



Quiver Chern-Simons Theories, D3-branes, and Lorentzian Lie 3-algebras

本間 良則 (総研大, KEK)

[arXiv:0912.1613\[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/0912.1613); Prog.Theor.Phys.123:449-474,2010

共同研究者: 張 森 (総研大, KEK)

導入: M2-ブレーンの有効理論

BLG 理論

$$\mathcal{N} = 8$$

Lie 3-代数 $[T^a, T^b, T^c] = f^{abc}_d T^d$

$$A_4 \text{ BLG } f^{abcd} \propto \epsilon^{abcd}$$

ABJM 理論

$$\mathcal{N} = 6$$

Chern-Simons-matter理論
w/ product ゲージ群

$$SU(2) \times SU(2)$$

等価

Raamsdonk '08

Lorentzian BLG

(通常の) Lie 代数 + 負ノルム生成子
 $\langle u, v \rangle = -1$

↓ 中心拡大

Ho-Matsuo-Shiba '09

Extended L-BLG

↓
Dp(p≥3)-ブレーン

Kobo-Matsuo-Shiba '09

スケール極限

Y.H.-Iso-Sumitomo-Zhang '08

$$SU(N) \times SU(N)$$

Quiver CS theory
from orbifolding ABJM

↓
D3-ブレーン

Hashimoto-Tai-Terashima '08

?

Outline

- BLG 理論とその一般化
- ABJM理論とN=4 クイバー Chern-Simons 理論
- N=4 クイバー Chern-Simons 理論とそのスケール極限
- いくつかの応用
- まとめ

BLG理論とは？

- **BLG action** $\mathcal{N} = 8, SO(8)_R$: appropriate symm. as M2-brane

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2}\text{Tr}(D^\mu X^I, D_\mu X^I) + \frac{i}{2}\text{Tr}(\bar{\Psi}, \Gamma^\mu D_\mu \Psi) \\ & + \frac{i}{4}\text{Tr}(\bar{\Psi}, \Gamma_{IJ}[X^I, X^J, \Psi]) - \frac{1}{12}\text{Tr}([X^I, X^J, X^K], [X^I, X^J, X^K]) \\ & + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda}(f^{abcd} A_{\mu ab} \partial_\nu A_{\lambda cd} + \frac{2}{3} f^{cda}_g f^{efgb} A_{\mu ab} A_{\mu cd} A_{\lambda ef}) \end{aligned}$$

Lie 3-代数

$$[T^a, T^b, T^c] = f^{abc}_d T^d \quad f^{abcd} : \text{完全反対称}$$

- ▶ 重要なのは、以下の条件を満たす代数が具体的に作れるかどうか

Fundamental identity (Jacobi 恒等式の一般化) (ゲージ変換 $\delta X^I = \Lambda_{ab}[T^a, T^b, X^I]$ のclosure)

$$[T^a, T^b, [T^c, T^d, T^e]] = [[T^a, T^b, T^c], T^d, T^e] + [T^c, [T^a, T^b, T^d], T^e] + [T^c, T^d, [T^a, T^b, T^e]]$$

||

$$f^{abc}_g f^{efg}_d = 3f^{ef[a}_g f^{bc]g}_d$$

Lie 3-代数の具体例

$\mathcal{N} = 8$ Finite dim.

{	positive norm	A_4 BLG	$f^{abcd} \propto \epsilon^{abcd}$
	negative norm	Lorentzian BLG	

Lorentzian BLG

$$\begin{aligned}
 [u_0, T^i, T^j] &= f^{ij}_k T^k \\
 [T^i, T^j, T^k] &= f^{ijk} v_0 \\
 \text{tr}(u_0, v_0) &= -1, \quad \text{tr}(T^i, T^j) = \delta^{ij}
 \end{aligned}$$

v_0 : center, u_0 : identity

T^i : Lie algebra

central
extension



Extended L-BLG Ho-Matsuo-Shiba'09

$$\begin{aligned}
 [u_0, u_a, u_b] &= 0, \quad a, b = 1, \dots, d \\
 [u_0, u_a, T^i_{\vec{m}}] &= -im_a T^i_{\vec{m}}, \\
 [u_0, T^i_{\vec{m}}, T^j_{\vec{n}}] &= im_a v^a \delta_{\vec{m}+\vec{n}} \delta^{ij} + f^{ij}_k T^k_{\vec{m}+\vec{n}}, \\
 [T^i_{\vec{l}}, T^j_{\vec{m}}, T^k_{\vec{n}}] &= f^{ijk} \delta_{\vec{l}+\vec{m}+\vec{n}} v^0, \\
 \text{tr}(u_A, v^B) &= -\delta^B_A, \quad \text{tr}(T^i_{\vec{m}}, T^j_{\vec{n}}) = \delta^{ij} \delta_{\vec{m}+\vec{n}},
 \end{aligned}$$

m_a : Kaluza-Klein mass

▶ Extended L-BLG理論は D(d+2)-ブレーンの有効理論におとすことができる

[Kobo-Matsuo-Shiba]

