

Model of M-theory
with
Eleven Matrices

JHEP 07 (2010) 026

佐藤 松夫 (弘前大学)

弦理論の非摂動論的定式化

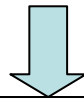
アプローチ

- 行列模型 ← 今回の話
- AdS/CFT
- 弦の場の理論
- ⋮

BFSS行列理論

Banks-Fischler-Shenker-Susskind(1997)

- M理論のIMF極限を表すと考えられている模型
- 空間を表す9つの行列と時間しか持たない。
- 11番目の方向のダイナミクスを扱うことが困難
ex. 11番目の方向の運動量のやり取りをするD0ブレーンの散乱を記述する方法が知られていない。



11個すべての時空座標に対応する変数を持った模型が必要

M理論の進展: 3-algebra

- 新しい3次元超共型場の理論の発見

J. Bagger, N. Lambert (2006, 2007), A. Gustavsson (2007)

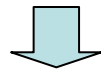
- (N枚重なった) membraneの有効作用の発見

ABJM模型 O. Aharony, O. Bergman, D. L. Jafferis, J. Maldacena (2008)

N=6BLG模型 J. Bagger, N. Lambert (2008)

(Hermitian)3-algebraの構造を持つ

$$[A, B; C] = AC^\dagger B - BC^\dagger A$$

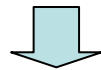


3-algebraに基づいたM理論の非摂動論的定式化を期待

Y. Honma, S. Iso, Y. Sumitomo, S. Zhang(2008),

Y. Matsuo(2008, 2010)

M. Sato (2009)



今回の研究:これを実現

BFSS行列理論の“導出”

ひとつの導き方 deWitt-Hoppe-Nicolai(1988)
Banks-Fischler-Shenker-Susskind(1997)

light-coneゲージの一体のmembrane作用

$$S = T \int d\tau d^2\sigma \left(\frac{1}{2} (D_0 X^i)^2 - \frac{1}{4} \{X^i, X^j\}^2 + \frac{i}{2} \bar{\psi} \Gamma^0 D_0 \psi + \frac{1}{2} \bar{\psi} \Gamma^i \{X_i, \psi\} \right)$$

ポアソン括弧とsymmetric bi-linear form で書けている
(Area Preserving Diffeomorphismで不変)

BFSS行列理論

↓ 第二量子化

$$\left\{ \begin{array}{l} \{ \quad , \quad \} \rightarrow [\quad , \quad] \\ \int d^2\sigma \rightarrow \text{Tr} \end{array} \right.$$

$$S = T \int d\tau \text{Tr} \left(\frac{1}{2} (D_0 X^i)^2 - \frac{1}{4} [X^i, X^j]^2 + \frac{i}{2} \bar{\psi} \Gamma^0 D_0 \psi + \frac{1}{2} \bar{\psi} \Gamma^i [X_i, \psi] \right)$$

多体系の理論

* IIB行列模型も同じ手続きでSchildゲージの一体のIIB superstring作用から得られる

VPD不変作用

M.Sato (2010)

VPD不変作用

$$S_{cl} = \int d^3\sigma \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{12} \{X^I, X^J, X^K\}^2 - \frac{1}{2} (A_{\mu ab} \{\varphi^a, \varphi^b, X^I\})^2 \right. \\ \left. - \frac{1}{3} E^{\mu\nu\lambda} A_{\mu ab} A_{\nu cd} A_{\lambda ef} \{\varphi^a, \varphi^c, \varphi^d\} \{\varphi^b, \varphi^e, \varphi^f\} + \frac{1}{2} \Lambda \right. \\ \left. - \frac{i}{2} \bar{\Psi} \Gamma^\mu A_{\mu ab} \{\varphi^a, \varphi^b, \psi\} + \frac{i}{4} \bar{\psi} \Gamma_{IJ} \{X^I, X^J, \psi\} \right)$$

I, J, K = 3, ..., 10

$\{\varphi^a, \varphi^b, \varphi^c\} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha \varphi^a \partial_\beta \varphi^b \partial_\gamma \varphi^c$: 南部ポアソン括弧

φ^a : 3次元時空上の関数の完全系

この作用は南部ポアソン括弧とbilinear symmetric formのみで書けている
(metric がflat でもVolume Preserving Diffeomorphism で不変)

超対称性

VPD不変作用は32個の超対称性を持つ

16 dynamical SUSY

$$\delta\psi = -\frac{1}{6}\{X^I, X^J, X^K\}\Gamma_{IJK}\epsilon$$

$$\delta X^I = i\bar{\epsilon}\Gamma^I\psi$$

$$\delta A_{ab}^\mu\{\varphi^a, \varphi^b, \quad\} = i\bar{\epsilon}\Gamma^\mu\Gamma^I\{X_I, \psi, \quad\}$$

