance 条件は理論に制限を与えるだけでなく、真空の波動関数と密接な関係をもつ。以下ではこのことについて説明しよう。

detailed balance 条件とは何かを、スカラー場の理論の場合で説明してみることにする。ポテンシャルが、ある汎関数 $W[\phi]$ を用いて次のような形で書かれたとき、detailed balance 条件を満たすと言う。

$$V(\phi) = \frac{\delta W[\phi]}{\delta \phi(x)} \cdot \frac{\delta W[\phi]}{\delta \phi(x)}. \quad (11)$$

重力の場合への拡張は、 $\phi(x)$ を計量 $g_{ij}(x)$ で置き換えて、(2) 式の第 2 項において $C^{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta W[g]}{\delta g_{ij}}$ とおき、テンソルの足を \mathcal{G}_{ijkl} でつぶしたものになる。さて、(11) 式で現れた汎関数 $W[\phi]$ の物理的意味は何だろう？ 以下で $W[\phi]$ は真空の波動関数 $\Psi_0[\phi]$ と $\Psi_0[\phi] = \exp\{-W[\phi]\}$ の関係で結びついていることを示そう。ハミルトニアンを真空エネルギーにとることにすると ($E_0 = 0$)、 $\Psi_0[\phi] = \exp\{-W[\phi]\}$ をエネルギーの基底状態とするハミルトニアンは

$$H = \left(-\frac{\delta}{\delta \phi} + \frac{\delta W[\phi]}{\delta \phi} \right) \left(\frac{\delta}{\delta \phi} + \frac{\delta W[\phi]}{\delta \phi} \right) \equiv Q^\dagger Q \quad (12)$$

で与えられるだろう。なぜなら、明らかに $H \geq 0$ であり、さらに、真空の波動関数 $\Psi_0[\phi]$ は $Q \Psi_0[\phi] = 0$ を満たすので、ハミルトニアンの最低エネルギー状態であることが保証されているからである。 $-i\delta/\delta \phi$ を ϕ の正準共役運動量 $\Pi_\phi = \dot{\phi}$ で置き換えた後に、ハミルトニアンからラグランジアンへ移行することによって次式を得る。⁶

$$\mathcal{L} = (\dot{\phi})^2 - V(\phi), \quad V(\phi) \equiv \left(\frac{\delta W[\phi]}{\delta \phi} \right)^2. \quad (13)$$

Hořava はポテンシャルに detailed balance 条件を課して次の形を要求した。

$$V(g) = \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta W[g]}{\delta g_{ij}} \right) \mathcal{G}_{ijkl} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta W[g]}{\delta g_{kl}} \right). \quad (14)$$

それから、Hořava はくり込み可能性の議論から結合定数が次元を持たないための条件として、ポテンシャルが空間微分の 6 次を持つことをさらに要請した。この要請は $W[g]$ が空間微分の 3 次を含むことを意味する。空間微分の 3 次を含む foliation-preserving diffeomorphism 不変性を持つ量は、3次元 Chern-Simons 重力項 $S_{3dCS}[g]$ しかない。こうして得られた C^{ij} が Cotton テンソルと呼ばれる量なのである。Chern-Simons 重力項に 3次元アインシュタイン重力項 $S_{3dEG}[g]$ を加えたものが Hořava 重力理論ということになる。したがって、Hořava 理論は detailed balance 条件を

⁶実際には、 $\delta^2 W[\phi]/\delta \phi^2$ の項がラグランジアンに現れると思われるが、Hořava の論文には書かれていない。

通じて、3次元 Chern-Simons 重力項 \oplus アインシュタイン重力項 ($= S_{3\text{dCS}}[g] + S_{3\text{dEG}}[g] = W[g]$) と密接に関係していることがわかる。⁷ この理論は、3次元 topological massive gravity[8] として知られ、くり込み可能であろうと推測されている。

D. Lifshitz 点

Hořava 理論は高階微分を含むため違和感を覚える読者も多いだろう。では、実際に高階微分が重要となるような物理系はあるのだろうか? Hořava が指摘したように、物性系での臨界現象において Lifshitz 点をもつ物理系では高階微分の項が重要となることが知られている [9, 10]。Lifshitz 点について説明するために、臨界現象や相転移現象を定性的に記述するのに便利な Ginzburg-Landau 理論を考察しよう。Ginzburg-Landau 理論は、秩序変数を M としたとき M のべきで自由エネルギー F を展開したものである。

$$F = aM^2 + bM^4 + cM^6 + \dots + \alpha(\nabla M)^2 + \beta(\nabla^2 M)^2 + \dots \quad (15)$$

よく知られた2次相転移の系では、第1項と第2項 (a, b 項) のみを残した自由エネルギーを考察すれば十分である。このとき $b > 0$ であり、第1項の係数 a は臨界温度 T_c を境に符号を変える。すなわち、 $T > T_c$ では $a > 0$ で M の期待値はゼロ ($\langle M \rangle = 0$) となる。 $T < T_c$ では $a < 0$ で $\langle M \rangle \neq 0$ となり、強磁性体では自発磁化が発生したことになる。したがって、臨界温度 $T = T_c$ では $a = 0$ となり、 M^4 項が主要項となる。

次に3重臨界点をもつ系を考えよう。このときは第1項から第3項 (a, b, c 項) まで残す必要がある。この系には3つの相が存在し、その3つの相が一点に集まる点が3重臨界点である。この点上では、 $a = b = 0$ となり M^6 の項が主要項となる。

さていよいよ Lifshitz 点に移ろう。このときは、 a, b, α, β の項が必要となり、高次の微分項も含めておく必要がある。Lifshitz 点をもつ系には3つ以上の相が存在する。このとき、秩序相、無秩序相に加えて転調相と呼ばれる相 (秩序-無秩序の共存/競合相) が存在するのが特徴である。これらの3つの相が出会う点が Lifshitz 点と呼ばれ、 $a = \alpha = 0$ となっており、空間の2階微分項の係数 α がゼロとなり4階微分の項が主要項となる。このように Lifshitz 点上では高階微分の理論によって支配されることになる。したがって、Hořava の重力理論は Lifshitz 点上の重力理論といえるかもしれない。⁸

本講演では Hořava 重力理論の物理的背景に的を絞って解説してきた。一見するとローレンツ不変性を放棄した Hořava 理論は受け入れ難いものに思えるが、よくよくその物理的背景を理解してみるとアイデアに富んだ理論であることがわかる。もちろん、この理論が本物であるためには

⁷波動関数に対する Wheeler-DeWitt 方程式の解として次の事実が知られている。3次元 Chern-Simons 重力項はループ重力理論での解になっていて [6]、3次元アインシュタイン重力項は強結合極限での解になっている [7]。何やら意味ありげではあるが、その物理的意味はよく分かっていない。

⁸Hořava 重力理論では、空間微分は6次なのでさらに $\beta = 0$ となっている必要がある。

実験的検証を受ける必要があるし、何よりも低エネルギーでアインシュタイン重力理論に一致することを示す必要がある。これはまだ決着のついていない問題で、古典レベルでさえ論争が繰り広げられている点でもある。本講演では触れることが出来なかったが、Hořava 重力理論に基づく研究が数多く発表されている。例えば、宇宙論への応用、ブラックホール解の探索、純理論的考察など多岐にわたる。Hořava 理論を通じて、逆にローレンツ不変性の重要性が再認識されることになるかも知れない。これまで常識だと信じて疑ってこなかったことにメスを入れることも時には必要だという教訓を与えてくれているのかも知れない。量子重力理論に立ち向かうには、発想の豊かさと大胆さとを兼ね備えている必要があるのだろう。

References

- [1] P. Hořava, *Phys. Rev.* **D79** (2009) 084008, [arXiv:0901.3775].
- [2] P. Hořava, *JHEP* **03** (2009) 020, [arXiv:0812.4287].
- [3] A. Wheeler, in *Battelle Rencontres*, edited by C. DeWitt and J. A. Wheeler (Benjamin, New York, 1968) ; B. S. DeWitt, *Phys. Rev.* **160** (1967) 1113.
- [4] D. Mattingly, *Living Rev. Rel.* **8** (2005) 5, [gr-qc/0502097]; T. Jacobson, S. Liberati, D. Mattingly, *Annals Phys.* **321** (2006) 150, [astro-ph/0505267].
- [5] E. S. Fradkin and A. A. Tseytlin, *Phys. Rep.* **119** (1985) 233.
- [6] H. Kodama, *Phys. Rev.* **D42** (1990) 2548.
- [7] T. Horiguchi, K. Maeda and M. Sakamoto, *Phys. Lett.* **B344** (1995) 105, [hep-th/9409152]; K. Maeda and M. Sakamoto, *Phys. Rev.* **D54** (1996) 1500, [hep-th/9604150]; M. Sakamoto, *Phys. Rev.* **D79** (2009) 124038, [arXiv:0905.4326].
- [8] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 975; *Ann. Phys. (N.Y.)* **140** (1982) 372.
- [9] E. M. Lifshitz, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **11** (1941) 255; **11** (1941) 269.
- [10] 例えば、次の教科書に解説がある。P.M. チェイキン, T.C. ルベンスキー, “チェイキン&ルベンスキー現代の凝縮系物理学” (物理学叢書), 吉岡書店, 2000 年.

Vacuum structure around identity based solutions¹

理化学研究所 岸本 功

E-mail: ikishimo@riken.jp

パラメータ a を含む identity-based 解のまわりの開弦の場の理論を考え、その Siegel ゲージの古典解を数値的に構成しゲージ不変量を評価した。その結果 $a > -1/2$ では安定な解が存在し $a = -1/2$ では摂動論的真空に対応する不安定な解が存在することが示唆される結果を得た。これらは、元の解が $a = -1/2$ ではタキオン真空を与え $a > -1/2$ では pure gauge であるという従来の予想に対する定量的な証拠を与えている。

ボゾニックな cubic な開弦の場の理論において、2002 年に高橋-谷本により identity state に演算子を有限回かけた形の解析解 (TT 解) が構成され、解に含まれるパラメータ a が $-1/2$ になるところで非自明なタキオン凝縮解をあらわしていることが期待されていた。実際、解を形式的に pure gauge の形に書き直したとき $a > -1/2$ ではゲージパラメータをあらわす弦場が特異になっており、そこでは非自明な解になっていることが示唆される。しかし、このような identity-based 解を用いてゲージ不変量を直接評価するのは、途中で発散する表式に遭遇するため困難である。別の方針として TT 解まわりで元の作用を展開しなおした理論を考えると、新しい BRS 演算子 Q' が厳密に計算でき、そのコホモロジーは $a = -1/2$ でのみ消えていることがわかる。²

今回は TT 解まわりの理論において $Q'\Phi + \Phi * \Phi = 0$ を満たす Siegel ゲージの数値解をレベルトランケーションにより求め、その解におけるゲージ不変量 (normalize した vacuum energy $f_a(\Phi) = 2\pi^2(\langle \Phi, Q'\Phi \rangle / 2 + \langle \Phi, \Phi * \Phi \rangle / 3)$ と gauge invariant overlap $\mathcal{O}_V(\Phi) = 2\pi \langle \hat{\gamma}(1_c, 2) | \Phi_V \rangle_{1_c} | \Phi \rangle_2$) を計算した。数値解は具体的には逐次近似法で構成した。そのとき初期配位により、 $a = 0$ つまり $Q' = Q_B$ のときの非自明解 (通常のタキオン真空解) から連続につながる解 Φ_1 と $a = -1/2$ の非自明解から連続につながる解 Φ_2 を各 $a (\geq -1/2)$ で構成した。その結果、レベルを上げていくと

$$f_a(\Phi_1) = \begin{cases} -1 & (a > -1/2) \\ 0 & (a = -1/2) \end{cases}, \quad \mathcal{O}_V(\Phi_1) = \begin{cases} +1 & (a > -1/2) \\ 0 & (a = -1/2) \end{cases},$$
$$f_a(\Phi_2) = \begin{cases} 0 & (a > -1/2) \\ +1 & (a = -1/2) \end{cases}, \quad \mathcal{O}_V(\Phi_2) = \begin{cases} 0 & (a > -1/2) \\ -1 & (a = -1/2) \end{cases},$$

に近づく傾向が見えた。これは $a > -1/2$ のときはポテンシャルの高さが D ブレーン張力分だけ下がった安定な解が存在し、 $a = -1/2$ ではポテンシャルの高さが D ブレーン張力分だけ上がった不安定な解が存在することを示している。後者は摂動論的真空を表す解だと解釈できる。これらの結果は元の TT 解が $a = -1/2$ では Sen の予想におけるタキオン真空を与え $a > -1/2$ では pure gauge であることを示唆している。

2005 年に Schnabl の解析解が登場して以来、タキオン真空解といえば Schnabl 解が議論されることが多いが、今回の計算は TT 解も同様な性質をもつことを改めて示した結果である。

¹高橋智彦氏 (奈良女大理) との共同研究に基づく: I. Kishimoto and T. Takahashi, arXiv:0904.1095 [hep-th].

²I. Kishimoto and T. Takahashi, Prog. Theor. Phys. **108**, 591 (2002) [arXiv:hep-th/0205275].

高密度 QCD におけるカラー超伝導ボージェット

理化学研究所 川合理論物理学研究室 衛藤 稔

E-mail: meto@riken.jp

量子色力学 (QCD) は漸近自由な理論であるため、現在の宇宙のような低温度・低密度領域では解析が非常に難しい理論である。一方で天体内部では低温度・高密度な状況が発現する可能性が指摘されており、そこでは自由なクォークやグルーオンが飛び回るクォーク物質の様々な秩序状態が発現する。高密度 QCD の相構造は様々なものが提案されていてまだはっきりと分かってはいないが、低温のまま密度を上げていくとカラー超伝導状態になると考えられる。金属の超伝導状態と類似してカラー超伝導状態ではマクロな数のクォークがクーパー対を形成する。密度が特に高い領域ではカラー超伝導は CFL 相に落ち着き、そこではペアリングギャップがカラー・フレーバー回転を同時にしても変わらないような高い対称性が存在する。

超流動・超伝導状態ではそれぞれ外部回転及び外部磁場に対する応答として位相的に安定な渦が発生する。これら二つの性質を持つカラー超伝導には独特の渦が発生する。これを準超流動渦または非可換渦と呼ぶ。我々はこの位相的渦を高密度 QCD の有効理論である Landau-Ginzburg (LG) 理論 $\mathcal{L} = \text{Tr}[-\frac{1}{4}F_{ij}^2 + (D_i\Phi)^2 - m^2\Phi\Phi^\dagger - \lambda_2(\Phi\Phi^\dagger)^2] - \lambda_1(\text{Tr}\Phi\Phi^\dagger)^2$ で詳細に調べた。ここで F_{ij} はカラーゲージ場の運動項、 3×3 行列で表されたスカラー場 Φ はクォーク (u, d, s) のペアリングギャップを表している。また簡単のため全てのクォークの質量は零として近似しあり、結合定数 $m, \lambda_{1,2}$ は温度とバリオン化学ポテンシャルの関数である。系の基底状態は $\Phi = v\mathbf{1}_3 [v^2 \equiv -m^2/2(3\lambda_1 + \lambda_2) > 0]$ で CFL 相にあり、系の対称性は大局的 $SU(3)_{c+f}$ まで破れる。自発的に破れた $U(1)_B$ が位相的に安定な渦を保証するが、同時に $SU(3)_c$ も完全に破れているので、この二つの対称性の混合が準超流動渦を形成する。具体的な渦解は $\Phi = v \text{diag}(f(r)e^{i\theta}, g(r), g(r))$, $A_i = \frac{\epsilon_{ij}x_j(1-h(r))}{3\sqrt{2}g_s r^2} \text{diag}(-2, 1, 1)$ という Ansatz を用いて、運動方程式を数値的に解くことにより得られる。渦解の詳細は基底状態の周りの揺らぎの質量 $m_G^2 = 2g_s^2v^2$, $m_\phi^2 = -2m^2$ 及び $m_\chi^2 = 4\lambda_2v^2$ の大小に大きく依存する ($U(1)_B$ の破れの零質量モードも存在する)。さて、通常の超流動渦と同じ理由で準超流動渦の質量も無限に大きな系では発散する。一方で渦中のカラー磁束は有限の広がりしかないという著しい性質がある。渦の周りの場の振る舞いの様子は渦-渦相互作用を決定する重要な要因である。例えば超流動渦間の相互作用は零質量の南部・Goldstone 粒子の交換によって引き起こされ、また超伝導渦間の相互作用は電磁場とスカラー場の浸入長および相関長の大小によって決定される。準超流動渦は奇妙で複雑な漸近的振る舞いを示す。Φ のトレース部分是对数的、同非トレース部分とグルーオンは指数的となる。前者は遠方で支配的な斥力を生み、後二者は比較的近距离の引力・斥力の源となる。この報告では渦間の相互作用を完全に決定するには至らなかったが、超流動渦間の相互作用はこれら 3 つの力が複雑に絡み合い相対距離の関数として求まると予想される。これらの情報は例えばパルサーのグリッチ現象の説明や中性子星の新しい現象の発見に繋がる可能性があり今後大いに発展が期待される。本研究は新田宗土氏との共同研究である“Color Magnetic Flux Tubes in Dense QCD”(arXiv:0907.1278 [hep-ph]) に基づいています。カラー超伝導に関する文献は上記の論文中に明記してありますので興味のある方はそちらを参考にしてください。

Vortex-type BPS solitons in Mass-deformed ABJM model

Department of Physics, Sungkyunkwan University Hiroaki Nakajima

E-mail: nakajima@skku.edu

この講演は Chanju Kim 氏、Yoonbai Kim 氏、O-Kab Kwon 氏との共著論文 [1] に基づいています。

2年前の Bagger-Lambert の仕事 [2] (及び Gustavsson [3]) を契機として、M2-brane の世界体積上の作用とそれに関連する研究が進んでいる。上で得られた BLG 模型は $\mathcal{N} = 8$ 超共形対称性という望ましい対称性を持っているが、2枚の M2-brane しか表せないことと brane 解釈が容易ではないという弱点も持っている。その後提案された ABJM 模型 [4] は $\mathcal{N} = 6$ 超共形対称性しかもっていないが、任意の枚数の M2-brane を表現できることと brane 解釈が容易であるということから、様々な側面から盛んに研究されている。我々はこの ABJM 模型が持つ BPS ソリトン解に着目し half-BPS の場合について詳しく解析した。講演では特に安定なソリトンが存在できる、(すべての超対称性を保つように) 質量変形された ABJM 模型の場合に絞って説明した。

ABJM 模型は $\mathcal{N} = 6$ 超共形対称性を持つ Chern-Simons-matter theory であるが、我々が得た half-BPS 解はすべて Yang-Mills 型の方程式であった。すなわち Abrikosov-Nielsen-Olsen vortex や non-abelian vortex などである。一方で Chern-Simons 型の vortex は half-BPS ではなく、低い BPS 解として現れることがわかった。

References

- [1] Chanju Kim, Yoonbai Kim, O-Kab Kwon and Hiroaki Nakajima, Phys. Rev D **80** (2009) 045013 arXiv:0905.1759 [hep-th].
- [2] J. Bagger and N. Lambert, Phys. Rev. D **77** (2008) 065008 [arXiv:0711.0955 [hep-th]].
- [3] A. Gustavsson, “Algebraic structures on parallel M2-branes,” Nucl. Phys. B **811** 66 (2009) [arXiv:0709.1260 [hep-th]].
- [4] O. Aharony, O. Bergman, D. L. Jafferis and J. Maldacena, “N=6 superconformal Chern-Simons-matter theories, M2-branes and their gravity duals,” JHEP **0810** 091 (2008) [arXiv:0806.1218 [hep-th]].

Toward M5 branes from ABJM action¹

京都大学基礎物理学研究所 八木 太

E-mail: futoshi@yukawa.kyoto-u.ac.jp

近年、複数枚の M2 ブレーン上の理論として ABJM 理論 [1] が提唱され、M2-ブレーンに関する理解が飛躍的に深まった。それに比べると、M5 ブレーンに関しては、まだまだわかっていないことが多い。そこで、M 理論を理解するための次なる大きな目標としては、M5 ブレーン複数枚の作用を見つけるということが挙げられる。

ところで、昔からよく知られている通り、D2 ブレーン N 枚の上に実現する理論は $2+1$ 次元の $U(N)$ 超対称ゲージ理論である。この理論において、 N が無限大のときに、フラックスの入った D4 ブレーンに対応する古典解は非可換平面の解としてよく知られており、その周りでの揺らぎを考えると、D4 ブレーンの作用が得られることも知られている。無限枚の D2 ブレーンから D4 ブレーンを作るというこの状況を、M 理論に持ち上げて考えると、M2 ブレーン無限枚から M5 ブレーンを作るということになる。すなわち、ABJM 理論において M5 ブレーンに対応する古典解の周りの揺らぎを考えれば、M5 ブレーンの作用が求まると素朴には期待できる。

そこで、まずその第一歩として、我々は、ABJM 理論において M5 ブレーンに対応すると期待される古典解を見出した。ABJM 理論は、Chern-Simons coupling とスカラー場の真空期待値の比を固定した上で両者を同時に無限大に飛ばすスケールング極限をとると、 S^1 コンパクト化された状況になり、D2 ブレーン上の理論に落ちることが知られている。我々の解は、このようなスケールング極限で、すでに知られている D4 ブレーン解になるように構成されており、M5 ブレーン解であると期待できる。

我々はさらに、この古典解が確かに M5 ブレーンに対応する根拠として、以下の 2 つのチェックを行った。1 つ目のチェックとして、我々が見つけた解に対応する M5 ブレーンの配位が、すでに知られている M5 ブレーン 1 枚の作用から導かれる運動方程式を満たすことを確かめた。さらに 2 つ目のチェックとして、我々の解を用いて ABJM 理論の側から求めた (フラックス入りの) M5 ブレーンの張力が、M5 ブレーン 1 枚の作用を用いて計算した M5 ブレーンの張力と一致することを確かめた。以上のチェックにより、我々が見つけた ABJM 模型の古典解は確かに M5 ブレーンに対応するものであると考えられる。

一方で、我々の解は、素朴には $4+1$ 次元的な広がりしか見えず、残りの 1 次元はつぶれてしまっていて見えなくなってしまう。このせいで、素朴にこの古典解の周りの揺らぎを考えても、 $5+1$ 次元に広がった物体である M5 ブレーンを適切に記述する作用が求まりそうにないという問題に直面している。これは、今後の課題である。

References

- [1] O. Aharony, O. Bergman, D. L. Jafferis and J. Maldacena, JHEP **0810**, 091 (2008).

