Model of M-theory with Eleven Matrices

JHEP 07 (2010) 026

佐藤 松夫 (弘前大学)

弦理論の非摂動論的定式化

アプローチ

- 行列模型 ⟵ 今回の話
- AdS/CFT
- 弦の場の理論

⋮

BFSS行列理論

Banks-Fischler-Shenker-Susskind(1997)

- M理論のIMF極限を表すと考えられている模型
- 空間を表す9つの行列と時間しか持たない。
- 11番目の方向のダイナミクスを扱うことが困難

ex. 11番目の方向の運動量のやり取りをするD0ブレーンの散乱を記述する方法が知られていない。

↓

11個すべての時空座標に対応する変数を持った模型が必要

M理論の進展:3-algebra

- 新しい3次元超共型場の理論の発見

J. Bagger, N. Lambert (2006, 2007), A. Gustavsson (2007)

- （N枚重なった）membraneの有効作用の発見

ABJM模型 O. Aharony, O. Bergman, D. L. Jafferis, J. Maldacena (2008)
N=6BLG模型 J. Bagger, N. Lambert (2008)

（Hermitian)3-algebraの構造を持つ

$$[A, B; C] = AC^\dagger B - BC^\dagger A$$

⇩

3-algebraに基づいたM理論の非摂動論的定式化を期待

Y. Honma, S. Iso, Y. Sumitomo, S. Zhang(2008),
Y. Matsuo(2008, 2010)
M. Sato (2009)

⇩

今回の研究:これを実現

BFSS行列理論の“導出”

ひとつの導き方　deWitt-Hoppe-Nicolai(1988)
Banks-Fischler-Shenker-Susskind(1997)

light-coneゲージの一体のmembrane作用

$$S = T\int d\tau d^2\sigma \left(\frac{1}{2}(D_0X^i)^2 - \frac{1}{4}\{X^i, X^j\}^2 + \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^0 D_0\psi + \frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma^i\{X_i, \psi\}\right)$$

ポアソン括弧とsymmetric bi-linear form で書けている
（Area Preserving Diffeomorphismで不変）

第二量子化

$$\begin{cases} \{\quad,\quad\} \to [\quad,\quad] \\ \int d^2\sigma \to \mathrm{Tr} \end{cases}$$

BFSS行列理論

$$S = T\int d\tau \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}(D_0X^i)^2 - \frac{1}{4}[X^i, X^j]^2 + \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^0 D_0\psi + \frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma^i[X_i, \psi]\right)$$

多体系の理論

＊IIB行列模型も同じ手続きでSchildゲージの一体のIIB superstring作用から得られる

VPD不変作用

M.Sato (2010)

VPD不変作用

$$S_{cl} = \int d^3\sigma \sqrt{-g}\Big(-\frac{1}{12}\{X^I, X^J, X^K\}^2 - \frac{1}{2}(A_{\mu ab}\{\varphi^a, \varphi^b, X^I\})^2$$
$$-\frac{1}{3}E^{\mu\nu\lambda}A_{\mu ab}A_{\nu cd}A_{\lambda ef}\{\varphi^a, \varphi^c, \varphi^d\}\{\varphi^b, \varphi^e, \varphi^f\} + \frac{1}{2}\Lambda$$
$$-\frac{i}{2}\bar{\Psi}\Gamma^\mu A_{\mu ab}\{\varphi^a, \varphi^b, \psi\} + \frac{i}{4}\bar{\psi}\Gamma_{IJ}\{X^I, X^J, \psi\}\Big)$$

I,J,K=3, …10

$\{\varphi^a, \varphi^b, \varphi^c\} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha\varphi^a\partial_\beta\varphi^b\partial_\gamma\varphi^c$ ： 南部ポアソン括弧

φ^a ： 3次元時空上の関数の完全系

この作用は南部ポアソン括弧とbilinear symmetric formのみで書けている
（metric がflat でもVolume Preserving Diffeomorphism で不変）

超対称性

VPD不変作用は32個の超対称性を持つ

16 dynamical SUSY

$$\delta\psi = -\frac{1}{6}\{X^I, X^J, X^K\}\Gamma_{IJK}\epsilon$$

$$\delta X^I = i\bar{\epsilon}\Gamma^I\psi$$

$$\delta A^\mu_{ab}\{\varphi^a, \varphi^b, \quad\} = i\bar{\epsilon}\Gamma^\mu\Gamma^I\{X_I, \psi, \quad\}$$