16 kinematical SUSY

$$\tilde{\delta}\psi = \tilde{\epsilon}$$

$$\tilde{\delta}X^I = 0$$

$$\tilde{\delta}A_{ab}^\mu = 0$$

SUSY代数 (up to gauge transformation)

$$[\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2]\psi = 0$$

$$[\tilde{\delta}_1, \delta_2]\psi = 0$$

$$[\delta_1, \delta_2]\psi = 0$$

$$[\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2]X^I = 0$$

$$[\tilde{\delta}_1, \delta_2]X^I = i\bar{\epsilon}_2\Gamma^I\tilde{\epsilon}_1$$

$$[\delta_1, \delta_2]X^I = 0$$

$$[\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2]A_{ab}^\mu = 0$$

$$[\tilde{\delta}_1, \delta_2]A_{ab}^\mu = 0$$

$$[\delta_1, \delta_2]A_{ab}^\mu = 0$$

* X^μ は ψ 、 X^I 、 A^μ の複合場

11次元座標の意味で $Q^2=P$



M理論のN=1 SUSY

semi-light-cone supermembrane

semi-light-coneゲージ (κ symmetry だけを固定)

$$\Gamma^{012}\psi = -\psi$$

での一体のmembrane作用

$$S_{M2} = \int d^3\sigma \left(\sqrt{-G} + \frac{i}{4} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} (\bar{\psi} \Gamma_{\mu\nu} \partial_\alpha \psi (\Pi_\beta^\mu \Pi_\gamma^\nu + \frac{i}{2} \Pi_\beta^\mu \bar{\psi} \Gamma^\nu \partial_\gamma \psi - \frac{1}{12} \bar{\psi} \Gamma^\mu \partial_\beta \psi \bar{\psi} \Gamma^\nu \partial_\gamma \psi) + \bar{\psi} \Gamma_{IJ} \partial_\alpha \psi \partial_\beta X^I \partial_\gamma X^J) \right)$$

$$\text{ここで } G_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + \Pi_\alpha^\mu \Pi_{\beta\mu} \quad (h_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^I \partial_\beta X_I, \quad \Pi_\alpha^\mu = \partial_\alpha X^\mu - \frac{i}{2} \bar{\psi} \Gamma^\mu \partial_\alpha \psi)$$

に $\partial_\alpha X^\mu$ と $\partial_\alpha \psi$ ($\alpha=0,1,2$ $\mu=0,1,2$) が二次までの近似 (X^I についてはexact)をとると

$$\tilde{S}_{M2} = \int d^3\sigma \sqrt{-h} (1 + h^{\alpha\beta} \Pi_\alpha^\mu \Pi_{\beta\mu}) + \frac{i}{4} \bar{\psi} \Gamma_{IJ} E^{\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha X^I \partial_\beta X^J \partial_\gamma \psi$$

対応する近似

これはVPD不変作用で A^μ_{ab} の2次までの近似をしたものと等価

* 近似は証明のための技術的なものであり、VPD不変作用がsemi-light-cone supermembraneそのものであることが期待される → 現在研究中

SO(8) triality とSU(4)分解

VPD不変作用を

$$X^I \rightarrow X^\alpha \sim \tilde{X}^\alpha = \begin{pmatrix} Z^A \\ Z_A \end{pmatrix} \quad \alpha=1,\dots,8 \quad A=1,\dots,4$$

triality unitary trans. $(Z_A)^* = Z^A$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \psi_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad \psi_\alpha = \begin{pmatrix} \psi^A \\ \psi_A \end{pmatrix} \quad (\psi_A)^* = \psi^A$$

で書き換えると

$$S_{cl} = \int d^3\sigma \sqrt{-g} \left(-V - A_{\mu ba} \{Z^A, T^a, T^b\} A_{dc}^\mu \{Z_A, T^c, T^d\} \right. \\ \left. + \frac{1}{3} E^{\mu\nu\lambda} A_{\mu ba} A_{\nu dc} A_{\lambda fe} \{T^a, T^c, T^d\} \{T^b, T^f, T^e\} \right. \\ \left. + i\bar{\psi}^A \Gamma^\mu A_{\mu ba} \{\psi_A, T^a, T^b\} \right. \\ \left. + \frac{i}{2} E_{ABCD} \bar{\psi}^A \{Z^C, Z^D, \psi^B\} - \frac{i}{2} E^{ABCD} Z_D \{\bar{\psi}_A, \psi_B, Z_C\} \right. \\ \left. - i\bar{\psi}^A \{\psi_A, Z^B, Z_B\} + 2i\bar{\psi}^A \{\psi_B, Z^B, Z_A\} \right)$$