¹この発表は、寺嶋靖治氏との現在進行中の共同研究に基づいている。

Domain walls in massive nonlinear sigma model on quadric surface

Center for Quantum Spacetime (CQUeST), ソガン大学 新井真人

E-mail: arai@sogang.ac.kr

近年、5次元 $N = 1$ 超対称ゲージ理論におけるドメインウォール解の理解が論文 [1] においてなされた。この論文では、ゲージ群 $U(N_C)$ とそれに結合するフレーバー ($N_F > N_C$)、ならびにフレーバーの質量と Fayet-Iliopoulos 項の入った 5次元の超対称ゲージ模型が考えられ、 $N_C C_{N_F}$ 個の離散真空とそれらを結ぶ BPS マルチドメインウォール解の存在が moduli matrix approach という手法で示された。更に、解のモジュライ空間がグラスマン多様体 $G_{N_F, N_C} = \frac{U(N_C)}{U(N_C - N_F) \times U(N_F)}$ であることも明らかにされた。この模型のウォール解は、ゲージ結合定数が有限と無限との場合に求められているが、特に後者の場合は、理論がグラスマン多様体の余接束 ($T^*G_{N_F, N_C}$) を標的空間に持つような超対称非線形シグマ模型に落ちることがわかっている。つまり、上記のウォール解はこの超対称非線形シグマ模型のものであるとも言える。ここで、グラスマン多様体はエルミート対称空間の 1 つであるが、グラスマン多様体以外には、5つのエルミート対称空間が知られている。それ故、グラスマン多様体以外のエルミート対称空間を考え、その余接束を標的空間に持つような超対称非線形シグマ模型、ならびのそのウォール解を考えることは興味深い。しかし、そのような超対称非線形シグマ模型に対応する超対称ゲージ理論を構築することは非常に困難である。一方で、[1] の模型の解析から、模型の真空とウォール解には $T^*G_{N_F, N_C}$ の余接部分は効かないということがわかっている。即ち、真空とウォール解を考える際には、余接部分を落とした G_{N_F, N_C} を標的空間に持つ超対称非線形シグマ模型さえ考えれば充分であるということが分かる。同じことが G_{N_F, N_C} 以外のエルミート対称空間の余接束を標的空間に持つ超対称非線形シグマ模型を考えた時にも起こるものと期待される。

そこで、本研究ではグラスマン多様体以外のエルミート対称空間として complex quadric surface $Q^N = \frac{SO(N+2)}{SO(N) \times SO(2)}$ を考え、それを標的空間に持つ超対称非線形シグマ模型に対応する超対称ゲージ理論を考察し、模型の真空、ならびに BPS ウォール解を導出した。模型に質量を導入するために、4次元の質量のない超対称ゲージ理論から出発し、Scherk-Schwarz 次元簡約によって、3次元の質量のある超対称ゲージ理論を構築した。その真空を解析した結果、 $2[N/2 + 1]$ 個の離散真空が存在することがわかった。BPS 方程式も導出し moduli matrix approach を用いて、これら離散真空を結ぶ BPS ウォール解の導出に成功した。特に、 $N \leq 4$ の場合について解を導出し、4重ウォール解まで存在することを確かめた。更に、解のモジュライ空間は complex quadric surface Q^N であることも確かめた。

References

- [1] Y. Isozumi, M. Nitta, K. Ohashi and N. Sakai, Phys. Rev. Lett. **93** (2004) 161601;
Y. Isozumi, M. Nitta, K. Ohashi and N. Sakai, Phys. Rev. D **70** (2004) 125014.

Towards boundary open-closed string field theory

名大多元数理 石田明

E-mail: ishida@math.nagoya-u.ac.jp

閉弦と開弦を含む弦の場の理論 (open-closed SFT) を構成することは、弦理論における重要な課題であると言える。本研究では、open-closed SFT を構成する第一歩として、閉弦と開弦の相互作用項がどのような形をしているのか調べる。

弦の場の理論の作用 S は Batalin-Vilkovisky (BV) 形式を用いて構成される。具体的には、まず、弦の場の空間上で fermionic closed 2-form ω を定義する。次に、(古典)BV 方程式 $\{S, S\} = 0$ を解くことで弦の場の理論の作用 S が求まる。ここで、 $\{A, B\}$ は antibracket と呼ばれ ω を用いて表されている。この BV 方程式が S に対して強い制限を与える。

本研究では、閉弦の場の理論と開弦の場の理論を出発点として、その相互作用項を具体的に構成することを試みた。開弦の場の理論はいくつかあるが、ここでは境界的弦の場の理論 (BSFT) を採用する。すなわち、弦の場の作用を

$$S = S_{closed} + S_{open} + \hbar^{1/2} S_{int} + \dots$$
$$S_{closed} = \frac{1}{2} \langle \Psi | c_0^- Q_B | \Psi \rangle, \quad S_{open}: \text{BSFT action,}$$

fermionic 2-form を

$$\omega_{ij} = \begin{pmatrix} \omega_{closed} & \omega_{co} \\ \omega_{oc} & \omega_{open} \end{pmatrix}$$

として、BV 方程式を満たすように S_{int} と ω_{oc} を求める。 S_{int} は閉弦と開弦の相互作用項で、on-shell ではよく知られた形 $\langle B | c_0^- | \Psi \rangle$ となるようにとる。我々は、BV 方程式 $\{S, S\} = 0$ の $\mathcal{O}(\hbar^{1/2})$ まで消えるような S_{int} と ω_{oc} の組み合わせを 2 つ発見した。また、上で求めた S_{int} と ω_{oc} のうち 1 つは、 $\mathcal{O}(\hbar)$ でも、BV 方程式の大部分の項は消えることが分かった。上の 2 つのうち、どちらが望ましいのか、また、 S に \hbar の高次の項をどのように付け加えるかについては今後の課題である。

なお、この発表は寺口俊介氏 (名大理) との共同研究に基づいている [1]。

References

- [1] A. Ishida and S. Teraguchi, in progress.

Particle Propagation on a Circle with a Point Interaction

Kobe University Satoshi Ohya
E-mail: ohya@kobe-u.ac.jp

Quantum system restricted on a bounded domain has become more relevant for theoretical physics. There, the role of boundary conditions is very important not only for the long distance regime but also for the short distance regime. Mathematically, the correct framework to treat the boundary conditions in quantum theory is by means of the analysis of von Neumann's self-adjoint extension of the Hamiltonian operator. Physically speaking, the variety of boundary conditions provided by the self-adjoint extension of the Hamiltonian implies that the very rich structure of point interactions available in quantum theory. Indeed, quantum mechanical system in one spatial dimension is known to admit a $U(2)$ family of point interactions [1], which include all known point interactions such as the Dirichlet/Neumann wall or the δ -function potential.

We studied the path integral description of $U(2)$ family of point interactions and showed that the path integral representation of the Feynman kernel $K(x, T; y, 0) = \langle x | e^{-iHT} | y \rangle$ for a particle on a circle in the presence of a single point interaction can be written into the following generic form [2]:

$$K(x, T; y, 0) = \sum_{\text{path}} \int_p e^{-ip^2 T} (\text{weight factor}) \exp[ip(\text{length of the path})]. \quad (1)$$

This expression will require more detailed explanations. When a particle reaches to the position of point interaction, there must be in general two possibilities: reflection or transmission. Thus the paths for a particle interacting n -times to the point interaction must consist of 2^n distinct paths. This is the summation \sum_{path} in (1). Now it is intuitively clear that reflected (transmitted) trajectory should be weighted with a reflection (transmission) coefficient for every time when a particle is reflected (transmitted) by the point interaction. This is the weight factor in (1).

We also found the trace formulae on a circle with a single point interaction, which are some kind of duality and provide a direct connection between quantum energy spectrum and classical length spectrum. We believe that our findings will be useful for computations of the Casimir energy or the perturbative loop calculations of Feynman diagrams in quantum field theory with nontrivial extended defects (branes or boundaries).

References

- [1] T. Cheon, T. Fülöp and I. Tsutsui, *Symmetry, Duality, and Anholonomy of Point Interactions in One Dimension*, Ann. Phys. **294** (2001) 1, [arXiv:quant-ph/0008123](#).
- [2] S. Ohya and M. Sakamoto, *Particle propagation on a circle with a point interaction*, J. Phys. A **42** (2009) 275301, [arXiv:0902.0855\[quant-ph\]](#).

Holomorphic maps and the complete $1/N$ expansion of 2D $SU(N)$ Yang-Mills

ロンドン大学クイーンメアリー 木村祐介

E-mail: y.kimura@qmul.ac.uk

90年代前半にグロスとテイラーは、2次元ヤンミルズ理論(2DYM)のラージ N 展開が弦理論的な解釈を持つことを示した。種数 G のターゲット空間で定義された $SU(N)$ の2DYMの分配関数は、 $SU(N)$ の規約表現の次元の和として $\sum_R (DimR)^{2-2G}$ で与えられる。この $1/N$ 展開を実行するためには $DimR = \frac{N^n}{n!} \chi_R(\Omega_n)$ の公式を使って $SU(N)$ の言葉から対称群 S_n の言葉に移る。 n はヤング図の箱の数であり、 χ_R は対称群の指標で、 Ω_n はある重みで足された S_n の元の和である。 Ω_n は2DYMを弦理論として解釈する時の弦の相互作用の種になるものである。あとは和の置き換え $\sum_R \rightarrow \sum_n \sum_{R \vdash n}$ を行い、対称群のテクニックを駆使して

$$Z_G^+ = \sum_n \frac{N^{n(2-2G)}}{n!} \sum_{s_1, t_1 \dots s_G, t_G \in S_n} \delta_n(\Omega_n^{2-2G} \prod_{i=1}^G s_i t_i s_i^{-1} t_i^{-1}) \quad (1)$$

を得る。(注：ターゲット空間として境界も含めると Ω のべきは $2 - 2G - B$ となりこれはオイラー数である。)ところがこの式はヤング図の長さが N に近い表現の寄与が取り込まれていないため完全な展開ではなく、弦の言葉で言うと片方の向きの弦しか入っていない(カイラル(chiral)理論)。完全な理論は2つの規約表現 R と S を用意し、 R と \bar{S} を並べた $R\bar{S}$ を1つの表現とみなすことで得られると考えられており、

$$\begin{aligned} Z_G &= \sum_{m,n} \sum_{R \vdash m, S \vdash n} (DimR\bar{S}) \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{N^{(m+n)(2-2G)}}{m!n!} \sum_{R \vdash m, S \vdash n} \sum_{s_1, t_1 \dots s_G, t_G \in S_m \times S_n} \delta_{m,n}(\Omega_{m,n}^{2-2G} \prod_{i=1}^G s_i t_i s_i^{-1} t_i^{-1}) \end{aligned} \quad (2)$$

という展開が得られる。ここで $\Omega_{m,n}$ は $S_m \times S_n$ の元の和で与えられ、 S_m と S_n の2つの対称群の存在が弦の2つの向きに対応している。この $\Omega_{m,n}$ が完全な弦としての解釈を与える起源であるが、我々は[1]の論文で

$$\Omega_{m,n}^{-1} = \Omega_{m+n|S_m \times S_n}^{-1} \quad (3)$$

という式を得た。大雑把にはこの式は、(2)の展開は(1)で n を $m+n$ としてもものとの関係が付くことを言っている。ただし Ω ではなく Ω^{-1} 同士の関係なので(2)の展開を分解し、例えば $G=2$ の場合は、その $G=2$ の多様体を2つに切って、境界を1つ持った $G=1$ (オイラー数が -1) の多様体2つに分解する。このようにしてある種数 G を持つ多様体上で定義された2DYMの完全な展開は、オイラー数が -1 の多様体上で定義されたカイラルな弦理論に分解される。カイラルな理論は完全な理論との違いは、分解した多様体の張り合わせの部分のみに含まれる。

[1] Y. Kimura and S. Ramgoolam, "Holomorphic maps and the complete $1/N$ expansion of 2D $SU(N)$ Yang-Mills," JHEP **0806** (2008) 015 [arXiv:0802.3662 [hep-th]].

Instanton Calculus in Deformed $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills Theory

東京工業大学 理工学研究科 基礎物理学専攻 坂 拓哉

E-mail: bstsaka@th.phys.titech.ac.jp

現在、場の理論における物理量の計算はその多くを摂動論に頼っているが、近年、弦理論を用いてゲージ理論の非摂動的効果が解析できることが知られてきている。超対称 Yang-Mills 理論における非摂動的効果の中でも特にインスタントンからの寄与の解析は、 $\mathcal{N} = 2$ super Yang-Mills 理論におけるインスタントン効果を含めた分配関数を求めた Nekrasov [1] などが有名であるが、このインスタントン有効作用は、超対称 Yang-Mills 理論の存在する C^2/\mathbf{Z}_2 orbifold 上の D3-brane に埋め込まれた D(-1)-brane の有効作用として求めることができ、さらに [1] で用いられているインスタントン分配関数の導出の際に重要となる Yang-Mills 理論におけるインスタントン有効作用の Ω -background 変形は、弦理論の立場では Yang-Mills 理論の存在する D3-brane への R-R 3-form による graviphoton 背景場の効果として解釈できることが知られている [2]。

このような中で、本研究において私たちは D3-brane 上の $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills 理論における自己双対な R-R 3-form の影響を調べた。自己双対な Ramond-Ramond 3-form による変形は graviphoton 変形と見なせるもの (S,A 型) と質量項変形と見なせるもの (A,S 型) がある。このうち、(S,A) 変形された D(-1)-brane 有効作用は Ω -background での $\mathcal{N} = 2$ super Yang-Mills 理論でのインスタントン有効作用と一致するが、同じ背景場のもとでの D3-brane 上の Yang-Mills 理論から ADHM 構成法を使って求められるインスタントン有効作用を見ると変形の 2 次のオーダーで食い違っていることがわかる。これは、graviphoton 背景場のもとで D(-1)-brane の位置に質量項が生じるために起こる現象で、変形された Yang-Mills 理論に並進対称性を破る項を加えることで解決できることがわかった。また、(A,S) 型の変形においては D(-1)-brane 有効作用と D3-brane 上のインスタントン有効作用は一致しており、この有効作用の変形は D3-brane 有効理論に対するフェルミオンの質量項の導入として解釈できる。また、この変形においては質量の選び方によって超対称性を $\mathcal{N} = 2^*$ や $\mathcal{N} = 1^*$ に破ることができることがわかった。これらの結果は、先行する論文 [3] における $\mathcal{N} = 2$ super Yang-Mills 理論での計算結果と同様のものである。

References

- [1] N. A. Nekrasov, Adv. Theor. Math. Phys. **7** (2004) 831 [arXiv:hep-th/0206161].
- [2] M. Billo, M. Frau, F. Fucito and A. Lerda, JHEP **0611** (2006) 012 [arXiv:hep-th/0606013].
- [3] K. Ito, H. Nakajima and S. Sasaki, JHEP **0812** (2008) 113 [arXiv:0811.3322 [hep-th]].

Right-handed Neutrinos in F-theory Compactifications

東京大学素粒子論研究室 土屋陽一

E-mail: tsuchiya@hep-th.phys.s.u-tokyo.ac.jp

昨年 (2008 年) から、F 理論に基づく大統一理論がさかんに研究されている。特に大きな進展として、F 理論における物質場の記述法や湯川相互作用の計算法が明らかになったことが挙げられる。これらの進展は SU(5) charged matter に関するものである。

一方、右巻きニュートリノは SU(5) neutral な粒子である。したがって、レプトンセクターの湯川を理解するためには、SU(5) neutral な粒子を含む湯川相互作用の計算法を調べる必要がある。我々は今回の論文でこの部分に決着をつけた。そうすることで、右巻きニュートリノとは F 理論において何なのか、という問いにアタックすることが可能になる。我々は、F 理論をコンパクト化するときの Calabi-Yau 4-fold の複素構造モジュライが、右巻きニュートリノと同定できることを示した。

ところで、右巻きニュートリノに関する物理と次元 4 の陽子崩壊問題は密接に関わっている。特に、ニュートリノ湯川相互作用の寄与がどこからくるのかは、次元 4 陽子崩壊問題をどうやって解くかという方法に依存している。そこで、今回の論文では次元 4 陽子崩壊問題についても議論した。この問題の本質は、ともに SU(5) の $\mathfrak{5}$ 表現である down-type Higgs H_d とクォーク・レプトン (\bar{D}, L) をどう区別するかである。Vafa たちのグループはこの問題の解決法として、 $\mathfrak{5}$ 表現 matter が局在するカーブが可約であればよいという考えを提唱した。カーブを分離すれば、別々の既約成分に H_d と (\bar{D}, L) を局在させられるだろう、と彼らは考えたのである。我々は、その方法で果たして陽子崩壊問題が解決できているのかを検証した。その結果、彼らの方法では解決できていないことがわかった。そこで、代わりとなる解決案として、 \mathbb{Z}_2 パリティシナリオを提案した。これは、 H_d と (\bar{D}, L) に異なるパリティを付与することで両者を区別しようとする方法である。この方法だと、次元 4 の陽子崩壊問題は解決される。

Supersymmetric reduced models with a symmetry based on Filippov algebra

Taiwan National Center for Theoretical Sciences Dan Tomino
E-mail: dantomino@gmail.com

We proposed following reduced model action with Filippov 3-algebraic structure:

$$S = \frac{1}{6} \langle [X_I, X_J, X_K][X^I, X^J, X^K] \rangle + \frac{1}{2} \langle \bar{\Psi} \Gamma_{IJ} [X^I, X^J, \Psi] \rangle \quad (1)$$

where $I, J, K = 1, 2, 3, 4$ and Γ^{IJ} is the Gamma matrix flat four dimensional spacetime with $\eta^{IJ} = \text{diag}(-, -, +, +)$. In such 2+2 dimensional spacetime Ψ is the (pseudo-) *Majorana-Weyl fermion*. The reduced model action (1) has a fermionic symmetry

$$\delta X^I = i\bar{\epsilon} \Gamma^I \Psi, \quad \delta \Psi = \frac{i}{6} [X^I, X^J, X^K] \Gamma_{IJK} \epsilon.$$

A combination of this symmetry and other gauge and translational symmetries forms a symmetry which is regarded as the target space supersymmetry, as similar as in IIB matrix model.

If we identify the 3-bracket as the Nambu-Poisson bracket

$$[X^I, X^J, X^K] \rightarrow i\epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\mu X^I \partial_\nu X^J \partial_\rho X^K,$$

the reduced model action (1) is classically equivalent to covariant Green-Schwarz type supermembrane action in flat 2+2 dimensional spacetime. So we expect there is a closer relation between our reduced model and supermembrane. Action (1) could be understood as a regularization of continuum membrane by 3-algebra.

We also found other deduced models with 3- and 4-bracket structure. They are classically related to the supermembrane in 2+3 dimension and super 3-brane in 3+3 dimension.

Finally we would like to emphasize that this reduced model keeps full covariance of $SO(2, 2)$. It is not the case, for example, in the reduced model from Bagger-Lambert theory, which does not keep full $SO(1, 10)$ covariance rather has covariances of $SO(1, 2)$ and $SO(8)$.

This presentation is based on the collaboration with Kazuyuki Furuuchi of Taiwan National Center for Theoretical Sciences.

Original paper:

"Supersymmetric reduced models with a symmetry based on Filippov algebra" , Kazuyuki Furuuchi and Dan Tomino, JHEP 0905:070,2009. arXiv:0902.2041.

