Localization of Wilson loop in two dimensional super Yang-Mills theories.

吉田豊（高エネルギー加速器研究機構）

1. Introduction

4-dim N=4 SU(N) super Yang-Mills においてはHalf-BPS Wilson loop
の期待値は放射補正は相殺し、Gaussian matrix model
で記述されると期待される。
（large N）(J. Erickson, G. Semenoff and K.Zarembo '00)
(finite N) (N. Drukker and D. Gross '00)

$$W(C) = \frac{1}{N}\mathrm{Tr}\exp\mathrm{P}\oint_C d\tau(iA_\mu \dot{x}^\mu + \Phi^i|\dot{x}|)$$

予想

$$\langle W(C)\rangle = \frac{1}{Z}\int DM \frac{1}{N}\mathrm{Tr}\exp(M)\left(-\frac{2N}{\lambda}\mathrm{Tr}M^2\right)$$

局所化を用いた証明

Half-BPS Wilson loop in 4-dim N=4 super Yang-Mills (V. Pestun '07)

Half-BPS Wilson loop in 3-dim N=2 supersymmetric Chern-Simons matter theory
(A. Kapustin, B.Willett and I. Yaakov '09)

$$S = \int d^3x \left(\epsilon^{\mu\nu\rho}(A_\mu \partial_\nu A_\rho + \frac{2i}{3} A_\mu A_\nu A_\rho) - \bar{\lambda}\lambda + 2D\sigma \right)$$

$$W(C) = \frac{1}{\mathrm{dim}R} \mathrm{TrP} \exp \oint_C d\tau (iA_\mu \dot{x}^\mu + \sigma |\dot{x}|)$$

他理論、例えば2-dim super Yang-Millsの場合
はどうか？

$R^n \cup \{\infty\} = S^n$ 上で理論を考える

unsupress定数モード存在すると
局所化がwell-definedでない。⇒理論が定義される空間がコンパクト

- 1. Introduction
- 2. Wilson loop in 2-dim Supersymmetric theories
- 3. Localization
- 4. 1-loop determinant
- 5.Summary

2. Wilson loop in 2-dim Supersymmetric theories

$\mathcal{N}=(2,2)$ Super Yang-Mills (Vector multiplet)

$$L=\frac{1}{g^2}\mathrm{Tr}\left[-\frac{1}{4}v_{\mu\nu}^2+\frac{1}{2}((D_\mu A)^2+(D_\mu B)^2)-\frac{1}{2}[A,B]^2\right.$$
$$\left.+i\bar{\lambda}\,\not{D}\lambda+\frac{1}{2}D^2-i\bar{\lambda}[A,\lambda]-\bar{\lambda}[B,\sigma_3\lambda]\right]$$

v_μ 2-dim Gauge field A, B Real scalar λ Dirac fermion

Wilson loop

$$W(C)=\frac{1}{\mathrm{dim}R}\mathrm{Tr}_R\mathrm{P}\exp\oint_C d\tau(iv_\mu\dot{x}^\mu+A|\dot{x}|)$$

Half-BPS ⇒C:circular

Supersymmetry

$$\delta v^{\mu} = i\bar{\eta}\gamma^{\mu}\lambda - i\bar{\lambda}\gamma^{\mu}\epsilon$$

$$\delta A = -\bar{\eta}\lambda - \bar{\lambda}\epsilon$$

$$\delta B = i\bar{\eta}\sigma_3\lambda - i\bar{\lambda}\sigma_3\epsilon$$

$$\delta\lambda = (-\frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}v^{\mu\nu} - D + [A, B] + i\not{D}A - \not{D}B\sigma_3)\epsilon$$

$$+i\not{\nabla}\epsilon \cdot A + \not{\nabla}\sigma_3\epsilon \cdot B$$

$$\delta D = i(\bar{\eta}\gamma^{\mu}(D_{\mu}\lambda) - (D_{\mu}\bar{\lambda})\gamma^{\mu}\epsilon)$$

$$+i\bar{\eta}[A, \lambda] - i[A, \bar{\lambda}]\epsilon - \bar{\eta}\sigma_3[B, \lambda] + [B, \bar{\lambda}]\sigma_3\epsilon$$

$$+i(\nabla_{\mu}\bar{\eta} \cdot \gamma^{\mu}\lambda - \bar{\lambda}\gamma^{\mu}\nabla_{\mu}\epsilon)$$