Extended Lorentzian BLG理論の特徴

mode展開

$$X^I = X_{(i\vec{m})}^I T_{\vec{m}}^i + X^{IA} u_A + \underline{X}_A^I v^A$$

scalar in D2

Higgs field

Lagrange multipliers

constraint $\partial^\mu \partial_\mu X^{IA} = 0$

constraint eq.

$$\partial^\mu \partial_\mu X^{IA} = 0$$

d+1 constant vectors $\vec{X}^A = \vec{\lambda}^A$ ➡ Torus metric: $G^{AB} = \vec{\lambda}^A \cdot \vec{\lambda}^B$

moduli パラメータ

$$\vec{\lambda}^0, \vec{\lambda}^a$$

{ radius of M-circle
+ moduli of T^d

- ▶ scalar場に上記のVEVを与えたのちに補助場について integrating out することで 3d SYM + KK-tower (D2 on torus) を得ることができる

➡ Higher dimensional Dp(p>2)-ブレーン

$$\left[\text{world volume } \mathbb{R}^{1,2} \times \mathbb{T}^d \quad (p = d + 2) \right]$$

ABJM理論からLorentzian BLG理論へ

ABJM 理論

$\mathcal{N} = 6$ U(N) \times U(N) Chern-Simons-matter 理論

$$S = \int d^3x \left[-\text{tr}\{(D_\mu Z^A)^\dagger D^\mu Z^A + (D_\mu W^A)^\dagger D^\mu W^A\} - V(Z, W) \right. \\ \left. + \frac{k}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \text{tr}\{A_\mu^{(1)} \partial_\nu A_\lambda^{(1)} + \frac{2i}{3} A_\mu^{(1)} A_\nu^{(1)} A_\lambda^{(1)} - A_\mu^{(2)} \partial_\nu A_\lambda^{(2)} - \frac{2i}{3} A_\mu^{(2)} A_\nu^{(2)} A_\lambda^{(2)}\} \right]$$

ABJM理論からL-BLG理論を
導出できる

[Y.H.-Iso-Sumitomo-Zhang]

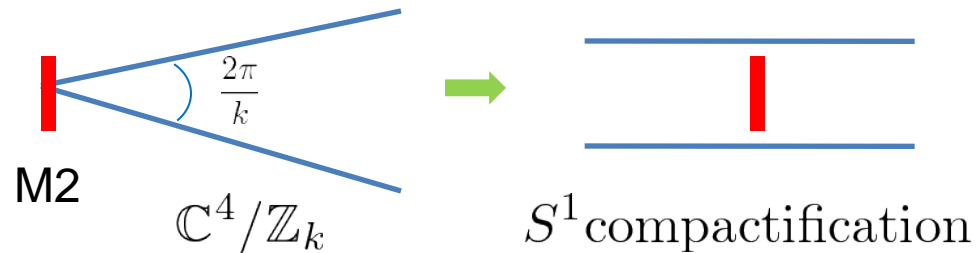
$$\begin{aligned} Z_0 &\rightarrow \lambda^{-1} Z_0 \\ B_\mu &\equiv \frac{A_\mu^{(1)} - A_\mu^{(2)}}{2} \rightarrow \lambda B_\mu \quad (\lambda \rightarrow 0) \\ k &\rightarrow \lambda^{-1} k \end{aligned}$$

L-BLG 理論

VEV $Z_0 \rightarrow \infty$: brane is far from origin

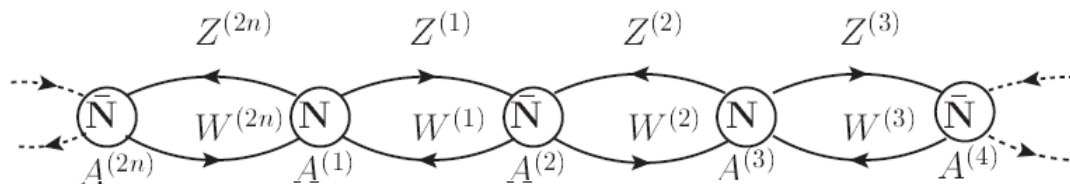
$k \rightarrow \infty$: $\mathbb{Z}_k \rightarrow U(1)$ identification

$B_\mu \rightarrow 0$: Inönü-Wigner contraction



クイバー-Chern-Simons理論のスケール極限

N=4 クイバー CS 理論



モジュライ空間 $\mathbb{C}^4 / (\mathbb{Z}_{nk} \times \mathbb{Z}_n)$ [Terashima-Yagi][namura-Kimura]
[Benna-Klebanov-Klose-Smedback]