を得る ここで

$$V = \frac{2}{3} \Upsilon_B^{CD} \Upsilon_{CD}^B$$

$$\Upsilon_B^{CD} = \{Z^C, Z^D, Z_B\} - \frac{1}{2} \delta_B^C \{Z^E, Z^D, Z_E\} + \frac{1}{2} \delta_B^D \{Z^E, Z^C, Z_E\}$$

M理論の3代数模型

第二量子化 $\left\{ \begin{array}{l} \int d^3\sigma \sqrt{-g} \rightarrow \langle \quad \rangle \\ \{\varphi^a, \varphi^b, \varphi^c\} \rightarrow [T^a, T^b; \bar{T}^{\bar{c}}] \end{array} \right.$ Hermitian 3-algebra

$$S = \left\langle -V - A_{\mu\bar{b}a}[Z^A, T^a; \bar{T}^{\bar{b}}] \overline{A_{\bar{d}c}^\mu[Z_A, T^c; \bar{T}^{\bar{d}}]} + \frac{1}{3} E^{\mu\nu\lambda} A_{\mu\bar{b}a} A_{\nu\bar{d}c} A_{\lambda\bar{f}e} [T^a, T^c; \bar{T}^{\bar{d}}] [\overline{T^b, T^f; \bar{T}^{\bar{e}}}] \right. \\ \left. + i\bar{\psi}^A \Gamma^\mu A_{\mu\bar{b}a} [\psi_A, T^a; \bar{T}^{\bar{b}}] + \frac{i}{2} E_{ABCD} \bar{\psi}^A [Z^C, Z^D; \bar{\psi}^B] - \frac{i}{2} E^{ABCD} \bar{Z}_D [\bar{\psi}_A, \psi_B; \bar{Z}_C] \right. \\ \left. - i\bar{\psi}^A [\psi_A, Z^B; \bar{Z}_B] + 2i\bar{\psi}^A [\psi_B, Z^B; \bar{Z}_A] \right\rangle$$

ここで $V = \frac{2}{3} \Upsilon_B^{CD} \bar{\Upsilon}_{CD}^B$

$$\Upsilon_B^{CD} = [Z^C, Z^D; \bar{Z}_B] - \frac{1}{2} \delta_B^C [Z^E, Z^D; \bar{Z}_E] + \frac{1}{2} \delta_B^D [Z^E, Z^C; \bar{Z}_E]$$

0次元の場の理論であり、経路積分で定義される

* IIB行列模型と同じ
解析手法が使える

M理論のDLCQ極限

L. Susskind (1997) A. Sen (1997)
N. Seiberg (1997) J. Polchinski (1999)

- M理論のDLCQ極限は有限の行列サイズを持ったBFSS行列模型で記述される
- p 次元トーラスコンパクト化したM理論のDLCQ極限は $(p+1)$ 次元最大超対称ヤンミルズ理論で記述され、M理論の基本的物体であるM2ブレーン、M5ブレーン、重力子も記述される

これらの事実を再現することはM理論の模型が満たすべき重要な判断基準

3代数模型のDLCQ極限

具体的な解析のため、N枚重なったM2ブレーンの有効作用と同じ3-algebraを採用

$$[T^a, T^b; \bar{T}^{\bar{c}}] = 2\pi(T^a T^{\dagger\bar{c}} T^b - T^b T^{\dagger\bar{c}} T^a) \quad T^a: N \times N \text{複素行列}$$

$$\langle \rangle = \text{Tr}$$

$$\Downarrow \left(\begin{array}{l} A_\mu \equiv -\frac{i}{4\pi} A_{\mu\bar{b}a} (T^a T^{\dagger\bar{b}} + T^{\dagger\bar{b}} T^a) \\ B_\mu \equiv -\frac{i}{4\pi} A_{\mu\bar{b}a} (T^a T^{\dagger\bar{b}} - T^{\dagger\bar{b}} T^a) \end{array} \right. \text{Hermite行列} \left. \right)$$