Anomaly-Free Supersymmetric σ -Model Based on the $SO(2N+1)$ Lie Algebra of the Fermion Operators -Optimization of a Reduced Scalar Potential and a Proper Solution-

Seiya NISHIYAMA, João da PROVIDÊNCIA,

Constança PROVIDÊNCIA and Flávio CORDEIRO

Centro de Física Teórica, Universidade de Coimbra 3000-Coimbra, Portugal

Corresponding author, *E-mail addresses:* seikoaquarius@ybb.ne.jp and nisiyama@teor.fis.uc.pt

The extended supersymmetric σ -model has been proposed based on the $SO(2N+1)$ Lie algebra spanned by fermion annihilation-creation operators and pair operators. The canonical transformation, extension of an $SO(2N)$ Bogoliubov transformation to an $SO(2N+1)$ group, is introduced. Embedding the $SO(2N+1)$ group into an $SO(2N+2)$ group and using $\frac{SO(2N+2)}{U(N+1)}$ coset variables, we have studied the supersymmetric σ -model on the Kähler manifold of symmetric space $\frac{SO(2N+2)}{U(N+1)}$. We have constructed the extended Killing potential, extension of the Killing potential in the $\frac{SO(2N)}{U(N)}$ coset space to that in the $\frac{SO(2N+2)}{U(N+1)}$ coset space. It is equivalent with the generalized density matrix whose diagonal-block part is related to a reduced scalar potential with the Fayet-Iliopoulos term. The f -deformed reduced scalar potential is optimized with respect to the vacuum expectation value (VEV) of the σ -model fields and a proper solution for one of the $SO(2N+1)$ group parameters has been obtained [1]. The proper solution, however, is only a little part of whole solutions which should be obtained from **anomaly-free** supersymmetric coset models. As already shown by van Holten et al. [2], if we construct some quantum field theories based on pure coset models, we meet with **serious problems of anomalies** in a holonomy group which particularly occur in pure supersymmetric coset models due to their chiral fermions [3,4]. This is also the cases for our orthogonal cosets, $\frac{SO(2N)}{U(N)}$ and its extended $\frac{SO(2N+2)}{U(N+1)}$, though each spinor representation of $SO(2N)$ group and its extended $SO(2N+2)$ group is anomaly free. A compact form of the **anomaly cancellation condition** was first given by Georgi and Glashow [5]. To construct **consistent anomaly-free supersymmetric coset models**, we must embed a coset coordinate in an anomaly-free spinor representation of $SO(2N+2)$ group and give a corresponding Kähler potential and then a Killing potential for an anomaly-free $\frac{SO(2N+2)}{U(N+1)}$ model based on each positive chiral spinor representation. To achieve such a subject on the case of the $SO(2N)$ group/algebra, van Holten et al. have proposed a method of constructing the Kähler and Killing potentials [2]. This method is considered to be very suggestive and useful for our present purpose of constructing the Kähler potential and the Killing potential for the case of the $SO(2N+2)$ group/algebra. Using such mathematical manipulation we reach a f -deformed reduced scalar potential. It is minimized with respect to the VEV of anomaly-free supersymmetric σ -model fields. Thus we find a f -deformed proper solution for an anomaly-free $\frac{SO(2\cdot 5+2)}{SU(5+1)\times U(1)}$ supersymmetric σ -model very different from the previous solution [1].

S.N. would like to thank to Prof. Alex H. Blin for hospitality extended to him at Centro de Física Teórica, Universidade de Coimbra. This work is supported by Portuguese Project POCTI/FIS/451/94.

References

- [1] S. Nishiyama, João da Providência, Constança Providência and Flávio Cordeiro, Nucl. Phys. **B802** (2008) 121.
- [2] S. Groot Nibbelink, T.S. Nyawelo and J.W. van Holten, Nucl. Phys. **B594** (2001) 441.
- [3] C.L. Ong, Phys. Rev. **D27** (1983) 3044; G. Moore and P. Nelson, Phys. Rev. Lett. **53** (1984) 1519; E. Cohen and C. Gomez, Nucl. Phys. **B254** (1985) 235; S. Aoyama and J.W. van Holten, Nucl. Phys. **B258** (1985) 18.
- [4] R. Bertlmann, *Anomalies in Quantum Field Theory*, The Clarendon Press, Oxford University Press Inc., 1996.
- [5] H. Georgi and S.L. Glashow, Phys. Rev. **D6** (1972) 429; See also the References below, M.L. Mehta, J. Math. Phys. **7** (1966) 1824 and M.L. Mehta and P.K. Srivastva, J. Math. Phys. **7** (1966) 1833.

CP-violation in higher dimensional gauge theory from the complex structure of extra dimensions

C.S.Lim¹, Nobuhito Maru², Kenji Nishiwaki¹

¹Department of Physics, Kobe University, ²Department of Physics, Chuo University

E-mail: nishiwaki@stu.kobe-u.ac.jp

Gauge-higgs unification scenario is very attractive because we can calculate higgs potential with independence of cutoff Λ despite a lack of renormalizability. In this scenario, we consider higgs is extra dimensional components of gauge fields. Higher dimensional gauge symmetry forbids local higgs mass term which is a part of local gauge mass term and there is no ultraviolet divergence about higgs mass.

But, we encounter the difficulty in generating CP-violation in this model. The reason is Yukawa coupling is derived from gauge coupling in this type of model and gauge coupling is real value. To circumvent this point, we consider the way of generating CP-violation from the complex structure of extra dimensions without any complex scalar field. Concretely speaking, mode functions can have relative complex phases on this geometry.

This time, we consider 6D QED on T^2/Z_4 orbifold. Z_4 is a discrete symmetry and we identify points which are rotated by an angle $\frac{\pi}{2}$. This Z_4 condition is described as $\omega \sim i\omega^1$. This is the simplest complex condition which we can consider. And the reason why we choose $U(1)$ gauge group is that structure of extra dimensions is independent of gauge group choice in general. Therefore, we start with the “simplest” setup — 6D QED on T^2/Z_4 —. We can see complex phases in mode functions with ($t : Z_4$ -parity) = $\pm i$ — $\Phi_{t=\pm i}^{(m,n)}(y, z)$ —².

$$\Phi_{t=\pm i}^{(m,n)}(y, z) \propto \left[\sin\left(\frac{my + nz}{R}\right) \mp i \sin\left(\frac{ny - mz}{R}\right) \right]$$

Our result is as follows. After mass matrices diagonalization, we show that complex phases remain in KK modes vertices of $\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$ and $\bar{\psi}\psi A_\omega$ even allowing for the fermionic re-phasing d.o.f.[1]. This means CP-violation occurs in this sector. P symmetry is also violated in KK modes interaction sector because of Z_4 symmetry. And zero mode sector is ordinary 4D QED and do not violate P and CP symmetries. In addition, we consider some re-phasing invariant operators and calculate EDM of e^- (fermion zero mode) at 1-loop level³.

References

- [1] M.Kobayashi and T.Maskawa, Progr. Theor. Phys. 49(1973) 652.

¹ $\omega \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(y + iz)$, y and z are components of 2D extra dimensions.

²Each bulk field is classified by Z_4 -parity (fourth roots of 1).

³At 1-loop level, EDM of e^- is zero.

Supersymmetric Quantum Spin Model and Quantum Hall Effect

Kazuki Hasebe Takuma National College of Technology

E-mail: hasebe@dg.takuma-ct.ac.jp

In this work, we introduce a supersymmetric extension of quantum antiferromagnetic states, *i.e.* supersymmetric valence bond solid (SVBS) states [1]. The SVBS states interpolate valence bond solid (VBS) states and (nearest neighbor) resonating valence bond (RVB) states. In particular, in 1D chain, the SVBS state interpolates AKLT state and Majumdar-Ghosh dimer state. Based on the $UOSp(1|2)$ graded symmetry, the truncated Hamiltonian whose ground state is the SVBS can also be derived explicitly.

In [2], the supersymmetric quantum Hall effect was developed, and Laughlin-Haldane wavefunction was derived as $\Psi = \prod_{i<j} (u_i v_j - v_i u_j - r \eta_i \eta_j)^m$, where u and v are Grassmann even and η Grassmann odd. (In [2], $r = 1$.) The supersymmetric Laughlin-Haldane wavefunction is invariant under the $UOSp(1|2)$ transformations generated by $l_\alpha = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma^\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $l_\alpha = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{x} \tau_\alpha \\ -x(\epsilon\tau)_\alpha^t & 0 \end{pmatrix}$, with $r = x^2$, $\tau_1 = (1, 0)^t$, and $\tau_2 = (0, 1)^t$. There are remarkable analogies between VBS states and the Laughlin-Haldane wavefunction [3]. Based on the analogies, we construct SVBS states as

$$|\text{SVBS}\rangle = \prod_{\langle ij \rangle} (a_i^\dagger b_j^\dagger - b_i^\dagger a_j^\dagger - r f_i^\dagger f_j^\dagger)^M |0\rangle,$$

where a and b denote the Schwinger boson operators while f the fermion (hole) operator. With use of the spin-hole coherent state, 1D SVBS state ($M = 1$) is represented and expanded as

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{SVBS}} &= \prod_i (u_i v_{i+1} - v_i u_{i+1} - r \eta_i \eta_{i+1}) \\ &= \Phi - r \frac{\eta_i \eta_j}{u_i v_{i+1} - v_i u_{i+1}} \Phi + \frac{r^2}{2} \left(\frac{\eta_i \eta_j}{u_i v_{i+1} - v_i u_{i+1}} \right)^2 \Phi + \dots + (-r)^{L/2} \prod_{i=1} \eta_i \cdot (\Phi_{\text{MG:odd}} - \Phi_{\text{MG:even}}), \end{aligned}$$

where $\Phi = \prod_i (u_i v_{i+1} - v_i u_{i+1})$ is the AKLT state and $\Phi_{\text{MG:even,odd}} = \prod_{i:\text{even,odd}} (u_i v_{i+1} - v_i u_{i+1})$ are two degenerate Majumdar-Ghosh dimer states. Thus, two different valence bond states are realized in the two extremal limits of the SVBS state, *i.e.* $r \rightarrow 0, \infty$. With finite r , the SVBS state shows the superconducting property: the expectation value of the two fermion operators does not vanish representing the superconducting order. With more fermion coordinates, the SVBS states interpolate various kinds of RVB states, in general.

[References] [1] Arovas, Hasebe, Qi, Zhang, PRB 79 (2009) 224404. [2] Hasebe, PRL 94 (2005) 206802. [3] Arovas, Auerbach, Haldane, PRL 60 (1988) 531.

非可換 Anti-Self-Dual Yang-Mills 方程式の数理と可積分系

名古屋大学大学院多元数理科学研究科 浜中 真志

E-mail: hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

場の理論の非可換空間への拡張は、単なる一般化ではなく、物理としても数理物理としても非常に面白いものを含んでいる。特に、非可換空間上のゲージ場の理論は、背景フラックス中のゲージ場の理論と等価であり、量子ホール効果の分野などで古くから様々な応用がなされてきた。さらに非可換空間では特異点の解消が一般に起こり、新しい物理的対象が現れる。例えば、4次元ゲージ理論の Anti-Self-Dual Yang-Mills (ASDYM) 方程式の非可換化では、モジュライ空間 (解空間) の特異点解消が起こり、 $U(1)$ インスタントンという非可換特有の物理的配位がもたらされる。ここでは ADHM 構成法がうまく非可換化されることも要となっており、この意味で可積分性といった良い性質も保たれている。対応する D ブレーンとの対応も明快で、多くの知見が与えられた。

この流れを受け、ゲージ理論には (直接) 属さない可積分方程式 (KdV 方程式など) の非可換化の研究も活発になった。特に [1] により、「これらの方程式の大半は、4次元非可換 ASDYM 方程式から次元還元などにより得られる」ことが明らかにされ、対応する物理系への応用の可能性が開かれた。KdV 方程式などもこの意味でゲージ理論に属し、非可換化の意味 (背景フラックスの導入という物理的意味) を持つのである。この次元還元に見られる方程式には $N=2$ 弦理論というものに関連し、ソリトン解の解析などを通じて、この理論への直接的応用が可能である。また、幾何学的背景や無限次元対称性の視点から、低次元非可換可積分方程式の統一的理解が深まると期待される。

私は、グラスゴー大学の Gilson 氏、Nimmo 氏と共同で、非可換 ASDYM 方程式 ($G=GL(2)$) に対する (2種類の involutive な) ベックルト変換 (解を解にうつす変換) を与え、それらを交互に組み合わせることで、線形方程式 (Laplace 方程式) の簡単な解から、非可換インスタントン解、非可換「非線形平面波」解といったさまざまな厳密解を具体的に構成した [2]。この議論では有限作用の条件は課しておらず、後者のように ADHM 構成法で構成できない解が多く含まれる。これらの D ブレーン解釈も興味深い問題である。またこのベックルト変換が単なるゲージ変換ではないことも証明し、可換空間でも懸案だった問題を解決した。

また、これらの解の記述には、ある種の非可換行列式である quasi-determinant と呼ばれるものが重要な役割を果たす。この事実は、低次元の非可換可積分 (階層) 方程式と共通したものであり、低次元と高次元の深遠な関係を示唆しているとも考えられる [3]。また、この証明には quasi-determinant の恒等式をフルに用いるが、このことを「非可換ベックルト変換は quasi-determinant の恒等式そのものである」と言い表すこともできる。これは可換空間での (低次元) 可積分系でよく知られた事実「ベックルト変換は determinant の恒等式そのものである」の自然な拡張となっており、quasi-determinant を用いた可積分系の新しい定式化の可能性をもほめかしている。

さらに、このベックルト変換の起源を非可換ツイスター理論の枠組みから理解することに成功し [2]、生成された解はいわゆる Atiyah-Ward ansatz 解と呼ばれるクラスの解の非可換版であることを明らかにした。ベックルト変換と解の一般化も行った。すべての解を生成するベックルト変換が見出せれば、解空間の構造や対称性が具体的に記述され、低次元可積分系の対称性による系統的分類や (有限作用条件を除いた) ASDYM 場バックグラウンドでの経路積分 (無限次元の積分) の実行が (原理的には) 可能になる。

References

- [1] M. Hamanaka, “Noncommutative Ward’s Conjecture and Integrable Systems,” Nuclear Physics B **741** (2006), 368 – 389 [hep-th/0601209].
- [2] C. R. Gilson, M. Hamanaka and J. J. C. Nimmo, “Bäcklund Transformations and the Atiyah-Ward ansatz for Noncommutative Anti-Self-Dual Yang-Mills Equations,” Proceedings of the Royal Society A **465** (2009), 2613 – 2632 [arXiv:0812.1222].
- [3] M. Hamanaka, “Noncommutative Solitons and Quasideterminants,” work in progress.

Codimension-3 Singularities and Yukawa Couplings in F-theory

東京大学理学系研究科物理学専攻 林 博貴

E-mail: hirotakahayashi@hep-th.phys.s.u-tokyo.ac.jp

標準模型の湯川結合は大きなヒエラルキーを持ち、その起源を問うことは重要な課題である。本研究 [1] では高エネルギーでの理論の候補である超弦理論の真空である F 理論を用いて湯川結合の解析を行った。まず標準模型より高エネルギーでの理論とされている $SU(5)$ GUT 模型を考える。この模型でのアップタイプ湯川結合 $10 \cdot 10 \cdot H_{up}(5)$ を解析する際に E 型のゲージ群も扱える F 理論が有用である。F 理論とは Type IIB 超弦理論を結合定数 $\tau = C_0 + ie^{-\phi}$ が正則となるような内部空間にコンパクト化した理論であり、 (p, q) 7-brane を内部空間の余次元一特異点として実現する。物質場は物質場曲線と呼ばれる 7-brane の交差 (余次元二特異点) に局在し、湯川結合は物質場曲線の交差、内部空間中の一点 (余次元三特異点) から生成されると考えられる。従って F 理論における湯川結合の記述には局所的な定式化が必要であり、世界面の定式化が存在しない F 理論では湯川結合を解析することができなかった。しかし、本研究 [1] では [2] で構成された 7-brane 上の 8 次元有効場の理論を用いて、F 理論において湯川結合定数を計算する手法を確立した。

我々の定式化では、まず求めたい湯川結合を生成すると考えられる特異点変形を考え、それを 7-brane の垂直方向の揺らぎに対応する随伴表現スカラー場 φ の真空期待値へと読み替える。この真空期待値は内部空間の位置に依存させる。例えばアップタイプ湯川結合を考える場合は、8 次元有効場の理論として E_6 ゲージ群の理論を考え、アップタイプ湯川結合が生成される点では真空期待値はゼロで E_6 特異点であり、その点から物質場曲線にそって離れる場合はそれぞれ D_5 、 A_5 特異点となる真空期待値を与え、それ以外の方向へ離れる場合は A_4 特異点を実現するように真空期待値を割り当てる。この真空期待値を E_6 ゲージ群の 8 次元有効場の理論に代入することによりアップタイプ湯川結合近傍の振る舞いを場の理論を用いて記述することができた。この定式化を用い、一般の複素構造をもつ内部空間を考えた場合、 $\langle \varphi \rangle$ を対角化した値は分岐曲線をもつことが分かった。この分岐曲線の周りで場は真空期待値が入った方向の $SU(2)$ 群のワイル群の作用で貼り合わせられる。さらに、この分岐曲線をもった場の理論を被覆空間で書き表すことにより、7-brane はより一般にはヒッグスバンドルのスペクトル曲面により記述され、ヒッグスバンドルを考えることによりヘテロティック超弦理論と F 理論との双対性は両者のスペクトル曲面の一致と見なすことができることを示した。また一般の複素構造の内部空間を考えた場合、アップタイプ湯川結合定数はランク 1 の行列となり、現象論的にもトップクォークが重いことと合致している。

この研究は東京大学 (本郷) の川野輝彦氏、リバプール大学の Radu Tatar 氏、IPMU の渡利泰山氏との共同研究に基づく。より詳細な議論は本論文 [1] を参照してもらいたい。

References

- [1] H. Hayashi, T. Kawano, R. Tatar and T. Watari, arXiv:0901.4941 [hep-th].
- [2] C. Beasley, J. J. Heckman and C. Vafa, JHEP **0901**, 058 (2009) [arXiv:0802.3391 [hep-th]].

BPS operators from the Wilson loop in the 3-dimensional supersymmetric Chern-Simons theory

京都大学大学院理学研究科 藤田充俊

E-mail: mfujita@gauge.scphys.kyoto-u.ac.jp

本研究では、ゲージ重力対応の文脈において [1] の論文に基づき、ABJM 理論 [2] における時空の一点のまわりで揺らいでいる Wilson loop の双対な IIA 超弦理論による解釈に関して議論しました。この Wilson loop をループ変数を用いて変分すると、次の式のような pp 波背景上の IIA 超弦の励起状態に相当する BPS 演算子が得られました。

$$\mathrm{Tr}[(A_1 B_1)^J](x_0), \quad \mathrm{Tr}[Y^i Y_j^\dagger (A_1 B_1)^J](x_0), \quad \mathrm{Tr}[(D_m A_1 B_1) (A_1 B_1)^J](x_0), \quad (1)$$

$$\mathrm{Tr}[(Y^1 Y_1^\dagger - Y^3 Y_3^\dagger) (A_1 B_1)^J](x_0). \quad (2)$$

ここで、 $Y^I = (A_1, A_2, \bar{B}_1, \bar{B}_2)$ は ABJM 理論の $U(N) \times U(N)$ のゲージ群のもとで bifundamental 表現として変換するスカラーを表しており、 (i, j) は $(1, 2), (1, 4), (2, 3), (4, 3)$ のいずれかの値をとります。本研究の新しい点は、重力理論側における解析からは決められなかったスピントーションの文脈における不純物演算子 $Y^1 Y_1^\dagger - Y^3 Y_3^\dagger$ を求めたことです (式 (2) 参照)。表 3 に Wilson loop の汎関数微分と対応する弦の励起状態をまとめました。

ABJM side		dual IIA superstring side
functional derivatives	corresponding operators	
—	$W(C_0)$	$ 0; p^+ \rangle$
$\int dse^{-\frac{2\pi i n s}{t}} \frac{\delta}{\delta x^m(s)}$	$D_m A_1 B_1$	$\alpha_{(n)}^{m+1}$
$\int dse^{-\frac{2\pi i n s}{t}} \frac{\delta}{\delta m^i(s)}$	$Y^1 Y_1^\dagger - Y^3 Y_3^\dagger$	$\alpha_{(n)}^4$
$\int dse^{-\frac{2\pi i n s}{t}} \frac{\delta}{\delta m_{ij}(s)} \Big _{Q=1/2}$	$Y^i Y_j^\dagger$	$\alpha_{(n)}^k$

Table 3: 表において $m = 0, 1, 2$ であり、 $k = 5, 6, 7, 8$ となっています。

Wilson loop のループ変数によるテイラー展開において、Wilson loop の BPS 条件がループ変数と BPS 演算子の形の両方を決定することが重要になっていました。この BPS 条件は Wilson loop のテイラー展開の高次にあらわれる超対称性を破る演算子の形も決めました。

References

- [1] A. Miwa, "BMN operators from Wilson loop," JHEP **0506** (2005) 050 [arXiv:hep-th/0504039].
- [2] O. Aharony, O. Bergman, D. L. Jafferis and J. Maldacena, "N=6 superconformal Chern-Simons-matter theories, M2-branes and their gravity duals," JHEP **0810** (2008) 091 [arXiv:0806.1218 [hep-th]].