Conformal killing spinor

半径rのsphereの場合（立体射影座標）

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{|x|^2}{4r^2}}}(\epsilon_s + x^{\mu}\gamma_{\mu}\epsilon_c)$$

ϵ はr→∞（flat space）では通常のpoincare superchargeと Special conformal superchargeに対応する。古典的には lagrangianはこれらの対称性をあるが、quantumには破れる可能性がある。

1-loop beta 関数

$$\frac{1}{g(\mu)^2} = \frac{1}{g^2}[1 - \frac{g^2}{2\pi\mu^2}(\frac{n_s}{6}c_s - 4n_v c_v + \frac{2}{3}n_f c_f)]$$

・N=(4,4) 2Nc=Nf（fundamental fermion）や
・N=(8,8)の場合では消えている。

これらはそれぞれは4-dim N=2 SYM (Nc=2Nf) とN=4 SYMをDRED ものになっている。1-loopのbeta関数の計算がexactであると期待される。

3. Localization

Operatorの期待値

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int D\Phi\, \mathcal{O} \exp(-S)$$

Charge について次の条件をみたすとき Operator の期待値はtに依らない

$$[\mathcal{Q}, \mathcal{O}] = [\mathcal{Q}, S] = \mathcal{Q}^2 = 0$$

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int D\Phi\, \mathcal{O} \exp(-S + t\{\mathcal{Q}, V\})$$

よって元の理論の期待値を変形した理論の
t=∞付近で評価することが可能。この際積分に寄与する場の配位
は{Q,V}=0を満たすものになる。

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{\mathrm{SUSY}} + \mathcal{Q}_{\mathrm{B}}$$

$\mathcal{Q}_{\mathrm{SUSY}}$は $\bar{\eta} = 0,\ \epsilon$:circular Wilson loopを保つ

$\mathcal{Q}_B$ はBRST charge

Opetratorの期待値

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int d\Phi_0 \mathcal{O}(\Phi_0) \exp(-S(\Phi_0)) Z_{\mathrm{non-per}} Z_{1-\mathrm{loop}}(\Phi_0)$$

Z : 分配関数

$$Z = \int d\Phi_0 \exp(-S(\Phi_0)) Z_{\mathrm{non-per}} Z_{1-\mathrm{loop}}(\Phi_0)$$

非摂動項（インスタントン　etc）

$$Z_{\mathrm{non-per}}$$

t{Q,V}の1-loopからの寄与

$$Z_{1-\mathrm{loop}}$$

2-dimのhalf-BPS Wlison loop場合は非摂動項は存在しない。
1-loop partからの寄与のみ。

Q-exact term

$$V = \mathrm{Tr}(\delta\lambda)^\dagger\lambda$$

$$\{\mathcal{Q}, V\}_{\mathrm{bos}} = \mathrm{Tr}\left[\frac{1}{2}v_{\mu\nu}v^{\mu\nu} + (D_\mu A)^2 + (D_\mu B)^2 + (D+A)^2 + [A,B]^2\right] + \cdots$$

$$\{\mathcal{Q}, V\}_{\mathrm{fermi}} = \mathrm{Tr}\left[i\bar{\lambda}\ \not{\nabla}\lambda + i\bar{\lambda}[A,\lambda] - \frac{1}{2}\bar{\lambda}\lambda\right] + \cdots$$