ゲージ場の線形結合 $A_\mu^{(\pm)(2l-1)} \equiv \frac{1}{2}(A_\mu^{(2l-1)} \pm A_\mu^{(2l+2s)})$, ($s \in \mathbb{Z}$) をとり、scalar場を $Z = Z_0 + \hat{Z}$ と trace part と traceless part に分けたのちに以下のような場の rescaling を行い、最後に $n \rightarrow \infty$ の極限をとる

$$\begin{aligned}
 Z_0^{(2l-1)} &\rightarrow \sqrt{\frac{n}{2}} Y_0^{(1)} & A_\mu^{(+)(2l-1)} &\rightarrow q^{lm} A_{\mu(m)} \\
 Z_0^{(2l)} &\rightarrow \sqrt{\frac{n}{2}} Y_0^{(2)} & A_\mu^{(-)(2l-1)} &\rightarrow \frac{\pi}{n} q^{lm} A'_{\mu(m)} \\
 \hat{Z}^{(2l-1)} &\rightarrow \frac{q^{lm}}{\sqrt{n}} \frac{Y_{(m)}^{(1)}}{\sqrt{2}} & & \\
 \hat{Z}^{(2l)} &\rightarrow \frac{q^{lm}}{\sqrt{n}} \frac{Y_{(m)}^{(2)}}{\sqrt{2}} & &
 \end{aligned}$$

Inönü-Wigner 縮約

T² コンパクト化

$$q = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

$$\sum_l \frac{q^{lm}}{n} = \delta_{m,0}$$

運動項のスケール極限

- ▶ このscalingのもとで、共変微分は次のようになる

$$\begin{aligned}
 D_\mu Z_{2l-1} &\rightarrow \cdots - \overbrace{2\pi sm A_{\mu(m)} Y_0^{(1)} + 2\pi i A'_{\mu(m)} Y_0^{(1)}}^{\text{VEV を含む項}} \\
 D_\mu Z_{(2l)} &\rightarrow \cdots - 2\pi(s+1)m A_{\mu(m)} Y_0^{(2)} + 2\pi i A'_{\mu(m)} Y_0^{(2)}
 \end{aligned}$$

- ▶ 一方、Extended L-BLG 理論の共変微分は

$$(D_\mu X^I)_{(i,m)} = \cdots - \overbrace{A'_{\mu(i,m)} \lambda^{I0} - im A_{\mu(i,m)} \lambda^{I1}}^{\text{VEV を含む項}}$$

よって、以下の identification により両者は一致する

EL-BLG	クイバーCS
$\lambda^{I0} = -2\pi(X_0^1, X_0^2, X_0^3, X_0^4, X_0^5, X_0^6, X_0^7, X_0^8),$	
$\lambda^{I1} = -2\pi(sX_0^1, (s+1)X_0^2, sX_0^3, (s+1)X_0^4, sX_0^5, (s+1)X_0^6, sX_0^7, (s+1)X_0^8),$	

Chern-Simons 項のスケール極限

$$\frac{k}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \left[A_\mu^{(2l-1)} \partial_\nu A_\lambda^{(2l-1)} + \frac{2i}{3} A_\mu^{(2l-1)} A_\nu^{(2l-1)} A_\lambda^{(2l-1)} - A_\mu^{(2l)} \partial_\nu A_\lambda^{(2l)} - \frac{2i}{3} A_\mu^{(2l)} A_\nu^{(2l)} A_\lambda^{(2l)} \right]$$



線形結合: $A_\mu^{(\pm)(2l-1)} = \frac{1}{2}(A_\mu^{(2l-1)} \pm A_\mu^{(2l+2s)}), \quad (s \in \mathbb{Z})$

$$\frac{k}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu^{(-)(2l-1)} F_{\nu\lambda}^{(2l-1)} + \frac{4i}{3} \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu^{(-)(2l-1)} A_\nu^{(-)(2l-1)} A_\lambda^{(-)(2l-1)} \quad \text{BF type}$$

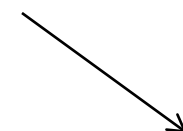


rescaling: $A_\mu^{(+)(2l-1)} \rightarrow q^{lm} A_{\mu(m)}$
 $A_\mu^{(-)(2l-1)} \rightarrow \frac{\pi}{n} q^{lm} A'_{\mu(m)}$

$$\frac{k}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \frac{q^{l(m+n)}}{n} A'_{\mu(m)} F_{\nu\lambda(n)} + \frac{ik}{3\pi} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \frac{q^{lm}}{n^3} A'_{\mu(n)} A'_{\nu(k)} A'_{\lambda(m-n-k)}$$

→ $\frac{k}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} A'_{\mu(m)} F_{\nu\lambda(-m)}$

Extended L-BLG 理論の
ものと一致!