16 kinematical SUSY

$$\tilde{\delta}\psi = \tilde{\epsilon}$$

$$\tilde{\delta}X^I = 0$$

$$\tilde{\delta}A^\mu_{ab} = 0$$

SUSY代数　（up to gauge transformation）

$$[\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2]\psi = 0$$

$$[\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2]X^I = 0$$

$$[\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2]A^\mu_{ab} = 0$$

$$[\tilde{\delta}_1, \delta_2]\psi = 0$$

$$[\tilde{\delta}_1, \delta_2]X^I = i\bar{\epsilon_2}\Gamma^I\tilde{\epsilon}_1$$

$$[\tilde{\delta}_1, \delta_2]A^\mu_{ab} = 0$$

$$[\delta_1, \delta_2]\psi = 0$$

$$[\delta_1, \delta_2]X^I = 0$$

$$[\delta_1, \delta_2]A^\mu_{ab} = 0$$

＊X^μはψ、X^I、A^μの複合場

11次元座標の意味で　$Q^2=P$　$\Longrightarrow$　M理論のN=1 SUSY

semi-light-cone supermembrane

semi-light-coneゲージ (κ symmetry だけを固定）

$$\Gamma^{012}\psi = -\psi$$

での一体のmembrane作用

$$S_{M2} = \int d^3\sigma \Big(\sqrt{-G} + \frac{i}{4}\epsilon^{\alpha\beta\gamma} \big(\bar{\psi}\Gamma_{\mu\nu}\partial_\alpha\psi (\Pi_\beta{}^\mu \Pi_\gamma{}^\nu + \frac{i}{2}\Pi_\beta{}^\mu \bar{\psi}\Gamma^\nu\partial_\gamma\psi - \frac{1}{12}\bar{\psi}\Gamma^\mu\partial_\beta\psi\bar{\psi}\Gamma^\nu\partial_\gamma\psi) + \bar{\psi}\Gamma_{IJ}\partial_\alpha\psi\partial_\beta X^I \partial_\gamma X^J \big) \Big)$$

ここで $G_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + \Pi_\alpha{}^\mu \Pi_{\beta\mu} \quad (h_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^I \partial_\beta X_I, \quad \Pi_\alpha^\mu = \partial_\alpha X^\mu - \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^\mu\partial_\alpha\psi)$

に $\underline{\partial_\alpha X^\mu \text{ と } \partial_\alpha\psi \text{（}\alpha\text{=0,1,2 }\ \mu\text{=0,1,2) が二次までの近似}}$ （X^Iについてはexact)をとると

$$\tilde{S}_{M2} = \int d^3\sigma \sqrt{-h}(1 + h^{\alpha\beta}\Pi_\alpha{}^\mu \Pi_{\beta\mu}) + \frac{i}{4}\bar{\psi}\Gamma_{IJ}E^{\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha X^I \partial_\beta X^J \partial_\gamma\psi$$

対応する近似

これはVPD不変作用で$A^\mu{}_{ab}$の2次までの近似をしたものと等価

＊近似は証明のための技術的なものであり、VPD不変作用がsemi-light-cone supermembraneそのものであることが期待される → 現在研究中

SO(8) triality とSU(4)分解

VPD不変作用を

$$X^I \to X^\alpha \sim \tilde{X}^\alpha = \begin{pmatrix} Z^A \\ Z_A \end{pmatrix}$$

triality unitary trans.

α=1,…8 A=1,…4

$(Z_A)^* = Z^A$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \psi_{\dot\alpha} \end{pmatrix} \quad \psi_\alpha = \begin{pmatrix} \psi^A \\ \psi_A \end{pmatrix} \quad (\psi_A)^* = \psi^A$$