場の配位

$$A = -D = A_o, \quad X = 0$$

に局所化

Gauge固定項

$$\bar{c}\nabla\mu D^\mu c + b\nabla^\mu v_\mu$$

4. 1-loop determinant

次のrescaleを行う

$$A \to A_o + \frac{1}{\sqrt{t}} A' \qquad D \to -A_o + \frac{1}{\sqrt{t}} D'$$

Constant modeがない他の場

$$X \to \frac{1}{\sqrt{t}} X'$$

Classical partの値（t →∞）

$$S_{cl} = \int \sqrt{g} d^2 x \, \frac{1}{2} D_{cl}^2 = 2\pi A_o^2$$

$$W(C)_{cl} = \frac{1}{\mathrm{dim} R} \mathrm{Tr}_R \exp(2\pi A_o)$$

定数モード以外の揺らぎについて二次までの項が寄与する。

$$\lim_{t\to\infty} t\{\mathcal{Q}, V\} = \int \sqrt{g} d^2x \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}(\partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu)^2 + [v_\mu, A_o]^2 + (\partial_\mu A')^2 + +(\partial_\mu B)^2 \right.$$
$$\left. +(D' + A')^2 + i\bar{\lambda}\, \nabla\!\!\!/ \lambda + i[\bar{\lambda}, A_o]\lambda - \frac{1}{2}\bar{\lambda}\lambda + \partial_\mu \bar{c}\partial^\mu c\right)$$

ゲージ場の1-loop determinantを評価するためにゲージポテンシャルを
Divergent termとdivergenceless partに分解する。

$$v_\mu = \partial_\mu \phi + v'_\mu \qquad \partial^\mu v'_\mu = 0$$

$$\int \sqrt{g} d^2x \mathrm{Tr}\left(-v'^\mu \nabla^2 v'_\mu + [v'_\mu, A_o]^2 + (\partial_\mu A')^2 + (\partial_\mu B)^2\right.$$
$$\left. +(D' + A')^2 - [A_o, B]^2 + i\bar{\lambda}\, \nabla\!\!\!/ \lambda + i[\bar{\lambda}, A_o]\lambda - \frac{1}{2}\bar{\lambda}\lambda + \partial_\mu \bar{c}\partial^\mu c\right)$$

A'とφとcの1-loop determinantが相殺

Root とCartan部分代数に属する部分に分解

$$v'_\mu = \sum_\alpha v^\alpha_\mu \, e_\alpha + h_\mu, \qquad [A_o, v'_\mu] = \sum_\alpha \alpha(A_o) \, v^\alpha_\mu \, e_\alpha$$

e_α： rootの代表元

$$Z_{1-loop} = \int D{v'}_{\mu\alpha} \, DB_\alpha \, D\bar{\lambda}_\alpha D\lambda_\alpha \, e^{S'}$$

$$S' = \int \sqrt{g} d^2x \left({v'}^\mu_\alpha (-\nabla^2 + \alpha(A_o)^2) {v'}_{\mu\alpha} + B_\alpha(-\nabla^2 - \frac{1}{2}\alpha(A_o)^2) B_\alpha + 2\bar{\lambda}_\alpha (i \not\nabla + i\alpha(A_o) - 1)\lambda_\alpha \right)$$

Vector harmonics, spherical harmonics, Dirac operator
固有値を用いて評価。

$$\langle W_R(C) \rangle = \frac{1}{Z \,\mathrm{dim} R} \int dA_o \exp(-4\pi \mathrm{Tr} A_o^2) \mathrm{Tr}_R \exp(2\pi A_o) Z_{1-loop}(A_o)$$

5.Summary

- 2-dim supersymmetric gauge thoeryにおけるBPS Wilson loop(circular)を局所化を用いて計算する方法について議論した。

- 4-dimと違い、局所化するゲージ場の配位は平坦接続であり、インスタントンのような寄与は存在しない

4-dim $k = \frac{1}{8\pi^2} \int \mathrm{Tr} F \wedge F$ 2-dim $k = \frac{i}{2\pi} \int \mathrm{Tr} F$

1-loop partのみがWlison loopの期待値に寄与する。

- matter sector（chiral multiplet）も同様に局所化を用いて計算することが可能。N=(4,4) ,N=(8,8) etcなどの計算。