スケール極限で0になる

ポテンシャル項のスケール極限

- ▶ ポテンシャル項に関しても一致を確認することができた

$$\begin{aligned}
 V_{bos} = & -\frac{4\pi^2}{3k^2} \sum_{l=1}^n \left[\text{tr} Y_{2l}^A Y_{A,2l}^\dagger Y_{2l}^B Y_{B,2l}^\dagger Y_{2l}^C Y_{C,2l}^\dagger + 3\text{tr} Y_{2l}^A Y_{A,2l}^\dagger Y_{2l}^B Y_{B,2l}^\dagger Y_{2l+1}^C Y_{C,2l+1}^\dagger \right. \\
 & + 3\text{tr} Y_{2l}^A Y_{A,2l}^\dagger Y_{2l+1}^B Y_{B,2l+1}^\dagger Y_{2l+1}^C Y_{C,2l+1}^\dagger + \text{tr} Y_{2l+1}^A Y_{A,2l+1}^\dagger Y_{2l+1}^B Y_{B,2l+1}^\dagger Y_{2l+1}^C Y_{C,2l+1}^\dagger \\
 & + \text{tr} Y_{A,2l-1}^\dagger Y_{2l-1}^A Y_{B,2l-1}^\dagger Y_{2l-1}^B Y_{C,2l-1}^\dagger Y_{2l-1}^C + 3\text{tr} Y_{A,2l-1}^\dagger Y_{2l-1}^A Y_{B,2l-1}^\dagger Y_{2l-1}^B Y_{C,2l}^\dagger Y_{2l}^C \\
 & + 3\text{tr} Y_{A,2l-1}^\dagger Y_{2l-1}^A Y_{B,2l}^\dagger Y_{2l}^B Y_{C,2l}^\dagger Y_{2l}^C + \text{tr} Y_{A,2l}^\dagger Y_{2l}^A Y_{B,2l}^\dagger Y_{2l}^B Y_{C,2l}^\dagger Y_{2l}^C \\
 & + 4\text{tr} Y_{2l-1}^A Y_{B,2l-1}^\dagger Y_{2l-1}^C Y_{A,2l-1}^\dagger Y_{2l-1}^B Y_{C,2l-1}^\dagger + 12\text{tr} Y_{2l}^A Y_{B,2l}^\dagger Y_{2l+1}^C Y_{A,2l+2}^\dagger Y_{2l+2}^B Y_{C,2l+1}^\dagger \\
 & + 12\text{tr} Y_{2l+1}^A Y_{B,2l+1}^\dagger Y_{2l}^C Y_{A,2l-1}^\dagger Y_{2l-1}^B Y_{C,2l}^\dagger + 4\text{tr} Y_{2l}^A Y_{B,2l}^\dagger Y_{2l}^C Y_{A,2l}^\dagger Y_{2l}^B Y_{C,2l}^\dagger \\
 & - 6\text{tr} Y_{2l-1}^A Y_{B,2l-1}^\dagger Y_{2l-1}^B Y_{A,2l-1}^\dagger Y_{2l-1}^C Y_{C,2l-1}^\dagger - 6\text{tr} Y_{2l}^A Y_{B,2l}^\dagger Y_{2l}^B Y_{A,2l}^\dagger Y_{2l}^C Y_{C,2l}^\dagger \\
 & - 6\text{tr} Y_{2l+1}^A Y_{B,2l+1}^\dagger Y_{2l+1}^B Y_{A,2l+1}^\dagger Y_{2l}^C Y_{C,2l}^\dagger - 6\text{tr} Y_{2l}^A Y_{B,2l}^\dagger Y_{2l}^B Y_{A,2l}^\dagger Y_{2l+1}^C Y_{C,2l+1}^\dagger \\
 & - 6\text{tr} Y_{2l-1}^A Y_{B,2l}^\dagger Y_{2l}^B Y_{A,2l-1}^\dagger Y_{2l-1}^C Y_{C,2l-1}^\dagger - 6\text{tr} Y_{2l}^A Y_{B,2l-1}^\dagger Y_{2l-1}^B Y_{A,2l}^\dagger Y_{2l}^C Y_{C,2l}^\dagger \\
 & \left. - 6\text{tr} Y_{2l+1}^A Y_{B,2l+2}^\dagger Y_{2l+2}^B Y_{A,2l+1}^\dagger Y_{2l}^C Y_{C,2l}^\dagger - 6\text{tr} Y_{2l}^A Y_{B,2l-1}^\dagger Y_{2l-1}^B Y_{A,2l}^\dagger Y_{2l+1}^C Y_{C,2l+1}^\dagger \right],
 \end{aligned}$$