4次元 $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills 理論における ウィルソン・ループのモンテカルロ計算¹

総合研究大学院大学 素粒子原子核専攻 本多正純
E-mail: mhonda@post.kek.jp

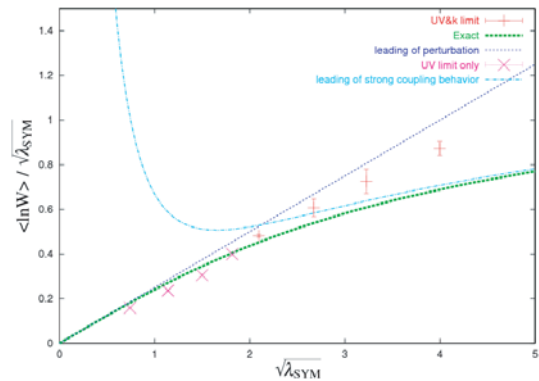
”AdS/CFT 対応がどこまで成り立っているかどうか”は、応用面においてだけでなく、超弦理論の非摂動的定式化を探る上でも重要な問題である。これを調べるには Super Yang-Mills 理論 (SYM) の強結合領域の解析が必要である。ここでは $\mathcal{N} = 4$ SYM における円形ウィルソン・ループの期待値を、モンテカルロ法を用いて数値的に計算した結果を報告する。

本講演では、SYM をどのように計算機に乗せるかどうかを説明した後に数値計算の結果を示し、既に得られている解析的な結果 [1] との比較を行い、今後 AdS/CFT 対応の検証を行う上での有効性について論じた。まず、SYM を計算機に乗せるために我々が行った正則化の手順を以下に示す：

1. \mathbf{R}^4 から $\mathbf{R} \times S^3$ へ共形変換し、massive な理論にする。
2. S^3 部分に large N reduction を行い、Plane Wave Matrix Model (PWMM) へ落とす。SYM は PWMM をある古典解の周りで展開し、行列サイズ等を無限にする極限で再現される [2]。
3. PWMM に対してフーリエモード正則化 [3] を行う。

この正則化では 16 個の supercharge を含む $SU(2|4)$ 対称性、ゲージ対称性が尊重されている。

計算結果を右に示す。下の点線は解析的な結果、”×”や”+”は計算結果、残りの 2 本の線はそれぞれ弱結合・強結合における leading の振る舞いを表す。ここで、 λ_{SYM} は SYM における 't Hooft coupling である。 ”×” は $\mathbf{R} \times S^3$ の \mathbf{R} 方向の UV 極限のみを取ったもの、 ”+” はさらに planar 極限を取ったものである。 \mathbf{R} 方向の IR カットオフ、 S^3 方向の UV カットオフについては、まだ極限を取っていない。この結果は現時点で解析的な結果と 10% 程度的一致を見せており、AdS/CFT 対応を検証する上で我々のアプローチが有効であることを示唆している。今後、さらに精密な計算を行うと共に、まだ SYM 側から計算されていない物理量を計算し、AdS/CFT 対応に関する新しい検証を行いたい。



- [1] J. K. Erickson, G. W. Semenoff and K. Zarembo, Nucl. Phys. B **582**, 155 (2000). N. Drukker and D. J. Gross, J. Math. Phys. **42**, 2896 (2001). V. Pestun, arXiv:0712.2824 [hep-th].
- [2] T. Ishii, G. Ishiki, S. Shimasaki and A. Tsuchiya, Phys. Rev. D **78**, 106001 (2008).
- [3] M. Hanada, J. Nishimura and S. Takeuchi, Phys. Rev. Lett. **99**, 161602 (2007).

¹本講演は伊敷吾郎氏、西村淳氏、土屋麻人氏との共同研究に基づく。

球面及び非可換空間上の $\mathcal{N} = 1$ SYM の行列模型を用いた正則化

Asia Pacific Center for Theoretical Physics 松尾 善典

E-mail: ymatsuo@apctp.org

超対称性を格子上で実現することは難しく、超対称ゲージ理論の非摂動での振る舞いを調べるためには他の正則化を考える必要がある。そこで、この研究では江口-川合の方法 [1] を用いることで、超対称ゲージ理論に正則化を導入する方法を考える。この方法では、行列のサイズ N が非常に大きい Large- N ゲージ理論がより低い次元のゲージ理論と等価になる、という性質を用いて、ゲージ理論を行列模型を用いて記述する。一般に、平坦な時空に対応する解は moduli のために完全には安定にならないが、球面に対応する fuzzy sphere 解は moduli を持たないため安定になる。実際にこれを用いた最近の研究で、 $\mathbb{R} \times S^3$ 上の $\mathcal{N} = 4$ SYM が BMN 行列模型によって記述できる、という研究がなされている [2]。

この研究では、[2] の研究を他の超対称ゲージ理論に一般化した。我々はまず、最も簡単な模型として超対称 $\mathcal{N} = 1$ SYM への応用を考えた [3]。この場合、fuzzy sphere を解とするような行列模型は、4次元の $\mathcal{N} = 1$ SYM を単純に dimensional reduction したものの Boson 部分に Myers 項を fermion 部分にある種の質量項を加えることで得られる。さらに、この理論に flavor を導入するために、quiver ゲージ理論への拡張を行った [4]。この場合にも、上記と同様の変形を行うことで fuzzy sphere 解を持つような行列模型を構築できるが、超対称性を保つような理論を作るためには bifundamental matter に対しても質量項を加える必要がある。これにより、quiver ゲージ理論の一部の gauge coupling をゼロにすることで、flavor 対称性を導入することができる。) これらの理論は、現象論的な観点から重要な模型であり、より高エネルギーの領域での超対称性を仮定した様々な模型に正則化を導入する手がかりになると考えられる。これらの模型を用いることで、超対称ゲージ理論を数値的に解析することができる。また、Chern-Simons 理論に関して、同様の手法が適用できる。我々は近年盛んに研究されている ABJM 模型に関して、3次元球面上での ABJM 模型に対応する行列模型も考えた。また、非可換空間上のゲージ理論に対応するような極限についても考えた。

References

- [1] T. Eguchi and H. Kawai, Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 1063.
- [2] G. Ishiki, S. Shimasaki, Y. Takayama and A. Tsuchiya, JHEP **0611** (2006) 089 [arXiv:hep-th/0610038]. T. Ishii, G. Ishiki, S. Shimasaki and A. Tsuchiya, Phys. Rev. D **78** (2008) 106001 [arXiv:0807.2352 [hep-th]].
- [3] M. Hanada, L. Mannelli and Y. Matsuo, arXiv:0905.2995 [hep-th].
- [4] M. Hanada, L. Mannelli and Y. Matsuo, arXiv:0907.4937 [hep-th].

$N = 1$ dualities from $N = 2$ dualities¹

Yukawa Institute for Theoretical Physics, Kyoto University Kazunobu Maruyoshi
E-mail: maruyosh@yukawa.kyoto-u.ac.jp

Duality has become one of the most important ideas in supersymmetric gauge theory. Seiberg duality plays a significant role for understanding phase structures of $N = 1$ supersymmetric gauge theories in four dimensions. Also, some $N = 2$ superconformal gauge theories are known to have an exact S-duality, which means that a strong gauge coupling region of a theory is equivalent to a weak coupling of another theory in all energy region. Interestingly, it was proposed in [1] that the Seiberg duality in $N = 1$ supersymmetric gauge theory is associated with the S-duality in $N = 2$ gauge theory: by the mass deformation for the adjoint chiral multiplet, the S-dual pair of $N = 2$ superconformal gauge theories flows to the different $N = 1$ theories which are precisely a Seiberg dual pair.

Recently, Gaiotto proposed that the $N = 2$ superconformal quiver theories associated with the generalized quiver diagrams are S-dual to each other, if they have same “genus” g of the quiver diagram and the global symmetry [2]. We focus on the $SU(2)$ quiver theories where the flavor symmetry is generically $SU(2)^n$.

We consider the adjoint mass deformation of $N = 2$ superconformal quiver gauge theories to $N = 1$, as in [1]. From the Gaiotto’s S-dualities, we propose a number of new Seiberg dualities of $N = 1$ quiver gauge theories which flow to non-trivial infrared fixed points [3]. In general, this deformation produces several quartic terms in the superpotential, whose combinations develop to exactly marginal operators spanning a manifold of fixed points. We count the number of the exactly marginal operators keeping the flavor symmetry $SU(2)^n$. It reveals that it is $2n$ and universal for the quiver gauge theories with fixed g and n . This could be strong evidence of the new Seiberg dualities. Also, we show that ’t Hooft anomaly matching holds for all the theories for fixed g and n . Finally, we analyze the matching of the moduli space. As an example, we demonstrate that chiral operators match between the (generalized) Klebanov-Witten theory and its dual. We also consider the matching of non-linear relations for chiral operators, i.e., the matching of the chiral ring, which indicates that the matching of classical moduli space.

References

- [1] R. G. Leigh and M. J. Strassler, Nucl. Phys. B **447**, 95 (1995) [arXiv:hep-th/9503121].
- [2] D. Gaiotto, arXiv:0904.2715 [hep-th].
- [3] K. Maruyoshi, M. Taki, S. Terashima and F. Yagi, arXiv:0907.2625 [hep-th].

¹based on the collaboration with M. Taki, S. Terashima and F. Yagi

トポロジカル絶縁体・超伝導体

理化学研究所 古崎 昭
E-mail: furusaki@riken.jp

トポロジカル絶縁体やトポロジカル超伝導体について解説する。いくつかの具体例に引き続いて、一般的な分類理論について紹介する。

1 はじめに

Z_2 トポロジカル絶縁体 [1] や量子スピンホール効果 [2] の理論的予言とその実験的検証 [3] により、トポロジカル絶縁体とよばれる電子相の研究への関心が高まっている [4]。トポロジカル絶縁体とは、系の内部（バルク）の準粒子励起スペクトルにはギャップが開いているが、系の境界に局在した gapless 励起が存在する、ある種のトポロジカル数で特徴付けられるバンド絶縁体のことである。トポロジカル絶縁体の最もよく知られた例は強磁場中の 2 次元電子系で実現する整数量子ホール系があるが、最近になって、時間反転対称な Z_2 トポロジカル絶縁体などの新しいトポロジカル絶縁体の例が多く知られるようになってきた。

また、クーパー対の対称性が $p_x + ip_y$ のような超伝導体でも、系内部の準粒子励起スペクトルにはギャップが開いており、系の端付近には gapless の準粒子励起が存在する。このような超伝導体をトポロジカル超伝導体とよぶ。また、 ^3He の超流動相の一つの B 相は、トポロジカル超流動体である。

すなわち、トポロジカル絶縁体やトポロジカル超伝導（超流動）体の低エネルギー一粒子励起は、無限系あるいは有限系でも周期的境界条件の下では massive fermion であるが、系に端があるときには、端に局在した（すなわち一次元低い空間に住む）massless fermion (Weyl fermion) が現れる。系の外側にはトポロジカルでない普通の絶縁体があると考えれば、上記の massless fermion 励起はトポロジカル数の異なる領域の界面に局在した粒子であり、これは格子 QCD での domain wall fermion のアイデアを絶縁体や超伝導（超流動）体などの物質中で具体化したものといえる。

以下では、よく知られたトポロジカル絶縁体やトポロジカル超伝導体の例を紹介し、ランダム行列理論（および K 理論）にもとづくトポロジカル絶縁体・超伝導体の分類理論まで議論する。

2 トポロジカル絶縁体の例

2.1 整数量子ホール効果

2 次元空間を運動する自由電子の運動エネルギーは、2 次元面に垂直にかけられた磁場中では、 $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c$ と Landau 量子化される (ω_c :サイクロトロン振動数)。エネルギーの低い方から n 個の Landau 準位に電子が完全に詰まっているとき、ホール伝導度は $\sigma_{xy} = ne^2/h$ のように量子化される (integer quantum Hall effect)。電子を n 番目の Landau 準位から $n + 1$ 番目の Landau 準位に励起するには $\hbar\omega_c$ のエネルギーが必要なので、エネルギー Spektrum にはギャップが開いて

いる。(この意味で、ここでは整数量子ホール系を絶縁体の一種とみなせる。縦方向の伝導度 σ_{xx} は0である。) また、量子化されたホール伝導度は、波動関数のベリー接続から定義されるトポロジカル不変量 (1st Chern number) に他ならない [5, 6]。さらに、2次元系の端に沿って一方向に運動する Weyl fermion 状態 (edge state) が存在し、edge state の数は n に等しい。

n 番目 (あるいは $n+1$ 番目) の Landau 準位に注目した時、整数量子ホール系の有効理論は、

$$H = -iv(\sigma_x \partial_x + \sigma_y \partial_y) + m\sigma_z \quad (1)$$

をハミルトニアンとする 2次元 massive Dirac fermion である (σ_μ はパウリ行列)[8]。ホール伝導度 σ_{xy} は質量 m の符号で決まり、質量 m が空間的に変化するとき (例えば、 $m(x) = m \tanh x$)、その domain wall ($x = 0$) に y 軸方向に運動する Weyl fermion が現れることはよく知られているとおりである。

2.2 量子スピンホール効果

(整数)量子ホール効果は磁場中で起こる現象であり、外磁場によって系の時間反転対称性は破れている。ところが 2005 年に Kane と Mele は、時間反転対称な 2次元系でもスピン軌道相互作用によってバンド・ギャップが開いているような場合には、整数量子ホール系に似たトポロジカル絶縁体が存在し、 \mathbb{Z}_2 のトポロジカル数で特徴づけられることを示した [1]。そのため、この種のトポロジカル絶縁体は \mathbb{Z}_2 トポロジカル絶縁体ともよばれる。大ざっぱに言えば、 \mathbb{Z}_2 トポロジカル絶縁体は、 \uparrow スピン電子に上向き磁場をかけ、 \downarrow スピン電子に同じ強さの下向き磁場をかけてそれぞれが整数量子ホール効果を示す状態にあるような絶縁体、と考えることができる。この状態は時間反転変換で不変であり、電荷についてはホール電圧や電流は \uparrow スピン電子と \downarrow スピン電子で相殺しているが、磁場方向のスピン成分の流れについては量子スピンホール効果を示すことがわかる [1, 2]。系の端には、 \uparrow スピン電子と \downarrow スピン電子がそれぞれ逆方向に運動する gapless 励起が存在する (helical edge state とよばれる)。したがって、2次元の \mathbb{Z}_2 トポロジカル絶縁体は量子スピンホール絶縁体とよばれる。

上の説明では磁場方向のスピン成分が保存すると仮定していたが、実は、Kane と Mele が示したようにスピン軌道相互作用によってスピンが保存しない状況でも、この絶縁体は非自明な \mathbb{Z}_2 のトポロジカル数を持ち、端には 1 対 (あるいは奇数個の対) のクラマース縮退した gapless edge states が存在する。ハミルトニアン $H = iv\sigma_z \partial_x$ で記述されるような 1 対のクラマース縮退した端状態 (x 軸を端に平行とした) は、時間反転対称の条件 ($-i\sigma_y H^* i\sigma_y = H$) の下では $m\sigma_x$ などの mass term をもてないので gapless 状態は安定である。一方、2 対の Kramers edge states 間には mass term に相当する行列要素が存在しうるので、一般に偶数個の helical edge modes はギャップを持ち、トポロジカルに自明な絶縁体になってしまう。これが \mathbb{Z}_2 となる原因である。ただし、 \mathbb{Z}_2 トポロジカル数は系内部 (バルク) のプロッホ波動関数のベリー接続から定義される [1]。

量子スピンホール効果の理論的予言の後、ドイツの実験グループによって HgTe/(Hg,Cd)Te の量子井戸デバイスの電気抵抗測定から、Kramers 縮退した gapless edge state の存在が確認されている [3]。

2.3 3次元 \mathbb{Z}_2 トポロジカル絶縁体

時間反転対称な2次元系の量子スピンホール効果の理論に引き続いて、非自明な \mathbb{Z}_2 トポロジカル数をもつ3次元のトポロジカル絶縁体が存在しうることが理論的に指摘された [9, 10, 11]。3次元の \mathbb{Z}_2 トポロジカル絶縁体は2次元の量子スピンホール絶縁体の自然な拡張であり、系内部の fermion 励起スペクトルにはギャップが開いているが、2次元表面に局在した Weyl fermion が奇数個存在するような系である。偶数 flavor の fermion は一般に massive になるのに対し、1 flavor の fermion に対しては、式 (1) のハミルトニアンには時間反転対称の条件 ($\sigma_y H^* \sigma_y = H$) の下で質量項 $m\sigma_z$ が存在しないことから、massless であることが保証されている。さらに、ダイヤモンド格子上的自由 fermion の模型にスピン軌道相互作用を入れることにより、3次元 \mathbb{Z}_2 トポロジカル絶縁体の具体例を構成した。

2次元空間の格子模型から出発する限り、グラフェンの例にあるように Weyl fermion はかならず偶数個の flavor になるのに対し、3次元 \mathbb{Z}_2 トポロジカル絶縁体では2次元表面に1 flavor の Weyl fermion があられう。

最近の光電子分光の実験から、 $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$, Bi_2Se_3 , Bi_2Te_3 などの絶縁体が、その表面付近に奇数個の Weyl fermion に相当するエネルギー分散をもつ電子励起スペクトルをもつことが示されており [12, 13, 14, 15]、これらの物質は3次元 \mathbb{Z}_2 トポロジカル絶縁体であると考えられている。

3 トポロジカル超伝導 (超流動) 体の例

3.1 2次元カイラル p 波超伝導体

カイラル p 波超伝導体とは、秩序変数が $\langle \psi_k \psi_{-k} \rangle \propto k_x + ik_y$ あるいは $k_x - ik_y$ のように、 z 方向の角運動量が $L^z = +1$ あるいは -1 で p 波の対称性をもつ超伝導状態をよぶ。 $L^z = \pm 1$ の2つの状態は縮退しているが、その一方のみが選ばれることで時間反転対称性を自発的に破っている。ここでは、spinless fermion の超伝導状態を考える。カイラル p 波超伝導体の準粒子励起は、Bogoliubov-de Gennes (BdG) 方程式

$$\begin{pmatrix} -\frac{\hbar^2}{2m}(\partial_x^2 + \partial_y^2 + k_F^2) & -i\Delta_0(\partial_x + i\partial_y)/k_F \\ i\Delta_0(\partial_x - i\partial_y)/k_F & \frac{\hbar^2}{2m}(\partial_x^2 + \partial_y^2 + k_F^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} \quad (2)$$

に従う。まず、波数 $k = (k_x, k_y)$ の平面波状態はエネルギー固有値 $\pm[(\varepsilon_k - \varepsilon_F)^2 + (\Delta_0|k|/k_F)^2]^{1/2}$ をもち、バルクの超伝導体の励起スペクトルにはギャップ Δ_0 が開いている (ここで、 $\varepsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2m$, $\varepsilon_F = \varepsilon_{k_F}$)。フェルミオン場の演算子は、BdG 方程式の固有関数を用いて

$$\begin{pmatrix} \psi(x, y, t) \\ \psi^\dagger(x, y, t) \end{pmatrix} = \sum_{E_n > 0} \left[\gamma_n e^{-iE_n t/\hbar} \begin{pmatrix} u_n(x, y) \\ v_n(x, y) \end{pmatrix} + \gamma_n^\dagger e^{+iE_n t/\hbar} \begin{pmatrix} v_n^*(x, y) \\ u_n^*(x, y) \end{pmatrix} \right] \quad (3)$$

と展開される。ここで、 $\gamma_n, \gamma_n^\dagger$ はフェルミオンの生成消滅演算子 ($\{\gamma_n, \gamma_m^\dagger\} = \delta_{n,m}$) であり、エネルギー固有値 $+E_n$ をもつ固有関数 $(u_n, v_n)^t$ から固有値 $-E_n$ の固有関数 $(v_n^*, u_n^*)^t$ が得られるこ

とを用いた。これは particle-hole 変換 (charge conjugation) に他ならない。式 (3) の 2 つの成分はエルミート共役の関係にあるので、zero mode ($E_n = 0$) が存在すれば、それは Majorana fermion ($\gamma_0 = \gamma_0^\dagger$) となることがわかる。

超伝導体の端にあらわれる gapless 励起をみるために、カイラル p 波超伝導体が $y > 0$ の領域を占めており、 $y < 0$ の領域は真空の場合を考えよう。超伝導体の端 $y = 0$ で適当な境界条件 (例えば $\partial_y u = \partial_y v = 0$) を課し、 $y > 0$ の領域で BdG 方程式を解けばよい。超伝導ギャップ Δ_0 よりも高いエネルギーをもった準粒子励起は、上記の平面波が $y = 0$ で反射された状態である。励起スペクトルのギャップ中には ($|E| < \Delta_0$)、超伝導体の端に局在して一方向にのみ伝搬する gapless 励起 (Majorana Weyl fermion) が現れる。BdG 方程式を解けば波動関数は $u_n = v_n$ をみたくすることがわかるので、端に局在した励起の場の演算子は $\psi = \psi^\dagger$ をみたく Majorana fermion であり、その低エネルギーハミルトニアンは $H = -iv \int dx \psi(x) \partial_x \psi(x)$ となる。

上述のカイラル p 波超伝導状態と同等の状態 (Pfaffian state とよばれる [16]) は、Landau 準位充填率が $\nu = \frac{5}{2}$ の偶数分母の分数量子ホール状態で実現している、とこれまでの多くの理論的研究から考えられている。 $\nu = \frac{5}{2}$ の分数量子ホール状態の quasihole 励起はカイラル p 波超伝導状態の vortex に対応する。vortex には Majorana zeromode が存在し、複数の vortex があるとき、それらの Majorana zeromode が非可換分数統計に従うことが知られており [17, 18]、量子計算への応用の可能性も議論されている [19]。