で書き換えると

$$\begin{aligned} S_{cl} = \int d^3\sigma\sqrt{-g}\Big(& -V - A_{\mu ba}\{Z^A, T^a, T^b\}A^\mu_{dc}\{Z_A, T^c, T^d\} \\ & + \frac{1}{3}E^{\mu\nu\lambda}A_{\mu ba}A_{\nu dc}A_{\lambda fe}\{T^a, T^c, T^d\}\{T^b, T^f, T^e\} \\ & + i\bar\psi^A\Gamma^\mu A_{\mu ba}\{\psi_A, T^a, T^b\} \\ & + \frac{i}{2}E_{ABCD}\bar\psi^A\{Z^C, Z^D, \psi^B\} - \frac{i}{2}E^{ABCD}Z_D\{\bar\psi_A, \psi_B, Z_C\} \\ & - i\bar\psi^A\{\psi_A, Z^B, Z_B\} + 2i\bar\psi^A\{\psi_B, Z^B, Z_A\}\Big) \end{aligned}$$

を得る ここで

$$V = \frac{2}{3}\Upsilon^{CD}_B \Upsilon^B_{CD}$$

$$\Upsilon^{CD}_B = \{Z^C, Z^D, Z_B\} - \frac{1}{2}\delta^C_B\{Z^E, Z^D, Z_E\} + \frac{1}{2}\delta^D_B\{Z^E, Z^C, Z_E\}$$

M理論の3代数模型

第二量子化 $\begin{cases} \int d^3\sigma\sqrt{-g} \to \langle \quad \rangle \\ \{\varphi^a, \varphi^b, \varphi^c\} \to [T^a, T^b; \bar{T}^{\bar{c}}] \end{cases}$

Hermitian 3-algebra

$$S = \Big\langle -V - A_{\mu\bar{b}a}[Z^A, T^a; \bar{T}^{\bar{b}}]\overline{A^{\mu}_{\bar{d}c}[Z_A, T^c; \bar{T}^{\bar{d}}]} + \frac{1}{3}E^{\mu\nu\lambda}A_{\mu\bar{b}a}A_{\nu\bar{d}c}A_{\lambda\bar{f}e}[T^a, T^c; \bar{T}^{\bar{d}}]\overline{[T^b, T^f; \bar{T}^{\bar{e}}]}$$
$$+i\bar{\psi}^A\Gamma^\mu A_{\mu\bar{b}a}[\psi_A, T^a; \bar{T}^{\bar{b}}] + \frac{i}{2}E_{ABCD}\bar{\psi}^A[Z^C, Z^D; \bar{\psi}^B] - \frac{i}{2}E^{ABCD}\bar{Z}_D[\bar{\psi}_A, \psi_B; \bar{Z}_C]$$
$$-i\bar{\psi}^A[\psi_A, Z^B; \bar{Z}_B] + 2i\bar{\psi}^A[\psi_B, Z^B; \bar{Z}_A]\Big\rangle$$

ここで $V = \frac{2}{3}\Upsilon^{CD}_B\overline{\Upsilon}^B_{CD}$

$$\Upsilon^{CD}_B = [Z^C, Z^D; \bar{Z}_B] - \frac{1}{2}\delta^C_B[Z^E, Z^D; \bar{Z}_E] + \frac{1}{2}\delta^D_B[Z^E, Z^C; \bar{Z}_E]$$

0次元の場の理論であり、経路積分で定義される

＊IIB行列模型と同じ
解析手法が使える

M理論のDLCQ極限

L. Susskind (1997)   A. Sen (1997)
N. Seiberg (1997) J. Polchinski (1999)

- M理論のDLCQ極限は有限の行列サイズを持ったBFSS行列模型で記述される
- p次元トーラスコンパクト化したM理論のDLCQ極限は(p+1)次元最大超対称ヤンミルズ理論で記述され、M理論の基本的物体であるM2ブレーン、M5ブレーン、重力子も記述される

これらの事実を再現することはM理論の模型が満たすべき重要な判断基準

3代数模型のDLCQ極限

具体的な解析のため、N枚重なったM2ブレーンの有効作用と同じ3-algebraを採用

$$[T^a, T^b; \bar{T}^{\bar{c}}] = 2\pi(T^a T^{\dagger\bar{c}} T^b - T^b T^{\dagger\bar{c}} T^a)$$

T^a: NxN複素行列

$$\langle\rangle = \mathrm{Tr}$$

$$\begin{aligned} A_\mu &\equiv -\frac{i}{4\pi} A_{\mu\bar{b}a}(T^a T^{\dagger\bar{b}} + T^{\dagger\bar{b}} T^a) \\ B_\mu &\equiv -\frac{i}{4\pi} A_{\mu\bar{b}a}(T^a T^{\dagger\bar{b}} - T^{\dagger\bar{b}} T^a) \end{aligned}$$