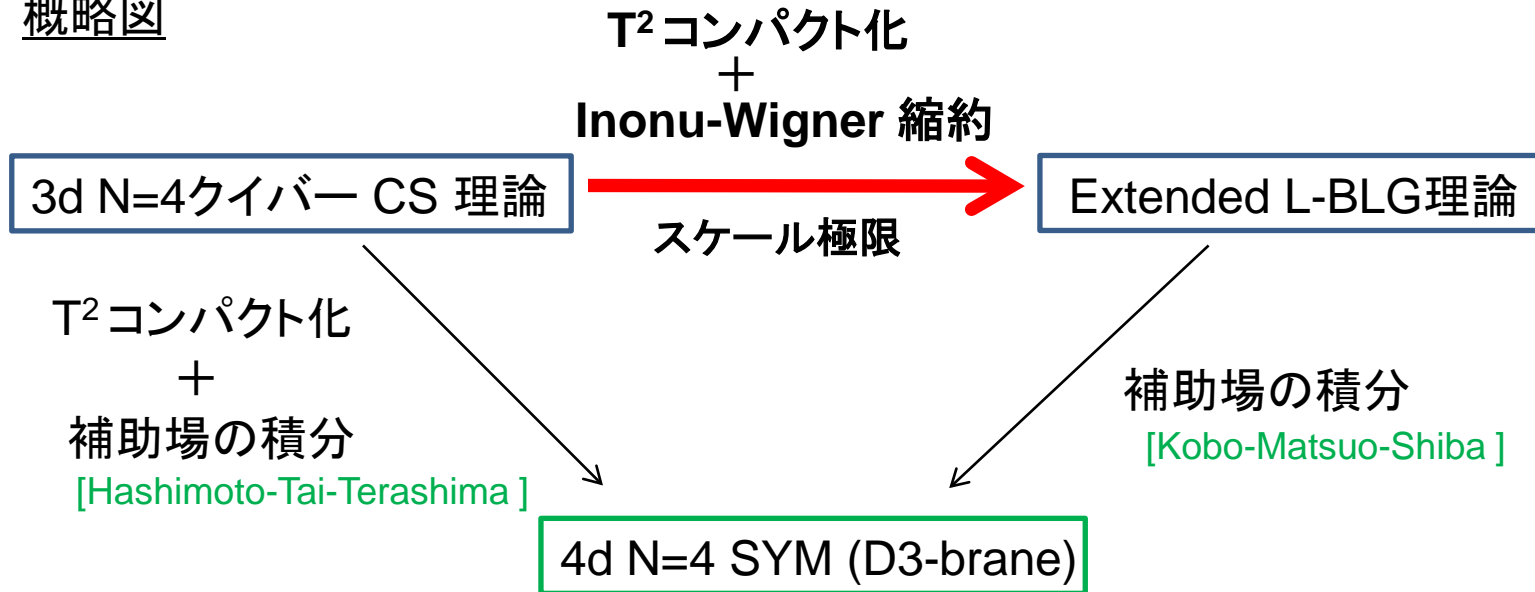
↓ scaling limit

Extended L-BLG potential

$$\begin{aligned}
 & 6g^{ab} m_a m_b X_{\vec{m}}^I P_{\vec{m}}^{IJ} X_{-\vec{m}}^J - i\lambda^{[I0} \lambda_{\vec{m}}^J X_{(i\vec{m})}^{K]} f_i^{jk} \lambda^{[I0} X_{(j\vec{n})}^J X_{(k,-\vec{m}-\vec{n})}^{K]} \\
 & - 3 \left[G^{00} \langle [X^J, X^K]^2 \rangle - 2 \langle [(\vec{\lambda}^0 \cdot X), X^I]^2 \rangle \right]
 \end{aligned}$$

M2-ブレーンからD3-ブレーンへ

概略図



- ・クイバーCS理論のスケール極限をとることでExtended L-BLG理論が現れることがわかった

Extended L-BLG理論の起源

- ・この新たなスケール極限を用いると、Extended L-BLG理論を経由してN=4 SYMを簡単に導出できるという利点がある

N=4 Super Yang-Mills理論の結合定数

クイバー CS 理論から N=4 SYM が得られた

$$L_{gauge} = -\frac{1}{4G^{00}} \int \frac{dy}{2\pi} \sqrt{g^{11}} (F_{\mu\nu}^2 + 2g^{11} F_{\mu 1} F_{\nu 1}) \\ + \frac{G^{01}}{8G^{00}} \int \frac{dy}{2\pi} \sqrt{g^{11}} (4\epsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\mu 1} F_{\nu\lambda}) \quad \leftarrow \theta\text{-term}$$

$$T^2 \text{ metric } G^{AB} = \vec{\lambda}^A \cdot \vec{\lambda}^B \quad (A, B = 0, 1) \quad g^{11} = G^{00}G^{11} - (G^{01})^2$$

複素化した結合定数を $-\frac{1}{8\pi} \int dy \left[\text{Im}(\tau) F^2 + \frac{1}{2} \text{Re}(\tau) F\tilde{F} \right]$ と定義すると、

$$\tau = -\frac{G^{01}}{G^{00}} + i\sqrt{\frac{G^{11}}{G^{00}} - \left(\frac{G^{01}}{G^{00}}\right)^2}$$

▶ 先程のVEVの identification を用いて T^2 のメトリックをクイバー CS の言葉で表す

➡ $G^{11} = -s(s+1)G^{00} + (2s+1)G^{01}$ T^2 コンパクト化に制限がつく

これはN=4SYMの結合定数にどのように反映されるのか？

SL(2,Z) 変換

- ▶ T^2 のメトリックの成分は以下の制限を受けていた

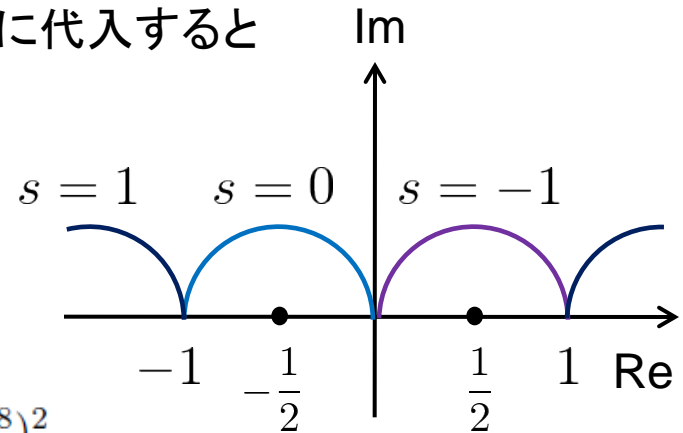
$$G^{11} = -s(s+1)G^{00} + (2s+1)G^{01}$$