3.2 ^3He B phase

^3He 原子はスピン $1/2$ の fermion であり、極低温で (spin triplet で p 波の) クーパー対を組んで超流動状態になる。超流動相には A 相、A1 相、B 相があるが、そのうち最も安定な B 相が実は 3 次元空間でトポロジカルな超流動相である。 ^3He -B 相では、その 2 次元表面近くに束縛された fermion 励起 (Andreev bound state とよばれる) があらわれることは以前から知られていたが、それが線形のエネルギー分散をもった Majorana Weyl fermion であることは、最近の研究 [20] まであまり認識されていなかったようである。

4 トポロジカル絶縁体・超伝導体の分類理論

トポロジカル絶縁体やトポロジカル超伝導体にはいろいろな種類があることを、上でみてきた。時間反転対称でない整数量子ホール系やカイラル p 波超伝導状態がある一方、時間反転対称な \mathbb{Z}_2 のトポロジカル数で区別されるトポロジカル絶縁体がある。また、2 次元のみならず 3 次元のトポロジカルな絶縁体・超流動体も存在する。すると、各空間次元において、時間反転対称あるいは非対称なトポロジカル絶縁体やトポロジカル超伝導体 (超流動体) にはどのようなものがありうるのかが知りたくなる。この問いに答えたのが、以下で紹介する分類理論である [20, 21]。

系の低エネルギー有効ハミルトニアンが fermion bilinear であるとき、そのハミルトニアンは対称性によって以下のように 10 種に分類できる [22]。時間反転の (anti-unitary) 演算子を \mathcal{T} としたとき、時間反転対称な系には $\mathcal{T}^2 = 1$ となるもの (整数スピン) と $\mathcal{T}^2 = -1$ となるもの (半整

System	Cartan nomenclature	TRS	PHS	chiral	NLSM (ferm. replicas)
Standard (Wigner-Dyson)	A (unitary)	0	0	0	$U(2n)/U(n) \times U(n)$
	AI (orthogonal)	+1	0	0	$Sp(2n)/Sp(n) \times Sp(n)$
	AII (symplectic)	-1	0	0	$O(2n)/O(n) \times O(n)$
Chiral	AIII (chiral unitary)	0	0	1	$U(n)$
	BDI (chiral orthogonal)	+1	+1	1	$U(2n)/Sp(n)$
	CII (chiral symplectic)	-1	-1	1	$U(2n)/O(2n)$
BdG	D	0	+1	0	$O(2n)/U(n)$
	C	0	-1	0	$Sp(n)/U(n)$
	DIII	-1	+1	1	$O(2n)$
	CI	+1	-1	1	$Sp(n)$

Table 1: 時間反転対称性 (TRS)、粒子・正孔対称性 (PHS) にもとづくハミルトニアン分類表。有名な Wigner-Dyson のランダム行列 3 種と、chiral ランダム行列 3 種、そして超伝導や超流動の BdG ハミルトニアン 4 種、の計 10 種類の集合に分類される。時間発展演算子 e^{iHt} の属す (対称) 空間に対して、Cartan の分類にならって、A, AI, AII などの名前がそれぞれのハミルトニアン行列の集合についてつけられている。時間反転や粒子正孔変換で対称でない場合には 0、対称な場合には T^2 や C^2 の値 (± 1) を TRS と PHS の欄に記入した。TC とハミルトニアンが反可換な場合に、chiral の欄に 1 を記入した。ハミルトニアンに (与えられた対称性を保ったまま) ランダムポテンシャルを加えたとき、準粒子励起の拡散運動やアンダーソン局在を支配する非線型シグマ模型の target space を NLSM の欄に書いた。n は fermionic replica の方法を用いたときのレプリカ数である。

数スピン) がある。時間反転対称でない場合も考えれば、時間反転対称性から系は 3 つのクラスに分けられる。また、超伝導体や超流動体の fermion 励起を支配する BdG 方程式は particle-hole 変換 C をもつが、これも反ユニタリ変換であり、クーパー対波動関数のスピン自由度が対称か反対称かによって $C^2 = +1/-1$ の 2 通りがある。超伝導や超流動状態にない normal state は一般に particle-hole 対称でないので、particle-hole 対称性からも系は 3 つのクラスに分けられる。 T と C の対称性を考えることにより、ハミルトニアン集合は $3 \times 3 = 9$ のクラスに分類できることになる。さらに、 T と C のどちらの対称性ももたないハミルトニアン集合は、ユニタリ演算子 TC と反可換であるもの (chiral unitary class) と反可換でないもの (unitary class) に分類できるので、全部で $3 \times 3 - 1 + 2 = 10$ 種類に分類できることになる。これが Altland と Zirnbauer によって拡張されたランダム行列理論である。Table 1 にハミルトニアン分類表をまとめた。この分類は空間次元によらない。

上にみてきたトポロジカル絶縁体・超伝導体の例は、それぞれ table 1 のいくつかの class に以下のように対応する。整数量子ホール系は unitary class (A) に属している。2 次元及び 3 次元の量子スピンホール系あるいは \mathbb{Z}_2 トポロジカル絶縁体は symplectic class (AII) に属す。さらに、spinless のカイラル p 波超伝導状態は class D、 ^3He の B 相は class DIII に属している。

complex:

AZ\ d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	...
AIII	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	...

real:

AZ\ d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
AI	\mathbb{Z}	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0	...
BDI	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	...
D	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	...
DIII	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	...
AII	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	...
CII	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	...
C	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	...
CI	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0	$2\mathbb{Z}$...

Table 2: 空間次元 d におけるトポロジカル絶縁体とトポロジカル超伝導体（超流動体）の分類表。Kitaev によれば [21]、10 種のハミルトニアン集合のうち A(unitary) と AIII(chiral unitary) の 2 つは complex K theory で分類され、残りの 8 つは real K theory に対応する。表中で 0 とあるのはトポロジカルになりえないことを意味し、 \mathbb{Z} は整数のトポロジカル数、 $2\mathbb{Z}$ は偶数値をとるトポロジカル数、 \mathbb{Z}_2 は 2 値のトポロジカル数で分類されるようなトポロジカル絶縁体・超伝導体が存在することを表している。

論文 [20] では、3 次元のトポロジカル絶縁体・超伝導体の分類を以下の方針で行った。まず、class AIII, DIII, CI に属すハミルトニアンに対して $\text{diag}(+1 \dots +1, -1 \dots -1)$ への連続変形を考えることにより、winding number (\mathbb{Z}) が定義できることを示した。また、minimal model として 4 行 4 列あるいは 8 行 8 列の Dirac Hamiltonian にそれぞれの対称性の下で許される質量項を与えたものを考え、固有関数からつくられる Berry 接続が非自明なトポロジカルな構造をもつか否かを調べた。さらに、3 次元トポロジカル絶縁体・超伝導体の 2 次元表面にあらわれる Weyl fermion のアンダーソン局在の問題を考察した。トポロジカルな系は局所的摂動に対して安定であると考えられるので、ランダムな散乱ポテンシャルを 2 次元表面に加えても Weyl fermion はアンダーソン局在しないと期待できる。アンダーソン局在の問題は一般に非線型シグマ模型に帰着でき、10 種のランダム行列集合に対して非線型シグマ模型の target manifold は table 1 のように知られている。target manifold のホモトピー群 π_2 や π_3 を見ることにより、非線型シグマ模型が WZW 項あるいはトポロジカル項を持ちうるか否かがわかり、2 次元表面に対する非線型シグマ模型は、class AIII, DIII, CI では WZW 項を、class AII と CII では \mathbb{Z}_2 トポロジカル項をもちうることをわかる。これらの項が加わると非線型シグマ模型は臨界的になり、それはアンダーソン局在を起こさないことを意味するので、3 次元トポロジカル絶縁体・超伝導体であることがわかる。

以上のようにして、3 次元空間に対して分類ができた。1 次元や 2 次元に対してこれまで知ら

れていた結果を総合することにより、論文 [20] では空間次元 1, 2, 3 に対してトポロジカル絶縁体・超伝導体の一般的な分類表が得られた。一方、Kitaev は 0 次元ハミルトニアン の K 理論にもとづく分類から出発して、一般の空間次元での分類を行った [21]。空間次元 1, 2, 3 に対する結果はもちろん両者で一致している。table 2 は、Kitaev にならって 0 次元から高次元までの分類をまとめたものである。Bott の周期性定理にしたがって、complex K theory に対応する class A と AIII では、次元の変化とともに交互にトポロジカル相があらわれる。残りの 8 つの class では、周期は 8 である。

5 おわりに

ここでは、トポロジカル絶縁体やトポロジカル超伝導体（超流動体）の代表例と、対称性にもとづく一般的な分類理論について紹介した。代表例としてあげたものは（カイラル p 波状態を除けば）全て現実の物質で実現しており、特に、3 次元の \mathbb{Z}_2 トポロジカル絶縁体は Bi_2Se_3 などの物質で実現していることがこの一年間に実験的に明らかになってきた。3 次元 \mathbb{Z}_2 トポロジカル絶縁体に対しては、その 2 次元表面（の Weyl fermion）に超伝導体や強磁性体を接触させることにより、Majorana fermion をつくれることが理論的に示されている [24]。このようにして実現する Majorana fermion や、トポロジカル超伝導体（超流動体）の表面・端や vortex に現れる Majorana fermion を検出することは今後の（実験的）課題の一つである。また、3 次元 \mathbb{Z}_2 トポロジカル絶縁体の電磁応答は axion について議論されたものと同じ有効理論で記述されるので、荷電粒子が磁荷を実効的にもつことになり、dyon が現れることも理論的に指摘されている [23, 25]。

トポロジカル絶縁体・超伝導体の周辺には、このような exotic で面白い物理がこれから次々と見つかるものと期待している。

References

- [1] C. L. Kane and E. J. Mele, Phys. Rev. Lett. **95**, 146802 (2005); **95**, 226801 (2005).
- [2] B. A. Bernevig and S. C. Zhang, Phys. Rev. Lett. **96**, 106802 (2006); B. A. Bernevig, T. L. Hughes, and S.-C. Zhang, Science **314**, 1757 (2006).
- [3] M. König *et al.*, Science **318**, 766 (2007).
- [4] C. L. Kane and E. J. Mele, Science **314**, 1692 (2006); F. Wilczek, Nature **458**, 129 (2009); J. Moore, Nature **460**, 1090 (2009).
- [5] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. Den Nijs, Phys. Rev. Lett. **49**, 405 (1982).
- [6] M. Kohmoto, Ann. Phys. **160**, 343 (1985).

- [7] Y. Hatsugai, Phys. Rev. Lett. **71**, 3697 (1993).
- [8] F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **61**, 2015 (1988); A. W. W. Ludwig, M. P. A. Fisher, R. Shankar, and G. Grinstein, Phys. Rev. B **50**, 7526 (1994).
- [9] L. Fu, C. L. Kane, and E. J. Mele, Phys. Rev. Lett. **98**, 106803 (2007); L. Fu and C. L. Kane, Phys. Rev. B **76**, 045302 (2007).
- [10] J. E. Moore and L. Balents, Phys. Rev. B **75**, 121306(R) (2007).
- [11] R. Roy, arXiv:cond-mat/0607531.
- [12] D. Hsieh *et al.*, Nature **452**, 970 (2008).
- [13] Y. Xia *et al.*, Nature Physics **5**, 398 (2009).
- [14] D. Hsieh *et al.*, Nature **460**, 1101 (2009).
- [15] P. Roushan *et al.*, Nature **460**, 1106 (2009).
- [16] G. Moore and N. Read, Nucl. Phys. B **360**, 362 (1991).
- [17] C. Nayak and F. Wilczek, Nucl. Phys. B **479**, 529 (1996).
- [18] D. A. Ivanov, Phys. Rev. Lett. **86**, 268 (2001).
- [19] C. Nayak, S. H. Simon, A. Stern, M. Freedman, and S. Das Sarma, Rev. Mod. Phys. **80**, 1083 (2008).
- [20] A. P. Schnyder, S. Ryu, A. Furusaki, A. W. W. Ludwig, Phys. Rev. B **78**, 195125 (2008); arXiv:0905.2029.
- [21] A. Kitaev, arXiv:0901.2686.
- [22] A. Altland and M. R. Zirnbauer, Phys. Rev. B **55**, 1142 (1997).
- [23] X.-L. Qi, T. Hughes, S.-C. Zhang, Phys. Rev. B **78**, 195424 (2008).
- [24] L. Fu and C. L. Kane, Phys. Rev. Lett. **100**, 096407 (2008); **102**, 216403 (2009).
- [25] X.-L. Qi, R. Li, J. Zang, and S.-C. Zhang, Science **323**, 1184 (2009).

超伝導のホログラフィック双対な記述に向けて

高エネルギー加速器研究機構 正田泰章

E-mail: hikida@post.kek.jp

ホログラフィック双対性の最も有名な例として AdS/CFT 対応があるが、この対応を用いることでゲージ理論の強結合領域を古典重力理論を用いて調べることができる。QCD の強結合領域に関する成功をもとにして、最近ではその対象を広げて物性系に応用しようという試みがなされている。特に高温超伝導では強相関物理が重要であると言われており、ホログラフィック双対な記述が有効であると期待できる。超伝導相ではクーパー対に対応する演算子が凝縮していると考えられるため、双対な重力理論ではその演算子に双対なスカラー場が凝縮する必要がある。ここでは、超伝導に関する話題を中心に、不純物のある系に関する我々の研究も含めた最近の発展を紹介する。

1 導入

ホログラフィック双対性とは、重力理論とより低次元の場の理論との対応のことであり、最も有名な例として AdS/CFT 対応がある。AdS/CFT 対応の主張によると、 $(d+1)$ 次元の Anti-de Sitter (AdS) 空間上の超弦理論がその境界に住む d 次元の共形場理論 (CFT) と双対であり、この対応は論文 [1] で Maldacena によって提唱された。最もよく調べられている例として、5 次元の AdS 空間上の超弦理論と 4 次元の $\mathcal{N} = 4$ 超対称 $U(N)$ ゲージ理論との対応がある。重力理論は古典論を超えた取り扱いが非常に困難なため、AdS/CFT 対応を用いることでより簡単なゲージ理論を用いた解析が可能になると期待できる。一方、ゲージ理論においても摂動論はよく理解されているが、強結合領域の解析は難しいのが現状であり、重力理論による記述が有用な場合がある。ここでは、後者のゲージ理論の強結合領域に関する解析に注目する。

AdS/CFT 対応の特徴の一つとして、それぞれ結合定数が小さく摂動論で取り扱える領域が異なるため、片方の取り扱いの難しい強結合領域をもう片方の弱結合領域で記述できるという利点がある。特に、超弦理論の低エネルギー極限は超重力理論となるが、その超重力理論の古典論を用いることでゲージ理論の非摂動的側面を解析できると期待されている。主になされているのは、5 次元の古典重力理論を用いた 4 次元のゲージ理論に関する解析である。興味深いことに、4 次元のゲージ理論におけるクォーク・グルーオン・プラズマの強結合極限における粘性の値が予想でき、RHIC における実験結果と比較して定性的によい一致を得ている。最近では、ゲージ理論として物性系で用いられるものを持ってくることによって、AdS/CFT 対応を用いて物性系における強相関物理を調べようという試みがなされるようになってきている。対象としては様々なものがあるが、ここでは特に、超伝導状態への相転移に関する研究 [2, 3, 4] と、不純物のある系に関する我々の研究 [5] について紹介したいと思う。最後に、その他の代表的な例である、冷却電子に関する研究、量子臨界現象に関! する研究について簡単に説明する。

2 ホログラフィック超伝導

超伝導とは、ある転移温度以下で電気伝導度が無限大になったり、磁束が Meissner 効果によって排除されたりする現象のことであり、1911年に Kamerlingh Onnes によって発見された。一般的な超伝導は BCS 理論によってうまく記述できることが知られており、二つの電子対からなる Cooper 対の凝縮によって理解できる。ところが、約 20 年ほど前に、BCS 理論では記述できないような高い転移温度を持つ超伝導が発見された。このような高温超伝導は、未だに完全には理解されておらず、電子間における強相関物理が重要であるとされている。そこで、強弱双対性の一つである AdS/CFT 対応を応用することで、高温超伝導に関してなんらかの理解を得たいと思う。

高温超伝導では一般に層構造が重要であり、(2+1)次元の物理が関与していると考えられている。また、温度変化による相転移を調べたいので、有限温度系を用いる。この場合、双対な幾何は (3+1)次元のブラックホールで与えられることが知られている。今、場の理論側で Cooper 対の凝縮を取り扱いたいのだが、重力理論側では Cooper 対に双対なスカラー場の凝縮を考える必要がある。一般のブラックホールでは、ノーヘア定理で代表されるように非自明な値を持つスカラー場を存在させることは難しい。ところが、AdS 空間中ではスカラー場が凝縮するような背景が構成できることが、論文 [2] によって指摘された。この事実と AdS/CFT 対応の写像を用いることで、超伝導の相転移を双対な重力理論によって再現できることが、論文 [3, 4] によって示された。

一般的に用いられている、(3+1)次元のゲージ理論と (4+1)次元の重力理論との対応は、type IIB 超弦理論における D3 プレーンを用いることで導出することができる。一方、(2+1)次元の場の理論と (3+1)次元の重力理論との対応は、M 理論における M2 プレーンから得ることができる。ただここでは、場の理論における性質を再現するような重力理論を手で作ることにする。具体的な M 理論における埋め込みは、論文 [6, 7] によって研究されている。双対な理論は重力場を含んでいる必要があり、AdS/CFT 対応を利用するため負の宇宙項を持っているとする。場の理論側には、Cooper 対に対応するスカラー演算子が存在し、また Meissner 効果を起こすためにはその演算子が凝縮することで U(1) ゲージ対称性が破れる必要がある。そのため双対な重力理論には、Cooper 対に双対な荷電スカラー場 ψ と、U(1) 対称性に対応する U(1) ゲージ場 A_a が存在する必要がある。具体的にはラグランジアンとして、

$$\mathcal{L} = R + \frac{6}{L^2} - \frac{1}{4} F^{ab} F_{ab} - m^2 |\psi|^2 - |\nabla\psi - iqA\psi|^2 \quad (1)$$

を用いる。ここで、 m と q はそれぞれ荷電スカラー場の質量と電荷である。このラグランジアンは、超伝導を記述する Ginzburg-Landau 理論に酷似したものとなっているが、場そのものが双対な場として基礎的な意味を持っていることと、次元が異なり一つ高いことに本質的な違いがある。

まず簡単のため、スカラー場 ψ とゲージ場 A_a の背景に対する反作用を無視した近似を取ることとする。この近似は、荷電スカラー場の電荷を $q \rightarrow \infty$ と飛ばす極限に対応している。この場合、スカラー場が凝縮する前の背景は AdS-Schwarzschild ブラックホール

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(dx^2 + dy^2), \quad f(r) = \frac{r^2}{L^2} - \frac{M}{r} \quad (2)$$

で与えられ、Hawking 温度は

$$T = \frac{3M^{1/3}}{4\pi L^{4/3}} \quad (3)$$

となっている。この温度を変化させていった際に、低温でスカラー場が凝縮するような相が現れるかどうかを調べたい。ここで、ラグランジアン (1) からスカラー場の有効質量を読み取ってやると¹

$$m_{\text{eff}}^2(r) = m^2 - f(r)^{-1} A_t(r)^2 \quad (4)$$

となる。このことから、ホライズン近傍で有効質量の二乗が大きな負の値を取りうることが分かり、実際にホライズン近傍においてスカラー場の凝縮が起こりうるということが定性的に読み取れる。背景への反作用を無視した解析は論文 [3] で行われ、実際に、AdS-Schwarzschild ブラックホール解から温度を下げていくことによって、スカラー場の凝縮した解に相転移することが数値的に確かめられた。また、背景への反作用も取り入れた解析も論文 [4] で行われ、定性的な振る舞いの変わらないことが示された。

AdS/CFT 対応の辞書を用いることで、重力理論での言葉を双対な場の理論における言葉に焼きなおすことができる。ここで、スカラー場の質量を共形結合の場合の値 $m^2 = -2/L^2$ に取ることとする。この値の場合、双対な演算子のスケール次元は $\Delta = 1$ あるいは $\Delta = 2$ となり、どちらになるかはスカラー場の境界条件の取り方に依存する。背景を (2) のような座標で表した場合に、空間の境界は $r \rightarrow \infty$ にあり、双対な場の理論はこの境界に住んでいる。双対な場の理論の情報、重力理論の場の境界近傍での振る舞い

$$A_t = \mu - \frac{\rho}{r} + \dots, \quad \psi = \frac{\psi^{(1)}}{r} + \frac{\psi^{(2)}}{r^2} + \dots \quad (5)$$