$$S = \text{Tr} \left(-V + ([A_\mu, Z^A] + \{B_\mu, Z^A\})([A^\mu, Z_A] - \{B^\mu, Z_A\}) + iE^{\mu\nu\lambda} \left(\frac{2}{3} B_\mu B_\nu B_\lambda + 2A_\mu A_\nu B_\lambda \right) \right. \\ \left. + \bar{\psi}^A \Gamma^\mu ([A_\mu, \psi_A] + \{B_\mu, \psi_A\}) + iE_{ABCD} \bar{\psi}^A Z^C \psi^{\dagger B} Z^D - iE^{ABCD} Z_D^\dagger \bar{\psi}^{\dagger A} Z_C^\dagger \psi_B \right. \\ \left. - i\bar{\psi}^A \psi_A Z_B^\dagger Z^B + i\bar{\psi}^A Z^B Z_B^\dagger \psi_A + 2i\bar{\psi}^A \psi_B Z_A^\dagger Z^B - 2i\bar{\psi}^A Z^B Z_A^\dagger \psi_B \right)$$

$$V = \frac{1}{3} Z_A^\dagger Z^A Z_B^\dagger Z^B Z_C^\dagger Z^C + \frac{1}{3} Z^A Z_A^\dagger Z^B Z_B^\dagger Z^C Z_C^\dagger + \frac{4}{3} Z_A^\dagger Z^B Z_C^\dagger Z^A Z_B^\dagger Z^C \\ - Z_A^\dagger Z^A Z_B^\dagger Z^C Z_C^\dagger Z^B - Z^A Z_A^\dagger Z^B Z_C^\dagger Z^C Z_B^\dagger$$

* この作用は形式的にはチャーンサイモンレベル1 のABJM模型を次元還元しても得られる

* 超対称性については現在研究中

Cf チャーンサイモンレベル1 のABJM模型 = flat 11次元時空中のmembrane
だが、並進対称性が明白でない

時空座標の同定

このモデルには時空に関し、 $SO(1,2) \times SU(4) \times U(1)$ のisometryのみを持つ



時空座標の同定を行う必要がある。

$$A^\mu \rightarrow X^\mu \quad (\text{通常 of 行列模型と同じ } u(1) \text{ 部分が時空座標})$$

$$Z^A \rightarrow i\hat{X}^{A+2} - \hat{X}^{A+6} \quad (\hat{X}^I = X^I - ix^I \mathbf{1}) \quad I=3, \dots, 10$$

ブレーン、粒子の位置を表す $su(N)$ Hermite 行列 時空座標

* B^μ は補助場

* A^μ 、 Z^A の固有値からこの辞書で時空座標を読み取る

DLCQ極限

1. light-cone compact 化

$$\begin{cases} \hat{X}^- - i(2\pi R)\mathbf{1} = U^\dagger \hat{X}^- U \\ Y = U^\dagger Y U \end{cases} \quad \begin{array}{l} U: \text{ユニタリ一行列} \\ Y: X^- \text{以外の場} \end{array}$$

2. IMF極限 (光の速さに近づく速度で X^{10} 方向にLorentz boost)

$$\hat{X}^+ \rightarrow \frac{1}{T} \hat{X}^+ \quad T \rightarrow \infty$$

$$\hat{X}^- \rightarrow T \hat{X}^-$$

* 補助場 B^μ については運動方程式を解く。



我々の模型は有限行列サイズのBFSS行列模型に帰着

$$S = T \int d\tau \text{Tr} \left(\frac{1}{2} (D_0 X^i)^2 - \frac{1}{4} [X^i, X^j]^2 + \frac{i}{2} \bar{\psi} \Gamma^0 D_0 \psi + \frac{1}{2} \bar{\psi} \Gamma^i [X_i, \psi] \right)$$

* T^p コンパクト化した模型はDLCQ極限で $(p+1)$ 次元最大超対称ヤンミルズ理論に帰着

結論

M理論の3代数模型を提唱した。

- 時空座標を表す11個の行列を持つ。
- DLCQ極限で有限行列サイズのBFSS行列模型に帰着。T^pコンパクト化した模型のDLCQ極限では(p+1)次元最大超対称ヤンミルズ理論に帰着。
(DLCQ極限ではM2,M5ブレーン、重力子を含む。)