これを先の表式 $\tau = -\frac{G^{01}}{G^{00}} + i\sqrt{\frac{G^{11}}{G^{00}} - \left(\frac{G^{01}}{G^{00}}\right)^2}$ に代入すると

→
$$\tau = -\frac{G^{01}}{G^{00}} + i\sqrt{-\left(\frac{G^{01}}{G^{00}} - s\right)\left[\frac{G^{01}}{G^{00}} - (s+1)\right]},$$

実1パラメータ依存

パラメータ:
$$\frac{G^{01}}{G^{00}} = s + \frac{(X_0^2)^2 + (X_0^4)^2 + (X_0^6)^2 + (X_0^8)^2}{(X_0^I)^2}$$



- ▶ s の意味は？

shift $s \rightarrow s - a \quad \rightarrow \quad \tau \rightarrow \tau + a \quad (a \in \mathbb{Z})$

- ▶ これは **ゲージ場(又はクイバーのnode)の線形結合の取り方** と **T-変換** の間に **1対1対応** があることを意味する (Hashimoto-Tai-Terashima '08 の一般化)

再現可能な領域

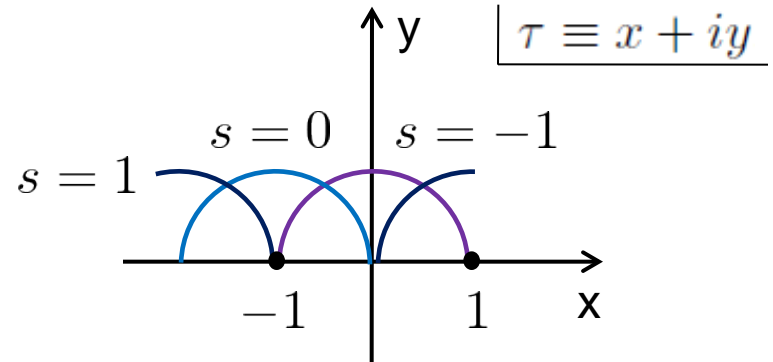
▶ 様々なクイバーCS理論に適用
(Orbifolded ABJM)

結合定数はどの程度再現できるのか?

$\mathcal{N} = 4$
クイバーCS

$$(x + s + 1)^2 + y^2 = 1$$

1パラメータ曲線

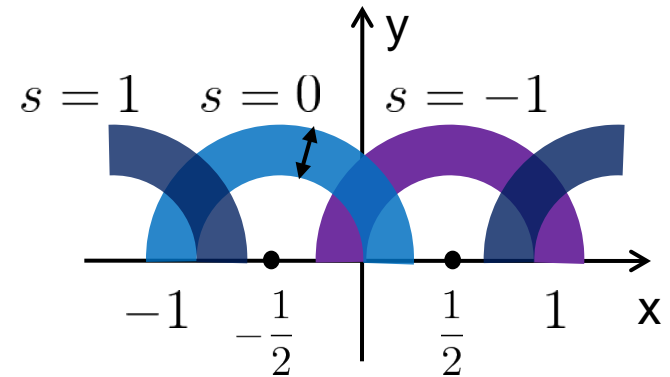


$\mathcal{N} = 2$
クイバーCS

T^2 メトリックへの制限が緩くなった

$$G^{11} = -s(s + 1)G^{00} + (2s + 1)G^{01} + G^{00}A(X_0^I)$$

→
$$\left(x + \frac{2s + 1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} + A$$



2次元的

$\mathcal{N} = 2$ の場合、再現可能な領域が広がった (が、全領域は覆えなかった)

全基本領域の再現はorbifolded ABJM 理論 からのスケーリングだけでは無理! ?

まとめ

- ・ **Extended L-BLG 理論**は**クイバーCS理論**のスケール極限をとることによって得られる
- ・ 3d **N=2** クイバーCS理論に適用した場合、結果として出てくる N=4 SYM の結合定数のパラメタ空間が2次元になり、より広いクラスのD3-ブレーンが再現できることがわかった
- ・ D3-ブレーン上の**T-変換**はM2-ブレーン上のゲージ場 (又はnode) の組み合わせと完全に**1対1対応**する

今後の方向

- ・ $D_p(p>3)$ -ブレーンへの応用？ (BLG側の理解にもつながる)
- ・ **S-変換**のM2-ブレーンの解釈？
- ・ より低いSUSYをもつ4次元理論の導出？
- ・ より一般のM2-ブレーン理論への応用？ (Toric CY4など)

補足1. BLG理論からDp-ブレーンへ ~ bosonic potential ~

$$V(X) = \frac{1}{12} \text{tr}([X^I, X^J, X^K], [X^I, X^J, X^K])$$

Extended Lie 3-algebra

$$[X^I, X^J, X^K]_{(i\vec{m})} = -im_a \lambda^{[I0} \lambda^{Ja} X^K_{(i\vec{m})} + f^{ij}_k \lambda^{[I0} X^J_{(j\vec{n})} X^K_{(i\vec{m})}$$