から読み取ることができる。ここで、 μ は化学ポテンシャル、 ρ は電荷密度と解釈される。スカラー場は境界条件として $\psi^{(1)} = 0$ か $\psi^{(2)} = 0$ のどちらかが取れ、それぞれの場合において双対なスカラー演算子の真空期待値を

$$\langle \mathcal{O}_2 \rangle = \sqrt{2}\psi^{(2)}, \quad \langle \mathcal{O}_1 \rangle = \sqrt{2}\psi^{(1)} \quad (6)$$

のように読み取ることができる。実際に先ほどの重力理論の数値解を用いることで、演算子 \mathcal{O} が凝縮していない相から凝縮している相への相転移を見ることができる。また数値的にはあるが、相転移が二次であることも確かめられる。さらに興味深いことに、温度と演算子 \mathcal{O} の凝縮とのグラフと書いてみると (論文 [4] の図 1 参照)、すべての温度において BCS 理論による曲線をうまく再現していることが分かる。

スカラー演算子が凝縮している相が超伝導相になっていることを示すためには、双対な場の理論における伝導度を読み取ってやる必要がある。そのためには、ベクトルポテンシャルの境界の

¹電荷 q はスカラー場やゲージ場の再定義によって吸収した。

空間に平行な成分、例えば A_x の摂動を考えてやればよい。この成分の運動方程式の解から、境界における振る舞い

$$A_x = A_x^{(0)} + \frac{A_x^{(1)}}{r} + \dots \quad (7)$$

を読み取ることにする。すると、AdS/CFT 対応の辞書を用いることで、

$$A_x = A_x^{(0)}, \quad \langle J_x \rangle = A_x^{(1)} \quad (8)$$

と翻訳することができる。したがって、Ohm の法則 $\sigma = \langle J_x \rangle / E_x$ を用いることで、境界の理論における伝導度を計算することができる。実際に数値解を用いて演算子 \mathcal{O} が凝縮している相における伝導度を求めると、DC 伝導度が Delta 関数的に発散しており超伝導状態になっていることが分かる。また、伝導度の周波数依存性を見ると、周波数の小さいところでギャップが生じていることが読み取れる。このことは、論文 [4] の図 4 によく表れている。このギャップの大きさは常伝導状態のギャップの約 2 倍程度となっており、電子二つが Cooper 対を作っているという描像とよく一致している。

AdS/CFT 対応の高温超伝導への応用についてまとめると次のようになる。(2+1) 次元有限温度系の双対な重力理論における幾何は、(3+1) 次元 AdS 空間中のブラックホールで与えられ、実際に低温では Cooper 対に双対なスカラー演算子が凝縮するような背景が存在する [2]。また、AdS/CFT 対応を用いて境界の場の理論の言葉に焼きなおすことで、超伝導相と常伝導相との間に二次相転移が起こっており、超伝導相では DC 伝導度が無限大になることや、エネルギーギャップが存在することが確かめられる [3, 4]。その他最近の重要な発展の一つとして、磁場を加えた場合における研究がある。磁場を加えることで渦糸の存在する相が現れ、今の場合の超伝導がいわゆる type II に分類されると主張されている。また、M 理論や超弦理論に埋め込む研究も進んでおり、ラグランジアン (1) におけるポテンシャルなどが正確な形で求められてきている [6, 7]。ただ、M 理論や弦理論に埋め込めたとしても、双対な場の理論が良く分からないという状況はあまり変わっていない。特に、Cooper 対の凝縮に関する場の理論側の理解が必須であり、高温超伝導の理解を深めることができれば非常に興味深い。

3 ホログラフィックレプリカ法

実際の実験で物質を扱う場合には、大なり小なり必ず不純物が挿入してしまう。特に、スピングラスなどの系では、不純物の存在のために準安定な状態が大きく変化する場合がある。また、量子ホール効果を理解する上では、不純物の挿入による Anderson 局在の現象が本質的となっている。このように、不純物が入ることで乱された系を理解することが重要となっている。そのような乱された系を取り扱う方法として二種類が知られており、一つは超対称性を用いる方法で、もう一つはレプリカ法である。超対称性を用いる方法は応用範囲が限られているため、ここではレプリカ法に注目することにする。さらに強相関物理が重要になる場合には、ホログラフィック双対な理

論による解析が有用であると期待できる。そこで、レプリカ法と AdS/CFT 対応を利用することで、不純物のある系を双対な重力理論で取り扱う手法を開発したい [5]。その他 AdS/CFT 対応の文脈で不純物を取り扱った論文として [8] がある。

まず最初に、場の理論側でレプリカ法をある程度一般的に説明したい。ある d 次元の場の理論を考え、作用が $S_0[\varphi] = \int d^d x \mathcal{L}_o(\varphi)$ で与えられるとする。例えば、4 次元の $\mathcal{N} = 4$ 超対称 U(N) ゲージ理論を意識している。この場の理論をスカラー演算子 $\mathcal{O}(x)$ で

$$S = S_0[\varphi] + \int d^d x g(x) \mathcal{O}(x) \quad (9)$$

のように変形することにする。スカラー演算子としては、U(N) ゲージ理論の場合にはシングルトレース演算子 $\text{Tr}[\varphi \cdots \varphi]$ のようなものを考えている。ここで、変形のパラメーター $g(x)$ が空間依存性を持っており、理論が位置に依存した乱れた系となっている。現実の系では、変形のパラメーター $g(x)$ はある固定された関数であり、その固定された $g(x)$ のもとで物理量は計算される。ただ、その場合計算が非常に煩雑となってしまうため、

$$P[g(x)] \propto \exp \left[-\frac{1}{2f} \int d^d x g(x)^2 \right] \quad (10)$$

の関数で重みをかけて平均化することにする。このような近似の下でも、実験結果をうまく再現することが知られている。

物理量を計算する際に、分配関数の対数で自由エネルギー $F = \ln Z$ を定義しておく都合のよいことが多い。レプリカ法は自由エネルギーの次の恒等式

$$\ln Z = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{Z^n - 1}{n} = \frac{d}{dn} Z^n \Big|_{n=0} \quad (11)$$

に由来している。つまり自由エネルギーは、理論の n 個のコピーを用意してそれぞれの分配関数を計算した後、 $n \rightarrow 0$ の極限を取ることで計算できる。パラメーター n はもともとコピーの数なので整数値をとるが、ここでは実数に解析接続できると仮定する。この仮定が正しいかどうかは例ごとに確かめる必要がある。系にランダムにするために、理論を (9) のように変形することにする。重み関数 (10) で平均化すると、

$$\begin{aligned} \overline{(Z_g)^n} &= \int [\mathcal{D}g(x)] P[g(x)] \prod_{i=1}^n [\mathcal{D}\varphi_i] \exp \left[-\sum_{i=1}^n S_0[\varphi_i] - \int d^d x g(x) \sum_{i=1}^n \mathcal{O}_i(x) \right] \\ &= \int \prod_{i=1}^n [\mathcal{D}\varphi_i] \exp \left[-\sum_{i=1}^n S_0[\varphi_i] + \frac{f}{2} \int d^d x \left(\sum_{i=1}^n \mathcal{O}_i(x) \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (12)$$

のようになる。もともと独立であった n 個のコピーが、平均をとった後では $\mathcal{O}_i(x) \mathcal{O}_j(x)$ のようなダブルトレース演算子を通して相互作用していることが分かる。したがって、レプリカ法は次のようにまとめることができる。まず最初に、考えたい場の理論の n 個のコピーを用意する。次に、

系にランダムさを入れることに対応して、 n 個のコピーの理論を式 (12) のようにダブルトレース演算子で変形する。最後に、分配関数や相関関数を計算した後に、 $n \rightarrow 0$ の極限をとればよい。

非常に興味深いことに、AdS/CFT 対応においてダブルトレース演算子による理論の変形はよく理解されている [9]。具体的には、スカラー演算子 \mathcal{O} に双対なスカラー場の言葉では、AdS 空間の境界における境界条件を変更することに対応している。したがって、レプリカ法の n 個の場の理論を用意して $n \rightarrow 0$ の極限をとるという手法と、ダブルトレース演算子の AdS/CFT 対応における解釈を組み合わせることによって、レプリカ法のホログラフィック双対な方法を作り上げることができる [5]。まず最初に、 d 次元の共形場理論に双対な $(d+1)$ 次元の AdS 空間のコピーを n 個用意する。ここで、それぞれの AdS 空間は境界を共有しているとする。さらに、式 (12) のダブルトレース演算子による変形に双対な操作として、それぞれの AdS 空間に住むスカラー場の境界条件を変更する。このスカラー場の境界条件を通して、それぞれの AdS 空間が相互作用することになる。その後、相関関数などを AdS/CFT 対応の写像を用いて計算し、そして最後に $n \rightarrow 0$ の極限をとればよいことが分かる。実際に論文 [5] では、不純物のある系でのスカラー演算子 \mathcal{O} の二点関数を、場の理論と重力理論の両方の方法で計算し、両者が一致することを確認した。この方法を応用することで、例えば有限温度系での緩和時間を計算するなど、場の理論の強結合領域における不純物の影響を調べることができると考えている。

4 まとめと議論

最近、AdS/CFT 対応を物性系へ応用する試みが多くなされるようになっており、ここでは高温超伝導への応用 [2, 3, 4] と不純物のある系への応用 [5] の紹介を行った。その他の重要な例としては、冷却原子に関する応用がある。最近、レーザー冷却の技術が非常に進んできており、気体原子の Bose Einstein 凝縮が実験的に実現できるようになった。特に興味深いことに、Bose 原子のみでなく、Fermi 原子に関しても凝縮が実現できるようになってきている。Fermi 原子が凝縮するためには、2 つの Fermi 原子が対を組んで Bose 粒子になる必要があるが、その対の組み方が外部磁場の大きさに依存して分子的になったり Cooper 対的になったりすることが知られている。その転移はクロスオーバーであり、その領域は強結合のユニタリフェルミオンの理論で記述できるとされている。この理論にはいわゆる Schrödinger 対称性があり、この対称性をうまく利用することで AdS/CFT 対応を構成しようという試みがなされている [10, 11]。この対称性の特徴として、時間と空間で異なったスケール変換 ($z = 2$)

$$t \rightarrow t^z t, \quad x \rightarrow \lambda x \quad (13)$$

に関する不変性がある。また、量子臨界現象でも同じようなスケール変換を示す場合があり、代表的な例として Lifshitz スカラー理論がある。この場合における AdS/CFT 対応は論文 [12] などによって研究されている。またこのような話に動機付けられ、時間方向と空間方向でスケール変換が異なるような重力理論が、最近論文 [13] によって提唱されている。この理論は一般共変性は破っているが、次元勘定の意味で繰り込み可能となっており、最近非常に興味を持たれている。

このように、AdS/CFT 対応を物性系へ応用するという試みは、まだ始まったばかりではあるが非常に大きな可能性を含んでいると思われる。QCD への応用と比較すると、QCD のラグランジアンは一つしかないのに対し物性系で用いられる場の理論は数多く存在しているため、より多くの種類の AdS/CFT 対応を用いることができるという利点がある。またさらに、この場合対応する実験が比較的容易に行えるという利点もある。もし AdS/CFT 対応を利用することによって強相関特有の物理現象を発見できれば、それを実験室で検証することも可能かもしれない。

References

- [1] J. M. Maldacena, “The large N limit of superconformal field theories and supergravity,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998) [*Int. J. Theor. Phys.* **38**, 1113 (1999)] [arXiv:hep-th/9711200].
- [2] S. S. Gubser, “Breaking an Abelian gauge symmetry near a black hole horizon,” *Phys. Rev. D* **78**, 065034 (2008) [arXiv:0801.2977 [hep-th]].
- [3] S. A. Hartnoll, C. P. Herzog and G. T. Horowitz, “Building a holographic superconductor,” *Phys. Rev. Lett.* **101**, 031601 (2008) [arXiv:0803.3295 [hep-th]].
- [4] S. A. Hartnoll, C. P. Herzog and G. T. Horowitz, “Holographic superconductors,” *JHEP* **0812**, 015 (2008) [arXiv:0810.1563 [hep-th]].
- [5] M. Fujita, Y. Hikida, S. Ryu and T. Takayanagi, “Disordered systems and the replica method in AdS/CFT,” *JHEP* **0812**, 065 (2008) [arXiv:0810.5394 [hep-th]].
- [6] S. S. Gubser, C. P. Herzog, S. S. Pufu and T. Tesileanu, “Superconductors from superstrings,” arXiv:0907.3510 [hep-th].
- [7] J. P. Gauntlett, J. Sonner and T. Wiseman, “Holographic superconductivity in M-Theory,” arXiv:0907.3796 [hep-th].
- [8] S. A. Hartnoll and C. P. Herzog, “Impure AdS/CFT correspondence,” *Phys. Rev. D* **77**, 106009 (2008) [arXiv:0801.1693 [hep-th]].
- [9] E. Witten, “Multi-trace operators, boundary conditions, and AdS/CFT correspondence,” arXiv:hep-th/0112258.
- [10] D. T. Son, “Toward an AdS/cold atoms correspondence: a geometric realization of the Schroedinger symmetry,” *Phys. Rev. D* **78**, 046003 (2008) [arXiv:0804.3972 [hep-th]].
- [11] K. Balasubramanian and J. McGreevy, “Gravity duals for non-relativistic CFTs,” *Phys. Rev. Lett.* **101**, 061601 (2008) [arXiv:0804.4053 [hep-th]].

- [12] S. Kachru, X. Liu and M. Mulligan, “Gravity duals of Lifshitz-like fixed points,” *Phys. Rev. D* **78**, 106005 (2008) [arXiv:0808.1725 [hep-th]].
- [13] P. Horava, “Quantum gravity at a Lifshitz point,” *Phys. Rev. D* **79**, 084008 (2009) [arXiv:0901.3775 [hep-th]].

ホログラフィック超伝導モデルの超流動特性

関西学院大学 理工学部 岡村 隆

E-mail: tokamura@kwansei.ac.jp

Hartnoll, et.al.[1] が“超伝導性をもつ”境界理論に双対な重力モデル（以下, HHH モデル）を提案して以来, 様々なホログラフィック超伝導モデルが提出されている. これらの重力モデルに双対な境界理論が“超伝導性をもつ”とする理由は, これまでのところ, ホログラフィックに評価された境界理論の R-charge current に対し以下が成り立つ, という観察に基づく:

[理由 1] 直流抵抗がゼロになる [1, 3], [理由 2] ロンドン方程式が成立する [2, 3].

しかし, 完全導体の直流抵抗もゼロであることから明らかなように, [理由 1] は, 超伝導であるための必要条件に過ぎない. 実際, HHH モデルの常伝導相（高温相）でも, 直流抵抗がゼロとなる. そして, 通常の物性系における超伝導性の判定条件は, [理由 2] の成否である.

ところで, ホログラフィック超伝導モデルで破れる境界理論の対称性は R-対称性であり, 大域的対称性である. 大域的対称性の破れに伴う輸送の異常は超流動性であり, 局所的なゲージ対称性の破れに伴う超伝導性ではない. よって, 議論すべきは, ホログラフィック超伝導モデルの超伝導性ではなく, 超流動性である. 以上の動機に基づき, 本研究で以下のことを明らかにした:

- (a) ホログラフィックに評価されたロンドン方程式（[理由 2]）は正当化できない.
ロンドン方程式は, 定常な外部磁場に対する R-current の線形応答であり, 境界理論側では, R-current の遅延 Green 関数の定常極限で与えられる. 遅延 Green 関数の定常極限は, 定義より負であるが, ホログラフィックに評価されたその値は正となり, 定義と矛盾する.
- (b) HHH モデルの高温相は超流動性をもたない.
超流動性の有無は粘性の有無と同義なので, 外力に対する運動量流束の線形応答, つまり, 運動量流速の遅延 Green 関数により, その有無が判定できる. この判定条件に従い, HHH モデルの高温相である Reissner-Nordstöm black hole の重力摂動から, 運動量流速の Green 関数をホログラフィックに評価した結果, 期待通り, 高温相で超流動性がないことを確かめた.
- (c) single R-charge black hole も超流動性をもたない.
HHH モデルの低温相の超流動性も, 高温相と同様に, 重力摂動から判定すれば良い. しかし, 低温相は背景に非自明な scalar 場をもつため, 高温相と異なり, 重力摂動が scalar 摂動と結合し複雑な方程式系となる. 予備調査として, ホログラフィック超伝導モデルではないが, 背景に非自明な scalar 場をもち, IIB SUGRA に埋め込める重力解である single R-charge black hole の重力摂動を行った. 結果, この重力解も超流動性をもたないことを確認した.

肝心の, HHH モデルの低温相が超流動性を有するかについては, 現在研究中である.

References

- [1] S.A. Hartnoll, C.P. Herzog, and G.T. Horowitz, Phys. Rev. Lett. **101** (2008) 031601 [arXiv:0803.3295].
- [2] K. Maeda and T. Okamura, Phys. Rev. D **78** (2008) 106006 [arXiv:0809.3079].
- [3] S.A. Hartnoll, C.P. Herzog, and G.T. Horowitz, JHEP **0812** (2008) 015 [arXiv:0810.1563].

Super Galilean conformal algebra in AdS/CFT

岡山光量子科学研究所 阪口 真

E-mail: makoto_sakaguchi@pref.okayama.jp

Galilei 共形 (GC) 対称性は、Schrodinger 対称性と共に非相対論的 (NR) 共形対称性として知られている。Schrodinger 対称性が、{ 時間並進 H , 空間並進 P_i , 空間回転 J_{ij} , Galilean boost G_i } で生成される Galilei 対称性を { dilatation D , Galilei 特殊共形変換 K , 中心電荷 M } で拡大した NR 共形対称性であるのに対して、GC 対称性は Galilei 対称性を { D , K , acceleration K_i } で拡大した NR 共形対称性である。論文 [1] では GC 対称性が、bulk では Newton-Hooke (NH) string 対称性として実現されることを明らかにした。さらに GC 超対称性を共形超対称性から誘導した。

GC 対称性は共形対称性の Inonu-Wigner (IW) 縮小として誘導できる [2]。他方、 $d+1$ 次元共形対称性 conf_{d+1} は $d+2$ 次元 AdS 対称性 ads_{d+2} として bulk で実現される。従って、 ads_{d+2} の IW 縮小として空間次元 d の GC 対称性 $\text{gca}(d)$ の bulk での実現が得られると期待される。実際、IW 縮小を ads_{d+2} の生成子に対する極限として見直すことで、 AdS_2 世界面を持つ弦に対する NH string 対称性 [3] が得られることが分かった。つまり GC 対称性は、bulk では NH string 対称性として実現される。これより共形場理論の GC 不変なサブセクターと NR 弦理論 [3, 4] のホログラフィーが示唆される。GC 代数は、部分代数として { H, D, K } で生成される $\text{sl}(2, \mathbb{R}) = \text{so}(2, 1)$ と空間回転 $\text{so}(d)$ を持つが、これらはそれぞれ AdS_2 世界面の isometry と AdS_{d+2} 内の AdS_2 に垂直な方向の回転に対応する。

GC 対称性を超対称化した GC 超対称性は、共形超対称性の IW 縮小として得られると期待される。特に { Q, \bar{Q} } $H +$ となる dynamical な超対称性は、 AdS_2 世界面上の超対称性に対応する。実際、 AdS_5 S^5 上の AdS_2 弦が 1/2 BPS であることから、 $\text{psu}(2, 2|4)$ の IW 縮小として 32 超対称 GC 代数 (32 super $\text{gca}(3)$) を得た。この超代数は、ポソンの部分代数として { $\text{gca}(3)$, $\text{iso}(5)$ } を持ち、16 超対称部分代数として { $\text{sl}(2, \mathbb{R})$, $\text{so}(3)$, $\text{so}(5)$, 16 個の超対称電荷 } で生成される $\text{osp}(4|4)$ を含んでいる。また、 AdS_4 S^7 上の AdS_2 S^1 M2 プレーンが 1/2 BPS であることから、 $\text{osp}(8|4)$ の IW 縮小として 32 super $\text{gca}(2)$ を得た。同様に AdS_7 S^4 上の AdS_3 M2 プレーンが 1/2 BPS であることから、 $\text{osp}(8|4)$ の IW 縮小として 32 super semi- $\text{gca}(5)$ を得た。更に、 $\text{su}(2, 2|2)$ 、 $\text{osp}(4|4)$ 、 $\text{osp}(2|4)$ 、 $\text{osp}(8|2)$ の IW 縮小として順に 16 super $\text{gca}(3)$ 、16 super $\text{gca}(2)$ 、8 super $\text{gca}(2)$ 、16 super semi- $\text{gca}(5)$ を得た。詳しくは [1] を参照されたい。

References

- [1] M. Sakaguchi, “Super Galilean conformal algebra in AdS/CFT,” arXiv:0905.0188 [hep-th].
- [2] J. Lukierski, P. C. Stichel and W. J. Zakrzewski, Phys. Lett. A **357** (2006) 1.
- [3] J. Gomis, J. Gomis and K. Kamimura, JHEP **0512** (2005) 024.
- [4] M. Sakaguchi and K. Yoshida, JHEP **0802** (2008) 092.