3代数模型が正しい物理的自由度を持つことを示唆。

- 一体のsemi-light-coneゲージにおけるsupermembrane作用(とある近似で一致する作用)の第二量子化で得られる。第二量子化は南部ポアソン括弧をHermitian 3-algebraのbracketで置き換えることで定義される。
- 形式的にはチャーンサイモンレベルが1のN=6BLG模型(N=8になっている)(有効作用と同じ代数をとるとABJM模型)の次元還元で得られる。これらの対応は一部の議論には有効(超対称性など)だが、完全な対応ではない。

cf. AdS/CFTのN=4SYM、BFSS行列模型、IIB行列模型の関係と同じ。

これらは異なる理論で解釈も異なる。

* 完全反対称3-algebraで第二量子化するとN=8BLG模型の次元還元で形式的に得られるものと同じ模型を得る。

M理論の構成論的定式化としての位置づけ

現在も11次元共変なM理論の行列模型は構成されていない。

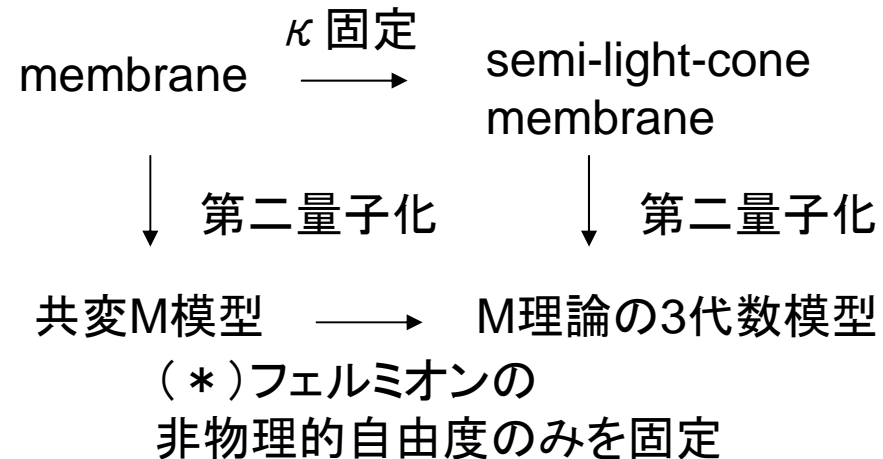
11次元のN=1超空間を表す11個のボゾン行列と32個のフェルミオン行列を持つ
物理的自由度はボゾン8、フェルミオン16

よってフェルミオンの自由度を半分に減らす対称性が存在（*）
（supermembraneの κ symmetryに対応）

固定

M理論の3代数模型

* 11個のボゾン行列と
16個のフェルミオン行列を持つ



M理論の3代数模型からM理論のすべての物理量が計算可能であることが期待される

Appendix

$$A_\mu(\sigma, \sigma') = A_{\mu ab} \varphi^a(\sigma) \varphi^b(\sigma')$$

$$A_\mu(\sigma, \sigma') = \partial'_\alpha A_\mu(\sigma, \sigma')|_{\sigma'=\sigma} (\sigma'^\alpha - \sigma^\alpha) + \frac{1}{2} \partial'_\alpha \partial'_\beta A_\mu(\sigma, \sigma')|_{\sigma'=\sigma} (\sigma'^\alpha - \sigma^\alpha) (\sigma'^\beta - \sigma^\beta) + \dots$$

$$A_{\mu ab} \partial_\alpha \varphi^a \partial_\beta \varphi^b$$

$$a_{\mu\alpha} \equiv \partial'_\alpha A_\mu(\sigma, \sigma')|_{\sigma'=\sigma} = A_{\mu ab} \varphi^a \partial_\alpha \varphi^b$$

$$A_{\mu ab} \partial_\alpha \varphi^a \partial_\beta \varphi^b = \frac{1}{2} (\partial_\alpha a_{\mu\beta} - \partial_\beta a_{\mu\alpha}) = \frac{1}{2} F_{\mu\alpha\beta}$$

$$\int d^3\sigma \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} X^\mu \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha F_{\mu\beta\gamma} \right)$$

$$F_{\mu\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A_\mu{}^\gamma$$

$$A_\mu{}^\alpha = -h^{\alpha\beta} \Pi_{\beta\mu},$$

$$\Pi_\alpha{}^\mu = \partial_\alpha X^\mu - \frac{i}{2} \bar{\psi} \Gamma^\mu \partial_\alpha \psi \quad h_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^I \partial_\beta X_I \quad h^{\alpha\beta}$$

$$S_{M2} = \int d^3\sigma \left(\sqrt{-G} + \frac{i}{4} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} (\bar{\psi} \Gamma_{\mu\nu} \partial_\alpha \psi (\Pi_\beta{}^\mu \Pi_\gamma{}^\nu + \frac{i}{2} \Pi_\beta{}^\mu \bar{\psi} \Gamma^\nu \partial_\gamma \psi) - \frac{1}{12} \bar{\psi} \Gamma^\mu \partial_\beta \psi \bar{\psi} \Gamma^\nu \partial_\gamma \psi) + \bar{\psi} \Gamma_{IJ} \partial_\alpha \psi \partial_\beta X^I \partial_\gamma X^J \right)$$