Hermite行列

$$\begin{aligned} S = \mathrm{Tr}\Big(&-V + ([A_\mu, Z^A] + \{B_\mu, Z^A\})([A^\mu, Z_A] - \{B^\mu, Z_A\}) + iE^{\mu\nu\lambda}(\frac{2}{3}B_\mu B_\nu B_\lambda + 2A_\mu A_\nu B_\lambda) \\ &+\bar{\psi}^A \Gamma^\mu([A_\mu, \psi_A] + \{B_\mu, \psi_A\}) + iE_{ABCD}\bar{\psi}^A Z^C \psi^{\dagger B} Z^D - iE^{ABCD} Z^\dagger_D \bar{\psi}^\dagger{}_A Z^\dagger_C \psi_B \\ &-i\bar{\psi}^A \psi_A Z^\dagger_B Z^B + i\bar{\psi}^A Z^B Z^\dagger_B \psi_A + 2i\bar{\psi}^A \psi_B Z^\dagger_A Z^B - 2i\bar{\psi}^A Z^B Z^\dagger_A \psi_B \Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V = &\frac{1}{3} Z^\dagger_A Z^A Z^\dagger_B Z^B Z^\dagger_C Z^C + \frac{1}{3} Z^A Z^\dagger_A Z^B Z^\dagger_B Z^C Z^\dagger_C + \frac{4}{3} Z^\dagger_A Z^B Z^\dagger_C Z^A Z^\dagger_B Z^C \\ &- Z^\dagger_A Z^A Z^\dagger_B Z^C Z^\dagger_C Z^B - Z^A Z^\dagger_A Z^B Z^\dagger_C Z^C Z^\dagger_B \end{aligned}$$

＊この作用は形式的にはチャーンサイモンレベル１ のABJM模型を次元還元しても得られる

＊超対称性については現在研究中

Cf　チャーンサイモンレベル１ のABJM模型＝flat 11次元時空中のmembrane
だが、並進対称性が明白でない

時空座標の同定

この模型には時空に関し、SO(1,2)×SU(4)×U(1)のisometryのみを持つ

↓

時空座標の同定を行う必要がある。

$A^\mu \to X^\mu$ （通常の行列模型と同じ u(1)部分が時空座標）

$Z^A \to i\hat{X}^{A+2} - \hat{X}^{A+6} \quad (\hat{X}^I = X^I - ix^I\mathbf{1})$

I=3, … 10

ブレーン、粒子の位置を表すsu(N) Hermite行列　時空座標

＊B^μは補助場

＊A^μ、Z^Aの固有値からこの辞書で時空座標を読み取る

DLCQ極限

1. light-cone compact 化

$$\begin{cases} \hat{X}^{-} - i(2\pi R)\mathbf{1} = U^{\dagger}\hat{X}^{-}U \\ Y = U^{\dagger}YU \end{cases}$$

U：ユニタリー行列
Y：X⁻以外の場

2. IMF極限 （光の速さに近づく速度でX^{10}方向にLorentz boost)

$$\hat{X}^{+} \to \frac{1}{T}\hat{X}^{+}$$

$$\hat{X}^{-} \to T\hat{X}^{-}$$

$$T \to \infty$$

＊補助場B^{μ}については運動方程式を解く。

⇩

我々の模型は有限行列サイズのBFSS行列模型に帰着

$$S = T\int d\tau \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}(D_0X^i)^2 - \frac{1}{4}[X^i, X^j]^2 + \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^0 D_0\psi + \frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma^i[X_i, \psi]\right)$$

＊T^p コンパクト化した模型はDLCQ極限で(p+1)次元最大超対称ヤンミルズ理論に帰着

結論

<u>M理論の3代数模型</u>を提唱した。

- 時空座標を表す11個の行列を持つ。

- DLCQ極限で有限行列サイズのBFSS行列模型に帰着。T^pコンパクト化した模型のDLCQ極限では(p+1)次元最大超対称ヤンミルズ理論に帰着。
  (DLCQ極限ではM2,M5ブレーン、重力子を含む。)

  ↓

  3代数模型が正しい物理的自由度を持つことを示唆。

- 一体のsemi-light-coneゲージにおけるsupermembrane作用(とある近似で一致する作用)の第二量子化で得られる。第二量子化は南部ポアソン括弧をHermitian 3-algebraのbracketで置き換えることで定義される。

