

Supersymmetry non-renormalization theorem from a computer and the AdS/CFT correspondence

総研大D1 本多正純

伊敷吾郎氏 (CQeST), Sang-Woo Kim氏 (KEK),
西村淳氏 (KEK & 総研大), 土屋麻人氏 (静岡大)
との共同研究に基づく。

導入・動機

4d $SU(\infty)$ $\mathcal{N} = 4$ SYM のシミュレーション

Motivation①: $\mathcal{N}=4$ SYMの非摂動的な正則化

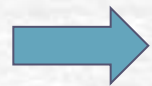
$$\{Q, \bar{Q}\} \sim P_\mu$$



格子正則化



~~並進対称性~~



格子上でオリジナルのSUSYを全て保つのは不可能

[Cf. “格子上の”SUSYを保つ試み: 浅賀さんのポスター]

しかし 連続極限でSUSYが回復する可能性がある

$\mathcal{N} = 4$ SYMの場合, 4~6コのパラメータの**fine-tuning**が必要

[Giedt]

ここでは、

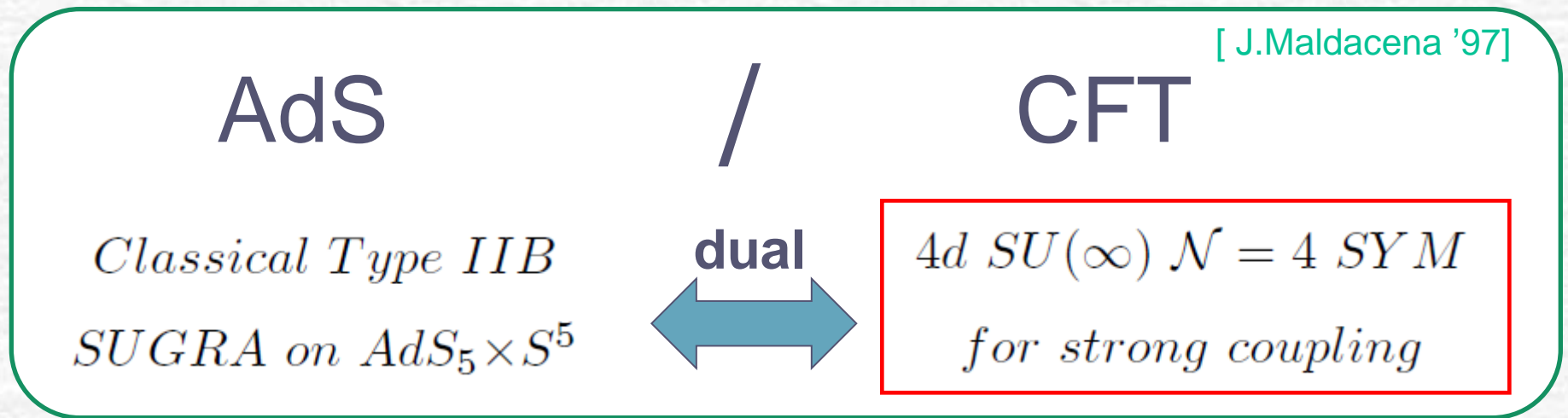
格子正則化の代わりにLarge N reductionを用いる

導入・動機(続き)

Motivation②: AdS/CFT対応の検証

— 応用面、超弦理論の非摂動的側面を探る上で重要

ここで考える対応はD3ブレーンの場合:



ゲージ理論の強結合領域を調べることが必要
数値計算で検証

今回行ったこと

4次元 $SU(\infty)$ $\mathcal{N} = 4$ SYMにおいて、
Chiral Primary Operatorの相関関数をモンテカルロ計算

・2点関数:

BPS operatorの性質がモンテカルロシミュレーションから
どのように理解できるか？

・3点関数:

重力側  適当に規格化された3点関数は繰り込まれない

講演の流れ

1. 導入・動機

2. どうやって、SYMを計算機に乗せるか？

3. Chiral Primary Op.の相関関数

4. 結果

5. まとめと展望

どうやってSYMを計算機に乗せるか？

[Cf. "finite N" version: Hanada-Matsuura-Sugino, 松浦さんの講演]

$\mathcal{N} = 4$ $SU(N)$ SYM on \mathbb{R}^4



① 共形変換

$\mathcal{N} = 4$ $SU(N)$ SYM on $\mathbb{R} \times S^3$



② Large N reduction

同等な1次元行列模型(PWMM, BMN)



③ フーリエモード正則化
[Hanada-Nishimura-Takeuchi '07]

モンテカルロ・シミュレーション

(Rational Hybrid Monte Carlo)

場がmasslessだと問題があるので、
正曲率の時空に移してmassiveにする

※ $\mathcal{N} = 4$ SYMは
CFTなので**両者は等価**

$t = [0, \beta]$ として、

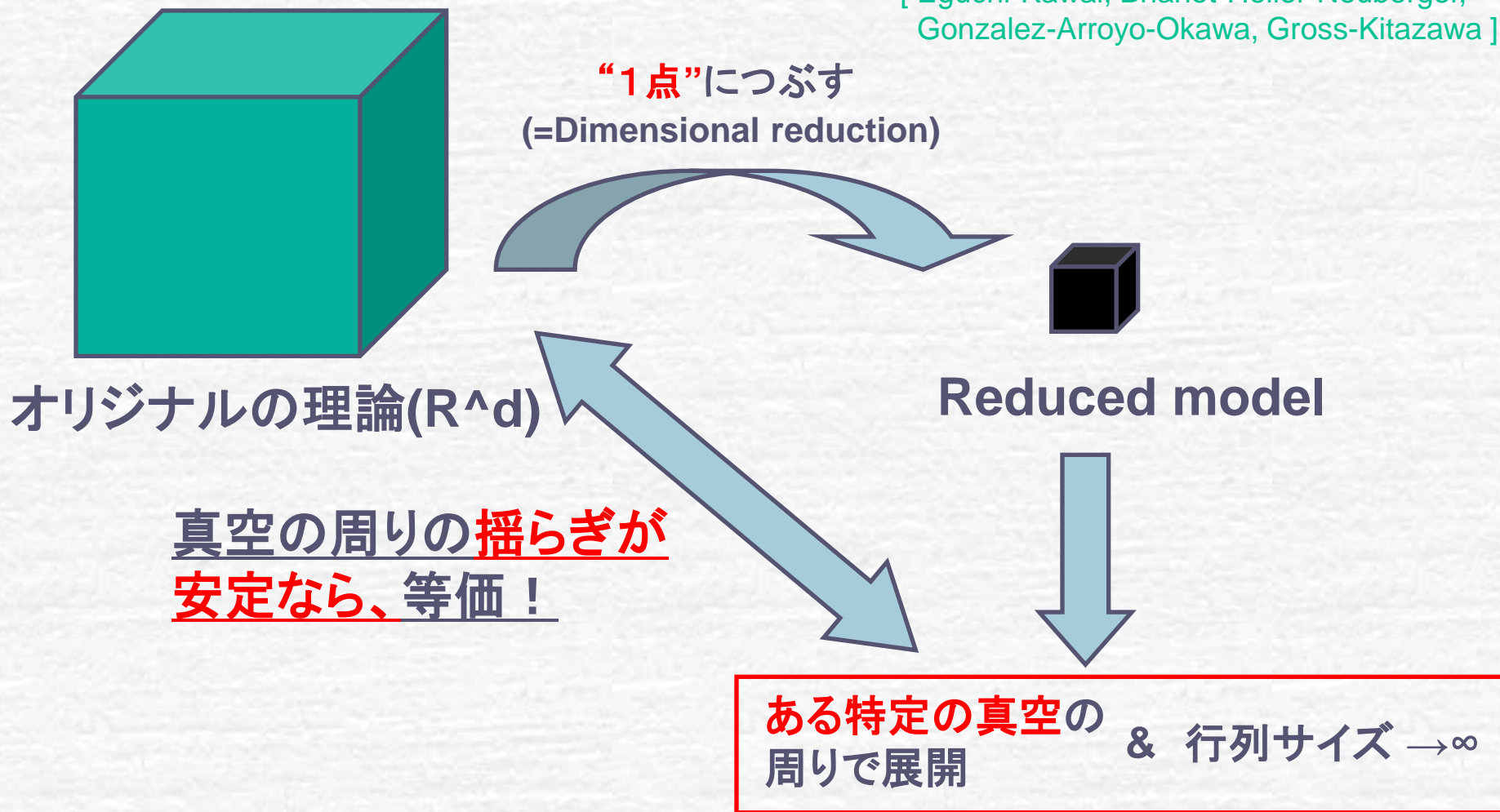
$$X_i(t) = \sum_{n=-\Lambda}^{\Lambda} \bar{X}_{i,n} e^{i\omega n t}$$