Coset construction of gravity duals for NRCFTs ¹

京都大学 理学部 吉田 健太郎

E-mail: kyoshida@gauge.scphys.kyoto-u.ac.jp

近年、物性理論への AdS/CFT 対応の応用が盛んに議論されている。具体例として、冷却原子を用いて実現されるユニタリーフェルミ気体や Lifshitz 固定点上の理論などが挙げられる。これらの系は非相対論的なスケール不変性を示すことが知られており、この対称性に基づいて対応する重力解が提案された [1,2,3]。一方、これらの解の一意性は示されていない。

本講演では、非相対論的なスケール不変性を持つ重力解の「coset 構成法」について説明した [4]。この手法は Nappi-Witten の議論 [5] の自然な一般化になっており、この重力解の持つ数学的構造を明白に理解できる。特に、等質空間の範囲内ではあるが、対称性の許す最も一般的な計量を導出できるため、文献 [1,2,3] で構成された解の拡張、あるいは一意性について議論ができる。

まず、非相対論的な共形代数の例として、シュレディンガー代数を考えた。この場合の coset は、物理的な条件を課すことで、ほぼ一意に決められる。この coset は non-reductive であり、Nappi-Witten の手法 [5] は適用できないが、Fels と Renner [6] による non-reductive coset の議論を用いれば、coset 構成を実行できる。その結果、[1,2] で構成された解は、もっともらしい物理的な仮定の下で一意であることが示せた [4]。

また、時間・空間並進、空間回転、dilatation のなす代数を考えることで、Lifshitz 固定点の重力双対 [3] も coset 構成できる [4]。対称性が小さいため、多脚場を縮約するための対称 2 形式は多くのパラメータを含むが、(AdS 半径を除いて) すべて変数変換で吸収できてしまい、文献 [3] で提唱された計量は一意に決まることがわかった。

References

- [1] D. T. Son, Phys. Rev. **D78** (2008) 046003 [arXiv:0804.3972].
- [2] K. Balasubramanian, J. McGreevy, Phys. Lett. **101** (2008) 061601 [arXiv:0804.4053].
- [3] S. Kachru, X. Liu, M. Mulligan, Phys. Rev. **D78** (2008) 106005 [arXiv:0808.1725].
- [4] S. Schafer Nameki, M. Yamazaki, K. Yoshida, JHEP **0905** (2009) 038 [arXiv:0903.4245].
- [5] C. R. Nappi, E. Witten, Phys. Rev. Lett. **71** (1993) 3751 [hep-th/9310112].
- [6] M. E. Fels, A. G. Renner, Canad. J. Math. **58** (2006) No. 2 282-311.

¹この講演内容は、Sakura Schäfer Nameki 氏 (Caltech) と山崎雅人氏 (東大理, IPMU) との共同研究 [4] に基づく。

On String Theory Duals of Lifshitz-like Fixed Points

京大理 素粒子論研究室 畔柳竜生

E-mail: aze@gauge.scphys.kyoto-u.ac.jp

近年、ゲージ/重力対応の物性系への応用を目的として、スケール不変性を持つ非相対論的な場の理論とその重力双対に対する研究が活発に行われている。そのような非相対論的な場の理論の例として、Lifshitz 的な場の理論と呼ばれる、非等方的なスケール不変性

$$t \rightarrow \lambda^a t, \quad x \rightarrow \lambda x^b, \quad y \rightarrow \lambda y^c, \quad z \rightarrow \lambda z^d,$$

を持つ理論が挙げられる。この理論の重力双対として期待される重力解 (特に $(a, b, c, d) = (a \geq 1, 1, 1, 1)$ の場合) は Kachru-Liu-Mulligan [1] によって提案されたが、それを超弦理論に埋め込んだ形で導出することは未だ実現しておらず、Lifshitz 的な場の理論に対するゲージ/重力対応の詳細を理解するには至っていない。

本研究では、特に空間方向に非等方的なスケーリングをする解 ($(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 2/3)$) を、D3-D7 系として導出することにより、Lifshitz 的な場の理論に対するゲージ/重力対応についての理解を深めた [2]。対応する IIB 型超重力理論の古典解の具体形は次のとおり:

$$ds^2 = \frac{11}{12} R^2 \left[r^2 (-dt^2 + dx^2 + dy^2) + r^{4/3} dw^2 + \frac{dr^2}{r^2} \right] + R^2 d\Omega_{S^5}^2,$$
$$e^\phi = e^{\phi_0} r^{2/3}, \quad F_1 = \frac{\sqrt{22}}{3} e^{-\phi_0} dw, \quad F_5 = 4R^4 (d\Omega_{S^5} + *d\Omega_{S^5}).$$

我々の導出した解自体は dilaton が境界領域で発散するため、ゲージ/重力対応の立場からの解釈が困難である。そのため、紫外領域 (つまり境界の近く) では AdS₅ 時空として振舞い、赤外領域では上述の解になるような数値解も導出することでゲージ/重力対応の立場からの理解を可能にした。特に、この数値解のホログラフィックな繰り込み群の立場からの理解より、ゲージ理論側では、 $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論に対して、 θ -項 (ただし、 θ "パラメータ" は w に比例) による摂動を加えることで生じる繰り込み群の流れの赤外固定点上の理論として、Lifshitz 的な場の理論が現れることを示した。また本研究では、上記の解の周りの線形摂動解析を行い、不安定モードが存在することも示した。

参考文献

1. S. Kachru, X. Liu and M. Mulligan, Phys. Rev. **D78** (2008) 106005
2. T. Azeyanagi, W. Li and T. Takayanagi, JHEP **0906** (2009) 84

Unruh effect and Holography

Physics Division, National Center for Theoretical Sciences, Hsinchu 300, Taiwan, R.O.C.

Takayuki HIRAYAMA

E-mail: hirayama@phys.cts.nthu.edu.tw

This contribution is based on a collaboration with Peggy Kao, Shoichi Kawamoto and Feng-Li Lin in National Taiwan Normal University, Taiwan [1].

We study the Unruh effect using AdS/CFT correspondence. A uniformly accelerated observer in Minkowski space sees a thermal radiation whose temperature is proportional to the value of acceleration. If this temperature is above a critical value, the quark condensation becomes zero and the chiral symmetry is restored in QCD. We would like to discuss this transition from gravity side through AdS/CFT correspondence. Since the interaction is still strong around the critical temperature, it is useful to analyze this from the gravity side. Here we study a toy model, i.e. N=4 SYM, instead of real QCD. We first introduce a uniformly accelerated string (ac-string) in AdS₅ space which is given $x^2 - t^2 = (1/a^2) - 1/u^2$ in the Poincare coordinates [2]. Next we define a comoving frame by defining new coordinates (τ, ξ, r) in which ac-string becomes static. The coordinate transformation is given $t = \sqrt{1/a^2 - r^2} e^{a\xi} \sinh a\tau$, $x = \sqrt{1/a^2 - r^2} e^{a\xi} \cosh a\tau$, and $1/u = r e^{a\xi}$. Since ac-string is static and straight in the comoving frame $\xi = 0$, it is natural to identify r as the energy scale in CFT side. We can justify this identification by computing the energy stress tensor for the boundary theory and showing it is the one with temperature $a/2\pi$.

Next we introduce a probe D7 brane which provides a quark field from a D3-D7 open string. A scalar field on D7 brane corresponds to the operator $\mathcal{O} = \bar{q}q$, and we can discuss the quark condensate $\langle \mathcal{O} \rangle$ through GKP-Witten relation in AdS/CFT. The point is how to introduce D7 brane. We propose to introduce a static D7 brane in the comoving frame, i.e. the scalar only depends on r , since ac-string ends on D7 brane. We compute DBI action for D7 brane, and solve the equation of motion for the scalar field. We then follow the standard holographic renormalization and GKP-Witten relation, we obtained $\langle \mathcal{O} \rangle$. We compared our result with that for AdS Black hole case and found the qualitative behavior is same. Thus we properly recovered the behavior of $\langle \mathcal{O} \rangle$ in a finite temperature and recovered the expected behavior by the Unruh effect. It is interesting to study the thermodynamics and hydrodynamics of strongly coupled gauge theory from our approach.

References

- [1] T. Hirayama, P. Kao, S. Kawamoto, F. Lin, work in progress
- [2] B. W. Xiao, Phys. Lett. B **665** (2008) 173 [arXiv:0804.1343 [hep-th]].

Meson-Nucleon Coupling from AdS/QCD¹

中央大学 理工学部 物理学科 丸 信人

E-mail: maru@phys.chuo-u.ac.jp

AdS/CFT 対応の提唱は、強結合ゲージ理論のダイナミクス解明に新しい枠組みを与えました。強結合ゲージ理論といえば、すぐに思いつくのが QCD であり AdS/CFT 対応を適用して QCD ダイナミクス、すなわちカイラル対称性の破れや閉じ込めのダイナミクスを理解しようとする試みは、現在まで様々な見地からなされています。特に、QCD へ適用する場合に研究の標的になっているのがメソンやバリオンのハドロ物理です。AdS/CFT 対応のもとでは、4次元のハドロ物理はあるパラメタ領域のもとで曲がった時空上の5次元のゲージ理論に対応し、「ホログラフィック QCD」あるいは「AdS/QCD」などと呼ばれています。ホログラフィック QCD には、大きく2つの立場があります。1つは、弦理論から QCD を導出しようとするトップダウンの立場。もう1つは、既知の QCD を出発点として5次元理論を推測するボトムアップの立場です。私たちは本研究で、後者の立場に基づいてメソン、バリオンの物理に対応する5次元ゲージ理論を用いて、ベクトル、軸性ベクトルメソンと核子との結合定数を計算し、実験値と比較検討を行いました。

ボトムアップの立場では、メソンセクターに対応する5次元理論は N_f をクォークのフレーバー数として、 $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ をゲージ群とするゲージ理論で、bifundamental 表現をもつスカラー場を加えたもので記述されることが知られています (Erlich, Katz, Son, Stephanov)。時空計量は、一番簡単な場合の反ドゥ献奪拭七徇未魏涉蠅掘 5次元空間は2枚の3ブレーンで区切られ、原点は UV ブレーン、もう一方は IR ブレーンと呼ばれます。スカラー場の古典解が、カイラル対称性の破れを生成します。(軸性)ベクトルゲージ場は、(軸性)ベクトルメソンに対応し、カルツァ・クライン粒子が共鳴状態に対応します。特に、中間子は軸性ベクトルゲージ場の第5成分に対応します。一方、スピン 1/2 バリオンは5次元のスピン 1/2 ディラックフェルミオンに対応することが知られています (Hong, Inami, Yee)。(バリオンをスカーミオンで記述する立場もよく研究されていますが、ここではその立場をとりません) メソンと核子の結合定数は、Hong, Inami, Yee ですすでに計算されていましたが、(軸性)ベクトルと核子の結合定数は計算されていませんでしたので、これを計算しました。ただし、この結合定数を計算する際、ゲージ相互作用とスカラー場とフェルミオンの湯川結合だけでなく、パウリ項からの生成されることが予想されたので、このパウリ項を導入した点が新しいところです。以上のセットアップを用いて、波動関数の積分で与えられる ρ メソン、 ω メソン、 a_1 メソンと核子の結合定数を IR ブレーンの位置と湯川結合定数をフリーパラメタとして数値計算し、実験値と比較しました。メソン-核子結合定数をフィットしたところ、 ρ メソン-核子結合は 50%ほどのずれがありました。 a_1 メソン-核子結合定数は実験値がないため、予言値となります。スカーミオンによる同様の計算結果とも比較したところ、同様の結果が得られていました。このずれを改良するためには、1: 計量の変形、2: 異常次元の考慮、3: 量子重力、弦の効果などが挙げられます。

尚、計算の詳細、関連する文献については脚注の文献を参考にしてください。

¹この講演は、橘基氏 (佐賀大) との共同研究 arXiv:0904.3816(Accepted in EPJC) に基づいています。

Baryonium in Confining Gauge Theories

石原雅文 九州大学理学府 基礎粒子系科学専攻

E-mail: masafumi@higgs.phys.kyushu-u.ac.jp

gauge/string 対応において、 $SU(N)$ ゲージ理論におけるバリオンは、string 側では、 S^5 に巻き付いた D5-brane と、 N 本の基本弦で構成される [1]。

近年、[2] によって、ゲージ理論側で quark の閉じ込め相に対応していると考えられる、R-R スカラーによって変形された AdS 時空が構成された。

我々は以前、D5-brane がこの変形された AdS 時空にどのように埋め込まれるのかを調べることで、閉じ込め相における baryon の振る舞いを解析した [3]。

まず、D5-brane の運動方程式を解くことで、 S^5 に巻き付いた brane の配位を調べると、cusp を一つ持ち、そこでのブレーンの電束密度が N であることが分かった。よって、この cusp に N 本の弦をくっつけることでバリオンを構成することができる。

今回我々は、 x 方向に広がりをもつ D5 ブレーン解を新たに導いた [4]。この D5 ブレーンは二つのカスプを持ち、そこでの電束密度が k と $-k$ となっている。但し k は N 以下の任意の正の整数である。よって、この二つのカスプに k 本の互いに逆向きの弦をくっつけることができ、これは、 k 個のクォークと k 個の反クォークの束縛状態 (バリオンウム) と見なすことができる。また、この D5 ブレーン解はある有限の大きさでエネルギーが最小となり、安定して存在できることを示した。

References

- [1] E. Witten, JHEP **9807**, 006 (1998) [arXiv:hep-th/9805112].
- [2] H. Liu and A. A. Tseytlin, “D3-brane D-instanton configuration and $N = 4$ super YM theory in constant Nucl. Phys. B **553**, 231 (1999) [arXiv:hep-th/9903091].
- [3] K. Ghoroku and M. Ishihara, Phys. Rev. D **77**, 086003 (2008) [arXiv:0801.4216 [hep-th]].
- [4] K. Ghoroku, M. Ishihara, A. Nakamura and F. Toyoda, JHEP 0904:041,2009 arXiv:0809.1137 [hep-th].

The Cutkosky rule of three dimensional noncommutative field theory in Lie algebraic noncommutative spacetime

Yukawa Institute for Theoretical Physics, Kyoto University Yuya Sasai
E-mail: sasai@yukawa.kyoto-u.ac.jp

We have studied three dimensional noncommutative scalar field theory in the Lie algebraic noncommutative spacetime $[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = 2i\kappa\epsilon^{ijk}\hat{x}_k$, ($i, j, k = 0, 1, 2$). This noncommutative field theory is physically interesting because the Euclidean version of the theory is known to appear as the effective field theory of three dimensional quantum gravity theory (Ponzano-Regge model) which couples with spinless massive particles [1]. Since massive particles coupled with three dimensional Einstein gravity are understood as conical singularities in three dimensions, this noncommutative field theory is expected to describe the dynamics of such conical singularities.

In order to investigate the unitarity of the three dimensional noncommutative field theory, we have checked the Cutkosky rule of the one-loop self-energy diagrams in the noncommutative ϕ^3 theory [2]. Although it is well known that nonplanar diagrams in noncommutative field theory in the Moyal plane violate the Cutkosky rule, our check is nontrivial in the following senses. Firstly, since the momentum space of the noncommutative field theory is given by $SL(2, R)/Z_2$ group space, the planar amplitudes are not the same as the usual commutative ones. Secondly, if we impose the braiding, the nonplanar amplitudes become the same as the corresponding planar amplitudes when they exist. Here, the braiding is a kind of nontrivial statistics and is necessary for the noncommutative field theory to possess the nontrivial momentum conservation [3].

As a result, we have found that the Cutkosky rule of the one-loop self-energy amplitudes is satisfied when the mass of the scalar field is smaller than $1/\sqrt{2}\kappa$. This result is contrary to the fact that noncommutative field theories in the Moyal plane violate the unitarity at the one-loop level when the time-like noncommutativity does not vanish irrespective of the value of the mass. However, this does not imply that the theory is unitary when the mass is smaller than $1/\sqrt{2}\kappa$ because we can expect that in more complicated amplitudes, the Cutkosky rule will be violated for a smaller mass than $1/\sqrt{2}\kappa$. Thus, we conclude that three dimensional noncommutative scalar field theory in the Lie algebraic noncommutative spacetime $[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = 2i\kappa\epsilon^{ijk}\hat{x}_k$ does not become a unitary theory even when we introduce the braiding.

References

- [1] L. Freidel and E. R. Livine, *Class. Quant. Grav.* **23**, 2021 (2006).
- [2] Y. Sasai and N. Sasakura, *JHEP* **0906**, 013 (2009).
- [3] Y. Sasai and N. Sasakura, *Prog. Theor. Phys.* **118**, 785 (2007).

格子シミュレーションによる共形場の理論の探索

工学院大学 伊藤 悦子

E-mail: itou@yukawa.kyoto-u.ac.jp

4次元 large flavor $SU(N)$ ゲージ理論の強結合領域に、非自明なくりこみ群の固定点が存在するかどうか調べている。この理論は、摂動論的 2-loop の解析によると、赤外領域に非自明な相互作用を持つ固定点が存在する (Caswell, 1974)。すると、その固定点近傍では、大きな異常次元を持つオペレータが存在し、それが標準理論の Higgs セクターを与える理論の候補となったり、未知の複合粒子として低エネルギー領域の物理に影響したりする可能性が高く、標準模型を超えるモデルの候補の一つとして注目されている。

基本表現のフェルミオンと結合する $SU(3)$ ゲージ理論の場合、 $8 < N_f \leq 16$ の領域に赤外固定点が存在することが示唆されている。しかし、この固定点での結合定数の値は、フレーバー数によっては強結合領域にあり、摂動論的解析は信頼できない。そこで、私たちは、非摂動論的手法の一つである格子ゲージ理論のシミュレーションを用いて、running coupling constant を直接測定し、そのような固定点が存在するかどうか調べている。

格子上のくりこみスキームとして、「Twisted Polyakov Loop (TPL) scheme」を用いる。このスキームのくりこんだ結合定数は、格子の境界条件で 2 つの方向に関しリンク変数の twist を行い、twist した方向の Polyakov loop の correlator と twist していない方向の Polyakov loop の correlator の比を取る事で定義される。この事から、 $O(a/L)$ の discretization error が相殺し、比較的小さい系統誤差を与えると予測されるのが利点である。

格子シミュレーションで、running coupling constant を測定する方法は、「step scaling の方法」と呼ばれる確立した手法がある。一般に、格子上でシミュレーションした結合定数は、格子ゲージ理論の bare な結合定数 (β) と、格子のサイズ (L) と、格子一つあたりの長さ (a) に依存している。連続極限をとる事は $a \rightarrow 0$ に対応し、格子サイズは実際の物理のエネルギースケールに対応する。ただし、このとき、インプットとなる物理量を一定にするように、bare coupling constant を tuning しながら、 $a \rightarrow 0$ を取らなければならない。結合定数の成長をみる時には、まずインプットとして、ある一定の renormalized coupling の値をとり、これを与える格子パラメータ ($L/a, \beta$) の組を決める。そして、それぞれ β を固定し、格子サイズを s 倍した時の renormalized coupling を測定する。これによって、エネルギースケールを $1/s$ 倍したときの coupling constant の成長を測る事ができる。

現在までに、quenched QCD の場合、このスキームで running coupling constant を測定するテストを行った。すると、 $L/a=6$ の比較的小さい格子サイズのシミュレーションデータも、連続極限を取る時に $(a/L)^2$ の 1 次関数上に乗っており、非常によいスケールリングをしている事がわかった。

現在は、実際の large flavor $N_f = 12$ の場合のシミュレーションが進行中である。

この研究は、E.Bilgici 氏 (U.Graz), D.Lin 氏 (台湾交通大), A.Flachi 氏 (京大基研), 倉知氏 (ロスアラモス国立研), 松古氏 (KEK), 大木氏 (京大理), 大野木氏, 新谷氏 (阪大), 山崎氏 (筑波大) との共同研究にもとづく。また、数値シミュレーションは、京大基研と阪大 RCNP の sx8 を利用した。

Lattice Supersymmetry with a Deformed Superalgebra

Hokkaido University Jun Saito

E-mail: saito@particle.sci.hokudai.ac.jp

Despite various approaches, no formulation on the exact lattice supersymmetry which could preserve as many supercharges as those in the continuum has been completely established. Recent studies on the subject imply that only a BRST-like or scalar supercharge, which could be obtained using topological twisting, would at best be realized exactly on a lattice. It is true that supersymmetry associated with the scalar supercharge on the lattice would be enough to define a continuum limit without fine-tuning in low dimensions. One can easily imagine, however, that this wouldn't be the case in four dimensions.

Our approach,¹ which we call the link approach, is to realize the whole of the supercharges for a given superalgebra even on the lattice. Such an algebra must be lattice-specific, since, due to the notorious difficulty of Leibniz rule failure, the continuum superalgebra itself cannot be realized on the lattice in the same form. In the talk, it was shown that we could introduce this lattice superalgebra as a Hopf algebra, with explicit demonstration that it obeys exactly the axioms of Hopf algebra. Though this is at the moment nothing but rephrasing the main idea of the link approach, it should be noticed that the Hopf algebra axioms ensure the algebraic consistency of our superalgebra.

A natural question which follows immediately would be whether or not such an unusual superalgebra, which is no longer a normal Lie superalgebra, can serve as a symmetry for a quantum field theory. We presented in the talk an affirmative answer with an application of the general formalism called braided quantum field theory (BQFT) to the link formulation. To see this, let us first note that, though Hopf algebra in general would be represented on a noncommutative field space, we can introduce fields in our case to be commutative up to a generalized statistics which reads fields commute with each other up to some amounts of translational shifts of their arguments determined by the consistency with the coproduct structures of the Hopf algebra. This unusual statistics can be seen as a simple example of braiding, and it allows us to apply BQFT to our current formulation to propose a quantum field theory with a formal definition of path integral from which we can derive perturbative Wick's theorem and also various Ward-Takahashi identities corresponding to our Hopf algebraic supersymmetry.