D2-brane
with KK

$$6g^{ab} m_a m_b X^I_{\vec{m}} P^{IJ}_{\vec{m}} X^J_{-\vec{m}} - i\lambda^{[I0} \lambda^J_{\vec{m}} X^K_{(i\vec{m})} f^{jk}_i \lambda^{[I0} X^J_{(j\vec{n})} X^K_{(k, -\vec{m}-\vec{n})} \\ - 3 \left[G^{00} \langle [X^J, X^K]^2 \rangle - 2 \langle [(\vec{\lambda}^0 \cdot X), X^I]^2 \rangle \right]$$

D(d+2)-brane whose world volume is $\mathbb{R}^{1,2} \times \mathbb{T}^d$

$$L_{pot} = \int \frac{d^d y}{(2\pi)^d} \sqrt{g} \left(-\frac{1}{2} g^{ab} \hat{D}_a \tilde{X}^I P^{IJ} \hat{D}_b \tilde{X}^J - \frac{1}{4G^{00}} g^{ac} g^{bd} \tilde{F}_{ab} \tilde{F}_{cd} \right. \\ \left. + \frac{G^{00}}{4} [P^{IK} \tilde{X}^K, P^{JL} \tilde{X}^L]^2 \right) \quad \leftarrow \text{kinetic terms in fiber direction}$$

$$\tilde{\Phi}(x, y) := \sum_{\vec{m}} \Phi_{\vec{m}}(x) e^{i\vec{m}\vec{y}} \quad (y^a \in [0, 2\pi], a = 1, \dots, d)$$

▶ We consider d=1 case → D3-brane (M2 on torus)

補足2. ゲージ構造の比較

Gauge tr. of bifundamental matter field $X \rightarrow U_L X U_R^\dagger$

linear combination of generators $T = T_L + T_R$, $S = T_L - T_R$

$$[T^i, T^j] = i f^{ij}_k T^k \quad , \quad [T^i, S^j] = i f^{ij}_k S^k \quad , \quad [S^i, S^j] = i f^{ij}_k T^k$$



$$S^i \rightarrow \frac{1}{\lambda} S^i \quad , \quad \lambda \rightarrow 0 \quad \text{Inönü-Wigner contraction}$$

$$[T^i, T^j] = i f^{ij}_k T^k \quad , \quad [T^i, S^j] = i f^{ij}_k S^k \quad , \quad [S^i, S^j] = 0$$

SU(N) \times trans.

(in N=2, ISO(3))

► Gauge structure of L-BLG

$$T^a = \{v_0, u_0, T^i\}$$

$$[u_0, T^i, T^j] = f^{ij}_k T^k$$

$$[T^i, T^j, T^k] = f^{ijk} v_0$$

v_0 : center

u_0 : identity

T^i : Lie algebra

$$\tilde{T}^{ab} X = [T^a, T^b, X]$$

$$[\tilde{T}^{0i}, \tilde{T}^{0j}] = i f^{ij}_k \tilde{T}^{0k} ,$$

$$[\tilde{T}^{0i}, S^j] = i f^{ij}_k S^k ,$$

$$[S^i, S^j] = 0$$

$$S^i \equiv f^i_{jk} \tilde{T}^{jk}$$

補足3. トーラスコンパクト化

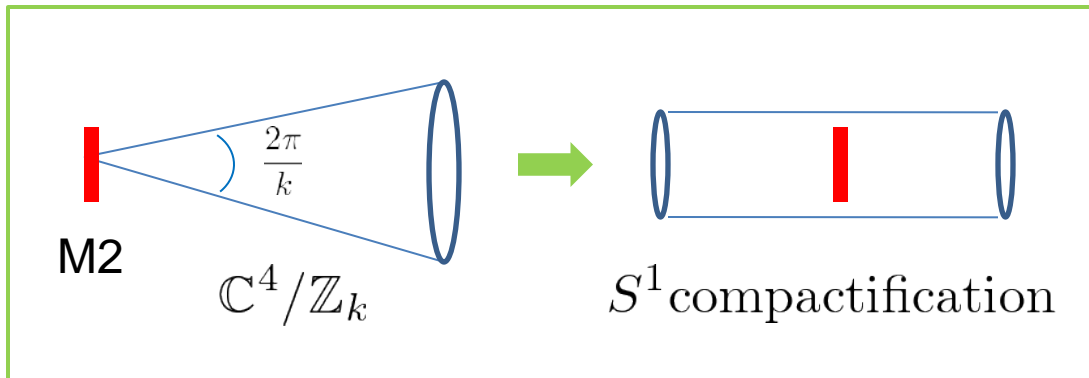
Moduli space $\mathbb{C}^4 / (\mathbb{Z}_{nk} \times \mathbb{Z}_n)$ [Terashima-Yagi] [Imamura-Kimura]
 [Benna-Klebanov-Klose-Smedback]

$$\mathbb{Z}_{nk} : (y^1, y^2, y^3, y^4) = (e^{\frac{2\pi i}{nk}} y^1, e^{\frac{2\pi i}{nk}} y^2, e^{\frac{2\pi i}{nk}} y^3, e^{\frac{2\pi i}{nk}} y^4)$$

$$\mathbb{Z}_n : (y^1, y^2, y^3, y^4) = (e^{\frac{2\pi i}{n}} y^1, y^2, e^{\frac{2\pi i}{n}} y^3, y^4)$$