→ $\beta \rightarrow \infty, \Lambda \rightarrow \infty$

No fine-tuning!

Large N reductionの一般的な概念

[Eguchi-Kawai, Bhanot-Heller-Neuberger, Gonzalez-Arroyo-Okawa, Gross-Kitazawa]

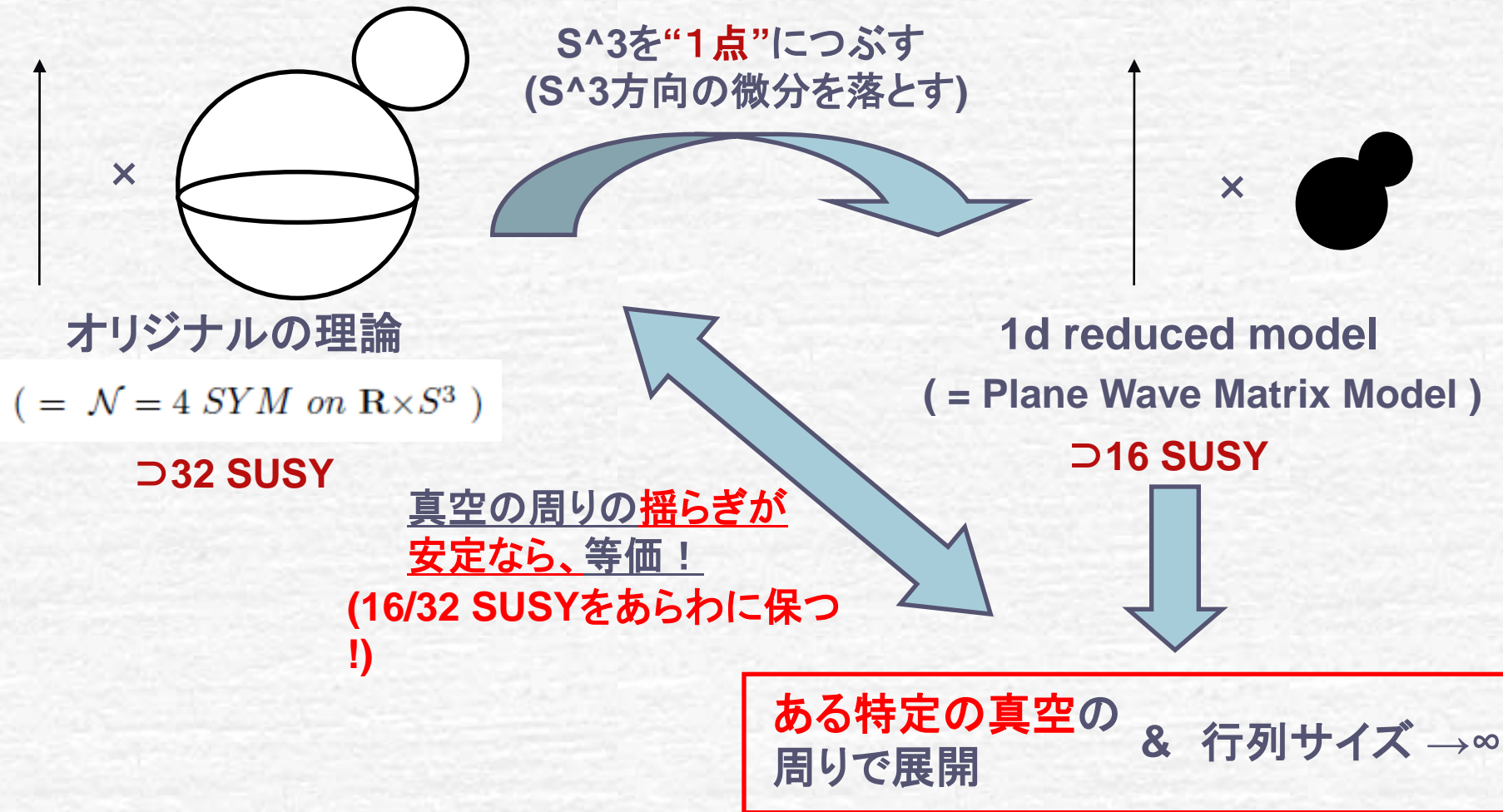


ここでは、これを S^3 に拡張したものをを用いる

[cf. 一般的な時空への拡張: Kawai-Shimasaki-Tsuchiya]

S^3 上のLarge N reduction

[Ishii-Ishiki-Shimasaki-Tsuchiya '08]



PWMMの真空は何か？

Vacua of Plane Wave Matrix Model (PWMM)

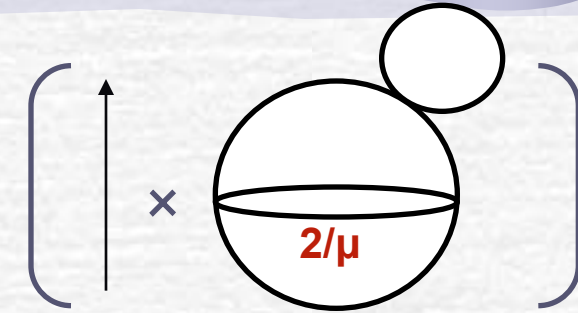
SYMとPWMMの関係

$$\mathcal{N} = 4 \text{ } SU(N) \text{ SYM on } \mathbb{R} \times S^3$$

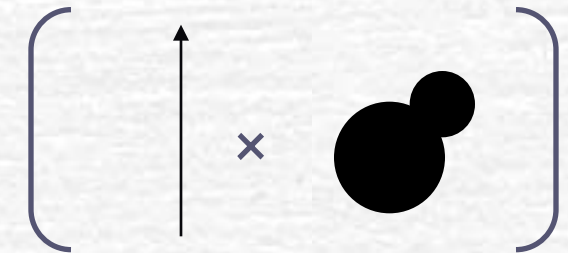
⊃ (4 gauge場, 6 adjointスカラー,
4 Majorana spinors)

Plane Wave Matrix Model (PWMM)

⊃ (1 gauge場, 3+6 adjointスカラー,
16 Majorana spinors)



S^3をつぶす



PWMMの真空:

$$S_{PWMM} \sim \int dt \text{Tr} \left(\frac{1}{2} (\partial_t X_i)^2 - \frac{1}{2} \left(\mu X_i - \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} [X_j, X_k] \right)^2 + \dots \right)$$

[Berenstein-Maldacena-Nastase]

$$X_i = \mu L_i$$

(L_i : SU(2)の表現)

$$\Rightarrow X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = \text{Const.}$$

Fuzzy sphere解!