- 形式的にはチャーンサイモンレベルが1のN=6BLG模型(N=8になっている)
  (有効作用と同じ代数をとるとABJM模型)の次元還元で得られる。これらの対応は一部の議論には有効(超対称性など)だが、完全な対応ではない。

  cf. AdS/CFTのN=4SYM、BFSS行列模型、IIB行列模型の関係と同じ。
  これらは異なる理論で解釈も異なる。

  ＊完全反対称3-algebraで第二量子化するとN=8BLG模型の次元還元で形式的に得られるものと同じ模型を得る。

M理論の構成論的定式化としての位置づけ

現在も<u>11次元共変なM理論の行列模型</u>は構成されていない。

11次元のN=1超空間を表す11個のボゾン行列と32個のフェルミオン行列を持つ
物理的自由度はボゾン8、フェルミオン16

よってフェルミオンの自由度を半分に減らす対称性が存在 （＊）
（supermembraneの κ symmetryに対応）

↓ 固定

$\boxed{\text{M理論の3代数模型}}$

＊11個のボゾン行列と
16個のフェルミオン行列を持つ

$$
\begin{tikzcd}
\text{membrane} \arrow[r, "\kappa\,\text{固定}"] \arrow[d, "\text{第二量子化}"] & \text{semi-light-cone membrane} \arrow[d, "\text{第二量子化}"] \\
\text{共変M模型} \arrow[r] & \text{M理論の3代数模型}
\end{tikzcd}
$$

（＊）フェルミオンの
非物理的自由度のみを固定

⇩

M理論の3代数模型からM理論のすべての物理量が計算可能であることが期待される

Appendix

$$\mathrm{A}_\mu(\sigma,\sigma') = A_{\mu ab}\varphi^a(\sigma)\varphi^b(\sigma')$$

$$A_\mu(\sigma,\sigma') = \partial'_\alpha A_\mu(\sigma,\sigma')|_{\sigma'=\sigma}({\sigma'}^\alpha - \sigma^\alpha) + \frac{1}{2}\partial'_\alpha\partial'_\beta A_\mu(\sigma,\sigma')|_{\sigma'=\sigma}({\sigma'}^\alpha - \sigma^\alpha)({\sigma'}^\beta - \sigma^\beta) + \cdots$$

$$A_{\mu ab}\partial_\alpha\varphi^a\partial_\beta\varphi^b$$

$$a_{\mu\alpha} \equiv \partial'_\alpha A_\mu(\sigma,\sigma')|_{\sigma'=\sigma} = A_{\mu ab}\varphi^a\partial_\alpha\varphi^b$$

$$A_{\mu ab}\partial_\alpha\varphi^a\partial_\beta\varphi^b = \frac{1}{2}(\partial_\alpha a_{\mu\beta} - \partial_\beta a_{\mu\alpha}) = \frac{1}{2}F_{\mu\alpha\beta}$$

$$\int d^3\sigma\sqrt{-g}\Big(-\frac{1}{2}X^\mu\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha F_{\mu\beta\gamma}\Big)$$

$$F_{\mu\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}{A_\mu}^\gamma$$

$${A_\mu}^\alpha = -h^{\alpha\beta}\Pi_{\beta\mu},$$

$${\Pi_\alpha}^\mu = \partial_\alpha X^\mu - \frac{i}{2}\bar\psi\Gamma^\mu\partial_\alpha\psi \quad h_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^I\partial_\beta X_I \qquad h^{\alpha\beta}$$

$$S_{M2} = \int d^3\sigma\Big(\sqrt{-G} + \frac{i}{4}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\big(\bar\psi\Gamma_{\mu\nu}\partial_\alpha\psi({\Pi_\beta}^\mu{\Pi_\gamma}^\nu + \frac{i}{2}{\Pi_\beta}^\mu\bar\psi\Gamma^\nu\partial_\gamma\psi - \frac{1}{12}\bar\psi\Gamma^\mu\partial_\beta\psi\bar\psi\Gamma^\nu\partial_\gamma\psi) + \bar\psi\Gamma_{IJ}\partial_\alpha\psi\partial_\beta X^I\partial_\gamma X^J\big)\Big)$$