► By taking $n \rightarrow \infty$, two discrete identifications become two circle identifications

➡ T^2 compactification?



in 2 directions
 +
 Inönü-Wigner contraction

補足4. ポテンシャル項のスケール極限の概要

Decomposition $Y_l^A = Y_{0,l}^A + \hat{Y}_l^A$

→ $V_{bos} = \sum_{s=0}^6 V_{bos}^{(s)}$ $V_{bos}^{(s)}$ contains s Y_0 and $6 - s$ \hat{Y}

$V_{bos}^{(6)}, V_{bos}^{(5)}$: identically zero

$V_{bos}^{(s)}$ scales as $n^{\frac{s}{2} - \frac{6-s}{2} + 1} = n^{s-2}$

↓
 $V_{bos}^{(0)}, V_{bos}^{(1)}$ vanishes in the scaling limit

remaining terms : $V_{bos}^{(2)}, V_{bos}^{(3)}, V_{bos}^{(4)}$

↓ scaling limit

$$\begin{aligned} Y_{0,2l}^A &\rightarrow \sqrt{\frac{n}{2}} Y_0^{2A} \\ Y_{0,2l-1}^A &\rightarrow \sqrt{\frac{n}{2}} Y_0^{2A-1} \\ \hat{Y}_{2l}^A &\rightarrow \frac{q^{lm}}{\sqrt{n}} \frac{Y_m^{2A}}{\sqrt{2}} \\ \hat{Y}_{2l-1}^A &\rightarrow \frac{q^{lm}}{\sqrt{n}} \frac{Y_m^{2A-1}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\sum_l \frac{q^{lm}}{n} = \delta_{m,0}$$

Extended L-BLG potential

$$\begin{aligned} &6g^{ab} m_a m_b X_{\vec{m}}^I P_{\vec{m}}^{IJ} X_{-\vec{m}}^J - i\lambda^{[I0} \lambda_{\vec{m}}^J X_{(i\vec{m})}^{K]} f^{jk} i\lambda^{[I0} X_{(j\vec{n})}^J X_{(k,-\vec{m}-\vec{n})}^{K]} \\ &- 3 \left[G^{00} \langle [X^J, X^K]^2 \rangle - 2 \langle [(\vec{\lambda}^0 \cdot X), X^I]^2 \rangle \right] \end{aligned}$$

補足5. 様々なクイバーCS理論

- ▶ By orbifolding the ABJM, we can obtain infinitely many Quiver CS theories

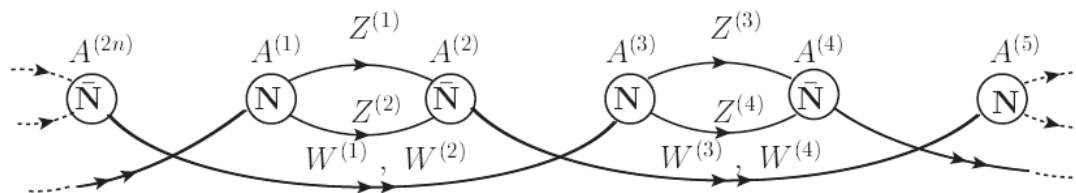
Classification(remaining SUSY, global symm.) is given by Terashima&Yagi

Consider Abelian orbifold $y^A \rightarrow e^{2\pi i/n_A} y^A$ ($A = 1, 2, 3, 4$)

and parametrize as (n_1, n_2, n_3, n_4)

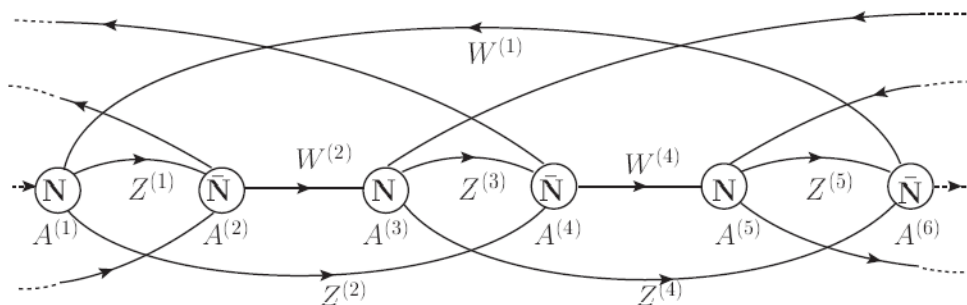
$(n, n, -n, -n)$

$\mathcal{N} = 4$



$(n, -n, \infty, \infty), (2n, 2n, n, \infty), (6n, 3n, 2n, \infty), \dots$

$\mathcal{N} = 2$



$(6n, 3n, 2n, \infty)$