SYM from PWMM (処方箋)

[Ishii-Ishiki-Shimasaki-Tsuchiya '08]

SYMはPWMMの以下の極限で再現される:

3つのスカラー場を“ある”真空解の周りで展開:

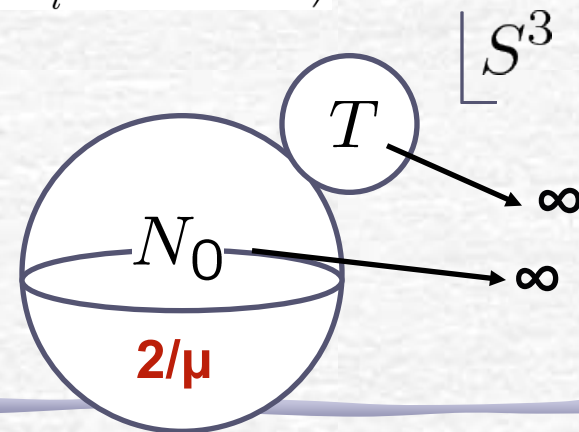
$$X_i \rightarrow \mu L_i + X_i$$

ただし、 $L_i^{[N_0]}$: $SU(2)$ の N_0 次元表現として、

$$L_i = \begin{pmatrix} L_i^{[N_0-T/2]} & & & & & & & & \\ & \dots & & & & & & & \\ & & L_i^{[N_0-1]} & & & & & & \\ & & & L_i^{[N_0]} & & & & & \\ & & & & L_i^{[N_0+1]} & & & & \\ & & & & & \dots & & & \\ & & & & & & L_i^{[N_0+T/2]} & & \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}_{N \times N}$$

$$N_0 \rightarrow \infty \quad T \rightarrow \infty \quad N \rightarrow \infty$$

$$\lambda_{SYM} = \frac{16\pi^2}{\mu^3} \cdot \frac{\lambda_{PWMM}}{TN_0^2} = \text{fixed}$$



講演の流れ

1. 導入・動機
2. どうやって、SYMを計算機に乗せるか？
- 3. Chiral Primary Op.の相関関数**
4. 結果
5. まとめと展望

Chiral Primary Operator (2点)

Chiral Primary Operator :

$$\mathcal{O}_{\Delta}(x) \equiv \text{tr}(X_{\{a_1} X_{a_2} \cdots X_{a_{\Delta}}\}})$$

X_a : 6 scalars in SYM

Δ : Conformal dimension
(= # of scalars)

共形対称性から期待値の形が決まる:

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x_1) \mathcal{O}_{\Delta_2}(x_2) \rangle = \frac{c_{\Delta_1} \delta_{\Delta_1 \Delta_2}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}}$$

非繰り込み定理

c_{Δ} は結合定数に依らない。

Chiral Primary Operator (3点)

3点の場合も同様:

$$\langle O_{\Delta_1} O_{\Delta_2} O_{\Delta_3} \rangle = \frac{c_{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3} |x_2 - x_3|^{\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1} |x_3 - x_1|^{\Delta_3 + \Delta_1 - \Delta_2}}$$

Extremalな場合 ($\Delta_i = \Delta_j + \Delta_k$) は、係数が結合定数に依らないことが示されている。

[Eden-Howe-Schubert-Sokatchev-West]

重力側からの予言

[Lee-Minwalla-Rangamani-Seiberg]

任意の共形次元の場合に、

$$\left. \frac{c_{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3}}{\sqrt{c_{\Delta_1} c_{\Delta_2} c_{\Delta_3}}} \right|_{\lambda \rightarrow \infty} = 1$$

つまり、任意の結合定数で

$$\frac{c_{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3}}{\sqrt{c_{\Delta_1} c_{\Delta_2} c_{\Delta_3}}} = 1 \quad \text{が自然}$$

Cf.

$$\langle O_{\Delta_1}(x_1) O_{\Delta_2}(x_2) \rangle = \frac{c_{\Delta_1} \delta_{\Delta_1 \Delta_2}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}}$$

実際に計算する相関関数

シミュレーションで実際に計算したのは、

・2-pt.

$$\langle \text{tr} Z^2(x_1) \text{tr} Z^{\dagger 2}(x_2) \rangle$$

$$Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_4 + iX_5)$$

・3-pt.