We are still on the halfway to the complete formulation. First, our path integral is only formal and perturbative, not adequate to lattice formulations. Second, it is seen that lattice difference operators must also obey generalized statistics, for which we do not know how to give explicit representations at the moment. These are the issues for our future works.

¹For the details the reader is referred to: A. D'Adda, N. Kawamoto and J. Saito, "Formulation of Supersymmetry on a Lattice as a Representation of a Deformed Superalgebra," arXiv:0907.4137 [hep-th].

Lattice formulation of 2D $\mathcal{N} = (2, 2)$ SQCD based on the B model twist ¹

理化学研究所川合理論物理学研究室 加堂大輔

E-mail: kadoh@riken.jp

最近、超対称性を持ったゲージ理論の非摂動的性質を格子ゲージ理論による数値シミュレーションから明らかにするという研究が本格化しつつある。本研究では、 $U(k)$ ゲージ群で N 個の基本表現の物質場を伴った 2 次元 $\mathcal{N} = (2, 2)$ 超対称 QCD を格子上に定式化する。

超対称ゲージ理論を格子上で厳密に定義することは、格子上でのライプニッツ則の破れから、長い間難しいとされていた。これに対して、2003 年頃に Kaplan 達や杉野はそれぞれ別々に 2 次元超対称 Yang-Mills 理論の微調整 (fine tuning) の要らない格子定式化法を明らかにした [1,2]。この進展の後に、金森-鈴木らは杉野による 2 次元 $\mathcal{N} = (2, 2)$ 格子超対称 Yang-Mills 理論を数値シミュレーションに応用し、連続極限において非摂動的に超対称ウォード・高橋恒等式が成り立ち、超対称性が回復することを示した。さらに、いくつかの物理量や真空のエネルギーを格子計算から測定することに成功した [3]。

本研究では、このような成功を踏まえて、杉野による超対称ゲージ理論の定式化法を物質場の入った場合に拡張していく方法 [4] の一つとして、 $U(k)$ ゲージ群で N 個の基本表現の物質場を伴った 2 次元 $\mathcal{N} = (2, 2)$ 超対称 QCD の定式化を行う [5]。我々の構成論では、格子理論で一般的に使用されている、コンパクトなゲージ場の変数と通常の格子空間上で定義されるウィルソンフェルミオンを用いており、数値計算への応用が容易である。特に、元々の杉野の定式化法が A モデルツイストに基づいていたのに対して、本研究は B モデルツイストに基づくことで、 N 個の基本表現の物質場のみを含む理論のウィルソンフェルミオンによる定式化を可能にしている。得られた格子作用は B モデルツイストの BRST 変換 (元の 4 つの超対称変換の線形結合から作られる一つの変換) の下で厳密に不変である。さらに、摂動的な発散次数勘定の議論から、連続極限で消えない超対称性を壊す演算子 (の係数) の微調整 (fine tuning) を行うことなしに、格子上に厳密に実現できなかった残り 3 つの変換を含む全ての超対称不変性が連続極限において回復することが示される。

今後、本研究で得られた格子理論を数値計算へ応用することで、2 次元 $\mathcal{N} = (2, 2)$ 超対称 QCD の非摂動的性質を明らかにすることが可能である。また、超対称性がより高い場合への拡張が本研究のさらなる発展形として期待されている。

参考文献

- [1] D. B. Kaplan, E. Katz and M. Unsal, JHEP **0305**, 037 (2003), A. G. Cohen, D. B. Kaplan, E. Katz and M. Unsal, JHEP **0308**, 024 (2003), JHEP **0312**, 031 (2003).
- [2] F. Sugino, JHEP **0401**, 015 (2004), JHEP **0403**, 067 (2004).
- [3] I. Kanamori and H. Suzuki, Nucl. Phys. B **811**, 420 (2009), Phys. Lett. B **672**, 307 (2009). I. Kanamori, F. Sugino and H. Suzuki, Prog. Theor. Phys. **119**, 797 (2008). I. Kanamori, Phys. Rev. D **79**, 115015 (2009).
- [4] F. Sugino, Nucl. Phys. B **808**, 292 (2009), Y. Kikukawa and F. Sugino, Nucl. Phys. B **819**, 76 (2009).
- [5] D. Kadoh, F. Sugino and H. Suzuki, Nucl. Phys. B **820**, 99 (2009)

¹本研究は、鈴木博氏、杉野文彦氏らとの共同研究に基づいている [5]。

Supersymmetry restoration in small volume lattices

理化学研究所仁科加速器研究センター川合理論物理学研究室 鈴木 博

E-mail: hsuzuki@riken.jp

[このプレゼンテーションは加堂大輔氏との共同研究 [1] に基づいています] ここ数年来、格子による超対称ゲージ理論の非摂動的定式化とその応用の研究に取り組んでいる。よく知られているように、超対称性代数は無限小並進を含むため、格子定式化は一般に超対称性を壊してしまう。そこで、格子によって壊された超対称性は連続極限においてはじめて回復すると考える。この回復をどのように実現するか、またこれが実際に実現するかどうか超対称ゲージ理論の格子定式化における基本的問題である。ここでは、杉野による 2 次元の $\mathcal{N} = (2, 2)$ 超対称 Yang-Mills 理論の格子定式化 [2] を考察する。この定式化の特徴は fermionic で nilpotent な対称性 Q を持つことであり、この対称性と $U(1)_A$ 対称性のおかげで、連続極限での有効作用がパラメータの fine-tuning なしに超対称になると議論されている [2]。

超対称性の回復を見る最もよい方法は、超対称性に付随した Noether current の保存則である Ward-高橋恒等式 (SUSY WT 恒等式) を確かめることである。ここでは、まず、連続理論の SUSY WT 恒等式に対応した格子上の関係式をいかに導くかを明らかにした。格子上での関係式は、格子定式化が超対称性を持たないことに対応して、breaking term $B(x)$ の寄与を含んでいる。我々は、この $B(x)$ や格子上の supercurrent $s_\mu(x)$ を、いかにしてそれらの $U(1)_A$ 共変性が明白な形で定義するか、を明確にした。次に、復号演算子である $B(x)$ の繰り込みを $U(1)_A$ 対称性と Q 対称性に基づいて形式的摂動論の枠内で議論し、連続極限では $B(x)$ の寄与が残らず、連続理論の SUSY WT 恒等式が回復することを示した。これは、Monte-Carlo シミュレーションによる SUSY WT 恒等式の非摂動的観測 [3] の結果と完全に合致する。我々はさらに、超対称性の自発的破れの秩序変数として文献 [4] において提案された hamiltonian 密度の定義が、上の格子上の関係式から演算子代数の結果としても自然に導かれることを示した。最後に、上の形式的摂動論の結論を補うため、SUSY WT 恒等式が連続極限で回復することを有限体積での準摂動的展開の非自明な最低次において確認した。

References

- [1] D. Kadoh and H. Suzuki, to appear.
- [2] F. Sugino, JHEP **0401** (2004) 015 [arXiv:hep-lat/0311021]; JHEP **0403** (2004) 067 [arXiv:hep-lat/0401017].
- [3] I. Kanamori and H. Suzuki, Nucl. Phys. B **811** (2009) 420 [arXiv:0809.2856 [hep-lat]].
- [4] I. Kanamori, H. Suzuki and F. Sugino, Phys. Rev. D **77** (2008) 091502 [arXiv:0711.2099 [hep-lat]]; Prog. Theor. Phys. **119** (2008) 797 [arXiv:0711.2132 [hep-lat]].

行列模型を用いた $R \times S^3$ 上の $\mathcal{N} = 4$ SYM における 相関関数の数値的解析¹

高エネルギー加速器研究機構 (KEK) 伊敷 吾郎

E-mail: ishiki@post.kek.jp

ゲージ/重力対応は、弦理論の新たな定式化を与える手法として注目されている。 $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills (SYM) 理論は、この対応を通じて、 $AdS_5 \times S^5$ 上の type IIB 型超弦理論を記述していると期待されている。しかしながら、この対応の一般的な証明を与えるためには、 $\mathcal{N} = 4$ SYM 理論の強結合領域の解析が必要であり、これは非常に困難である。格子正則化は、場の理論の強結合領域を解析するための有力な手段の一つであるが、 $\mathcal{N} = 4$ SYM 理論の持つ多くの超対称性を保つような格子理論は、現在までのところ構成されていない。

そこで我々は plane wave 行列模型 (PWMM) を用いた、 $R \times S^3$ 上の planar $\mathcal{N} = 4$ SYM 理論の正則化 [1] に注目した。この正則化においては、PWMM の行列のサイズが S^3 上の運動量のカットオフを与えるが、カットオフを導入しているにもかかわらず、ゲージ対称性と $SU(2|4)$ 対称性 (16 個の超対称性を含む) という高い対称性を保つことができる。また、この正則化を用いることで、 $R \times S^3$ 上の planar $\mathcal{N} = 4$ SYM 理論を、1 次元の行列模型として扱うことが可能となる。このような 1 次元の行列模型に対しては、ゲージ対称性や超対称性を尊重した形で数値的解析を可能とする、non-lattice simulation という手法が知られている [2]。

我々は non-lattice simulation と上述の PWMM を用いた正則化を併用し、 $R \times S^3$ 上の planar $\mathcal{N} = 4$ SYM 理論の数値的解析を行った。我々は特に、 $\mathcal{N} = 4$ SYM における chiral primary 演算子の 2 点関数の期待値を Monte Carlo 法により計算した。この演算子の 2 点関数は、非繰りこみ定理により量子補正を受けないことが知られている。我々はこれを検証するために、弱結合と強結合での数値計算結果を比較した。我々の結果は、 $\mathcal{N} = 4$ SYM のみならず、PWMM の任意の非可換球面解の周りの理論に対して非繰りこみ定理が成立していることを示唆していた。これは我々の解析方法が、多くの超対称性を保っていることの一つの証拠であるといえる。

Chiral primary 演算子の多点関数の期待値は、AdS/CFT 対応を通して、IIB 型超重力理論から計算することができる。従って、我々の計算を多点関数に適用し、その計算結果を重力側からの結果と比較することで、今後 AdS/CFT 対応の直接的な検証が可能となることが期待される。

References

- [1] T. Ishii, G. Ishiki, S. Shimasaki and A. Tsuchiya, “ $\mathcal{N}=4$ Super Yang-Mills from the Plane Wave Matrix Model,” Phys. Rev. D **78**, 106001 (2008).
- [2] M. Hanada, J. Nishimura and S. Takeuchi, “Non-lattice simulation for supersymmetric gauge theories in one dimension,” Phys. Rev. Lett. **99**, 161602 (2007).

¹この講演は、本田正純氏、Sang-Woo Kim 氏、西村淳氏、土屋麻人氏との共同研究に基づくものである。

A new type of large N reduction for Chern-Simons theory on S^3

Kyoto University Shinji Shimasaki ¹
E-mail: shinji@gauge.scphys.kyoto-u.ac.jp

Matrix model is an promising candidate for a non-perturbative formulation of superstring or M-theory. In matrix models, space-time is considered to be emergent. While it is verified that these models reproduce gravity around flat space-time, it is necessary to elucidate how curved space-time is included in these models. Meanwhile, the large N reduction [1] is the first example that realizes the emergence of space-time in matrix model. It states that gauge theory on flat space-time is equivalent in the planar limit to a matrix model (a reduced model) that is obtained by its dimensional reduction to lower dimensions. Thus it should be worthwhile to investigate whether the large N reduction can be extended to curved space-time.

In [2], we proposed the non-perturbative formulation of $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills on $R \times S^3$ in terms of its large N reduced matrix model. However, while the proposal has already passed some non-trivial tests at weak coupling, it has not been completely proven yet.

In this talk, we discuss the same type of the large N reduction for Chern-Simons (CS) theory on S^3 , which has been exactly solved. We prove that the large N reduction does work for CS theory on S^3 , namely the equivalence between the reduced matrix model and the original theory in the large N limit in all orders in perturbation theory [3]. We find that the reduced model of CS theory on S^3 reproduces the original theory in the planar limit, expanded around a particular background consisting of multiple fuzzy spheres, where the S^3 is constructed as a nontrivial $U(1)$ fiber bundle over S^2 from matrices. We calculate the free energy and the vacuum expectation value of unknot Wilson loop operator in the reduced matrix model and show that, in the large N limit, the results agree with the known results for the CS theory. Thus, our study provides an extension of the large N reduction to the case of a curved space, S^3 , and the first explicitly proved example of the new type of the large N reduction.

References

- [1] T. Eguchi and H. Kawai, Phys. Rev. Lett. **48**, 1063 (1982).
- [2] T. Ishii, G. Ishiki, S. Shimasaki and A. Tsuchiya, Phys. Rev. D **78**, 106001 (2008) [arXiv:0807.2352 [hep-th]].
- [3] G. Ishiki, S. Shimasaki and A. Tsuchiya, arXiv:0908.1711 [hep-th]. *to be published in Phys. Rev. D*

¹This talk is based on the work done in collaboration with Goro Ishiki, Kazutoshi Ohta and Asato Tsuchiya.

String coupling and interactions in type IIB matrix model¹

高エネルギー加速器研究機構 長岡悟史

E-mail: nagaoka@post.kek.jp

IIB 行列模型 [1] を 2 次元非可換背景の周りで展開すると 2 次元非可換空間上の超対称ゲージ理論が現れる。この 2 次元の理論の結合定数は次元を持っており、従って低エネルギー極限は強結合極限と対応している。また、この極限はゲージ/弦双対性を通して弦理論の弱結合極限とも対応しているため、2 次元理論の低エネルギー領域は基本弦を基本的自由度として記述することが適切であることがわかる。高次の微分項が低エネルギー極限で無視できることとあわせると、結局基本弦の多体系の低エネルギーでの振る舞いは可換な 2 次元超対称 ($\mathcal{N}=8$) $U(N)$ ゲージ理論であらわされることがわかる [2]。この理論ではスカラー場の値が弦の座標をあらわしているが、これはマトリックスストリング理論 [3] と同じ見方であり、D-ストリングの多体系の理論としての 2 次元ゲージ理論とは S 双対の関係にある。またここで定義される巻き付き数は、T 双対な理論においては光円錐座標の運動量と対応している。

この理論では弦の組み換えを基本相互作用と考えることができる。交差する D-ストリング系では交点付近に不安定モードが局在し、その凝縮によって交差 D-ストリングの組み換えが起こることが示されている [4] が、この理論でも互いに交差する基本弦を局所的な解として構成することができる。その解の不安定モードを用いて弦の組み換え確率を求めた。その結果、世界面の次元を持ち交差角度に依存したパラメータ q が微小な場合の組み換え確率を弦の摂動論から求めた組み換え確率と比較することにより、 q と弦の結合定数 g_s との間の対応関係を導き出した [5]。

References

- [1] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, “A Large- N Reduced Model as Superstring,” Nucl. Phys. **B498** (1997) 467, hep-th/9612115.
- [2] Y. Kitazawa and S. Nagaoka, “Green-Schwarz superstring from type IIB matrix model,” Phys. Rev. **D77** (2008) 026009, arXiv:0708.1077[hep-th].
- [3] R. Dijkgraaf, E. Verlinde and H. Verlinde, “Matrix String Theory,” Nucl. Phys. **B500** (1997) 43, hep-th/9703030.
- [4] K. Hashimoto and S. Nagaoka, “Recombination of Intersecting D-branes by Local Tachyon Condensation,” JHEP **0306** (2003) 034, hep-th/0303204.
- [5] Y. Kitazawa and S. Nagaoka, “String coupling and interactions in type IIB matrix model,” Phys. Rev. **D79** (2009) 106002, arXiv:0812.3460[hep-th].

¹北澤良久氏 (高工研、総研大) との共同研究に基づく。

行列模型のオリエンティフォールディングと有効作用における固有値間力の方向依存性

Osaka City University Reiji Yoshioka
E-mail: yoshioka@sci.osaka-cu.ac.jp

IIB matrix model [1] is obtained by the dimensional reduction of ten-dimensional $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric Yang-Mills theory to a point. In this model, the diagonal elements of each bosonic matrix are regarded as the spacetime points. We consider the effects of orientifolding that preserves supersymmetries [2] in the IIB matrix model with regard to its effective dynamics generated for diagonal elements.

The orientifolding at the level of matrices is achieved by using the branching of $u(2k)$ Lie algebra into $usp(2k)$ Lie algebra and the antisymmetric representation of $usp(2k)$. When we demand that the model preserves the supersymmetries after the matrix orientifolding, the model is decided almost uniquely. After all, taking the case of maximal supersymmetries, six of the bosonic matrices belong to the defining representation of the $usp(2k)$ Lie algebra and four of those belong to the antisymmetric representation. That is, the splitting of ten dimensions into six and four takes place. This fact is the attractive feature for obtaining four-dimensional spacetime.

We consider the long distance expansion of the one-loop effective action for the diagonal elements of the bosonic matrices [3] under the setup above. The half of the diagonal elements represents spacetime points and the remaining diagonal elements represents their mirror images with respect to the four-dimensional plate in our orientifolded model. We demonstrate that the directional asymmetry of spacetime brought upon in fact leads to that of the forces exerting on the spacetime points. In addition to the two-body attraction between two spacetime points, there are attractions toward the four-dimensional plate because of the existence of their mirror images.

References

- [1] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa, A. Tsuchiya, “A Large N reduced model as superstring” Nucl. Phys. B **498**: 467, (1997) [hep-th/9612115].
- [2] H. Itoyama and A. Tokura, “USp(2k) matrix model: Nonperturbative approach to orientifolds”, Phys. Rev. D **58**, 026002 (1998) [hep-th/9801084].
- [3] H. Aoki, S. Iso, H. Kawai, Y. Kitazawa and T. Tada, “Space-Time Structure from IIB Matrix Model”, Prog. Theor. Phys. **99**: 713, (1998) [hep-th/9802085].

Dynamical Topology Change of Black hole and Matrix Model.

Tata Institute of Fundamental Research 森田 健

E-mail: takeshi@theory.tifr.res.in

この研究では私は TIFR の Mahato、Mandal、Wadia らと共に Gregory-Laflamme 相転移の問題を gauge dual であると予想される行列模型を用いて議論した。

一般相対性理論では、時空の次元が S^1 コンパクト空間を含むような場合にブラックストリングと呼ばれるコンパクト空間に巻き付いたブラックホール解が存在することが知られている。このような解は S^1 コンパクト空間の半径がブラックストリングの質量に比べてある程度大きいと不安定になり、より安定なブラックホールへと相転移することが期待されている。(Gregory-Laflamme 相転移) しかしこの相転移はブラックホールのトポロジーを変化させる。特にブラックストリングがブラックホールになるためにはホライズンがちぎれなければならない。ホライズンがちぎれるとその中の特異点が裸の特異点となってしまうため、そのような過程は一般相対性理論の枠内では起こらない。(Horowitz-Maeda 予想) 量子重力の効果で相転移が起こるのではないかと期待されているがそのような証拠は未だ得られていなかった。このため不安定なブラックストリングがどのような時間発展をするのかこれまで理解されていなかった。

我々はこの問題を超弦理論における gauge/gravity 対応を用いることで議論した。この対応を用いることで、ある種のブラックストリングは S^1 空間に存在する二次元の $SU(N)$ 超対称性ゲージ理論で記述されることが知られている。そして重力理論の Gregory-Laflamme 相転移に対応し、Gross-Witten-Wadia 相転移型の相転移がこのゲージ理論で起こると予想されている。特に Gross-Witten-Wadia 相転移は 1 次元の行列模型を用いて記述することができるので、この模型を用いた Gregory-Laflamme 相転移の記述が期待できる。

そこで我々は時間依存するポテンシャル中で行列模型を考えることで、Gross-Witten-Wadia 相転移を無理矢理起こさせるような過程を考えた。この過程は重力理論ではコンパクト空間の半径を無理矢理大きくすることでブラックストリングを無理矢理不安定化させていくような過程と対応する。我々はそのような行列模型が Horowitz-Maeda 予想に対応するような時間発展をすることを発見した。すなわちブラックストリングに対応する行列模型のある相からブラックホールに対応する別の相へ相転移させようとしても、相転移には無限の時間がかかり起こらないことを発見した。またこの過程から逆の方向の相転移を無理矢理起こさせるような時間発展するポテンシャルも考えた。この過程はブラックホールからブラックストリングへの相転移と対応する。重力理論ではこの過程は裸の特異点が現れないためスムーズに起こると期待されている。そして実際に行列模型でもこの相転移過程はスムーズに起こることを示すことができた。これらの結果は行列模型のダイナミクスが正しく重力理論のダイナミクスを記述できることを示している。

さらに行列模型で $1/N$ 補正を考えることで、重力理論における量子論的な補正を取り入れることができる。この場合の時間発展を調べると、ブラックストリングからブラックホールへの相転移がスムーズに起こることを示唆する結果が得られた。これは量子重力の効果で特異点が解消されることを示唆している。