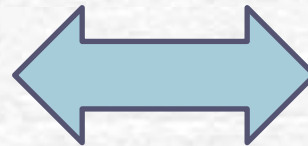
$$\langle \text{tr}(X_4 X_5) \text{tr}(X_5 X_6) \text{tr}(X_4 X_6) \rangle$$



全ての演算子について、 $\Delta = 2$ と取った。

AdS/CFT対応が正しいと仮定すると、

$$\frac{c_{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3}}{\sqrt{c_{\Delta_1} c_{\Delta_2} c_{\Delta_3}}} = \frac{c_{222}}{\sqrt{c_2^3}} = 1$$



$$c_{222} = c_2^{3/2}$$

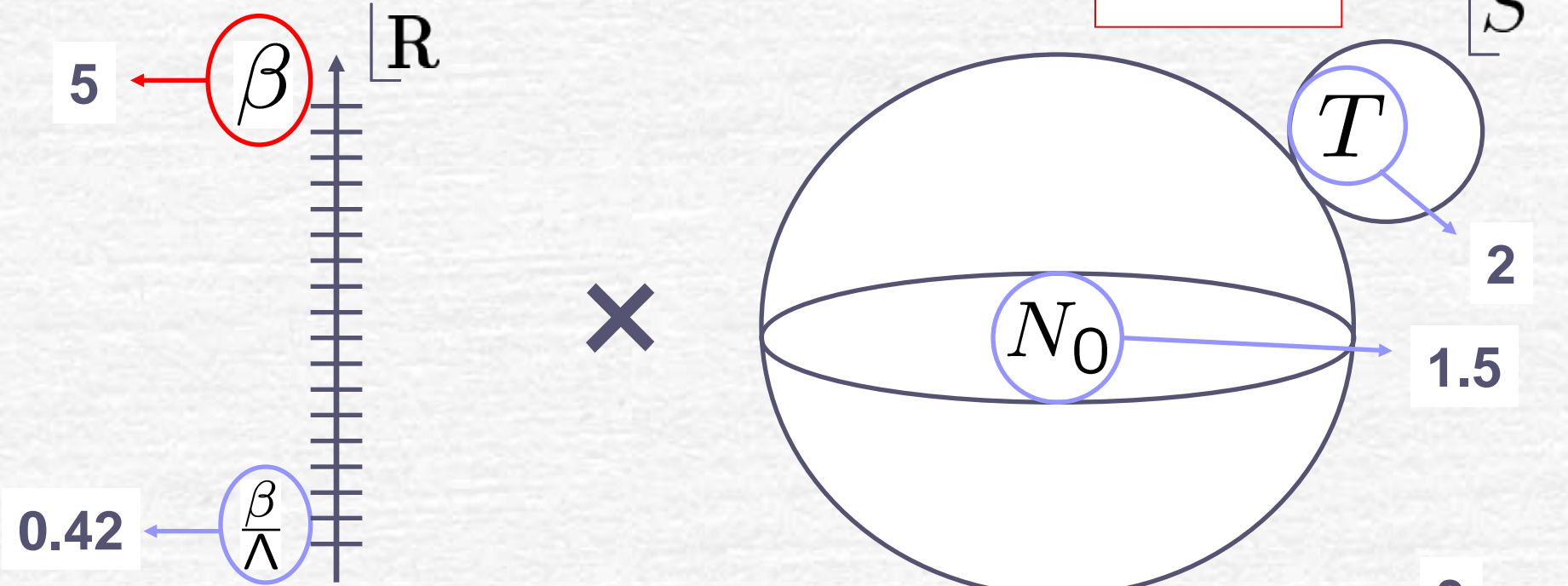
講演の流れ

1. 導入・動機
2. どうやって、SYMを計算機に乗せるか？
3. Chiral Primary Op.の相関関数
- 4. 結果**
5. まとめと展望

極限を取るべきパラメータ

極限を取らなくてはいけないパラメータは5個

$$S^3 \sim S^2 \times S^1$$

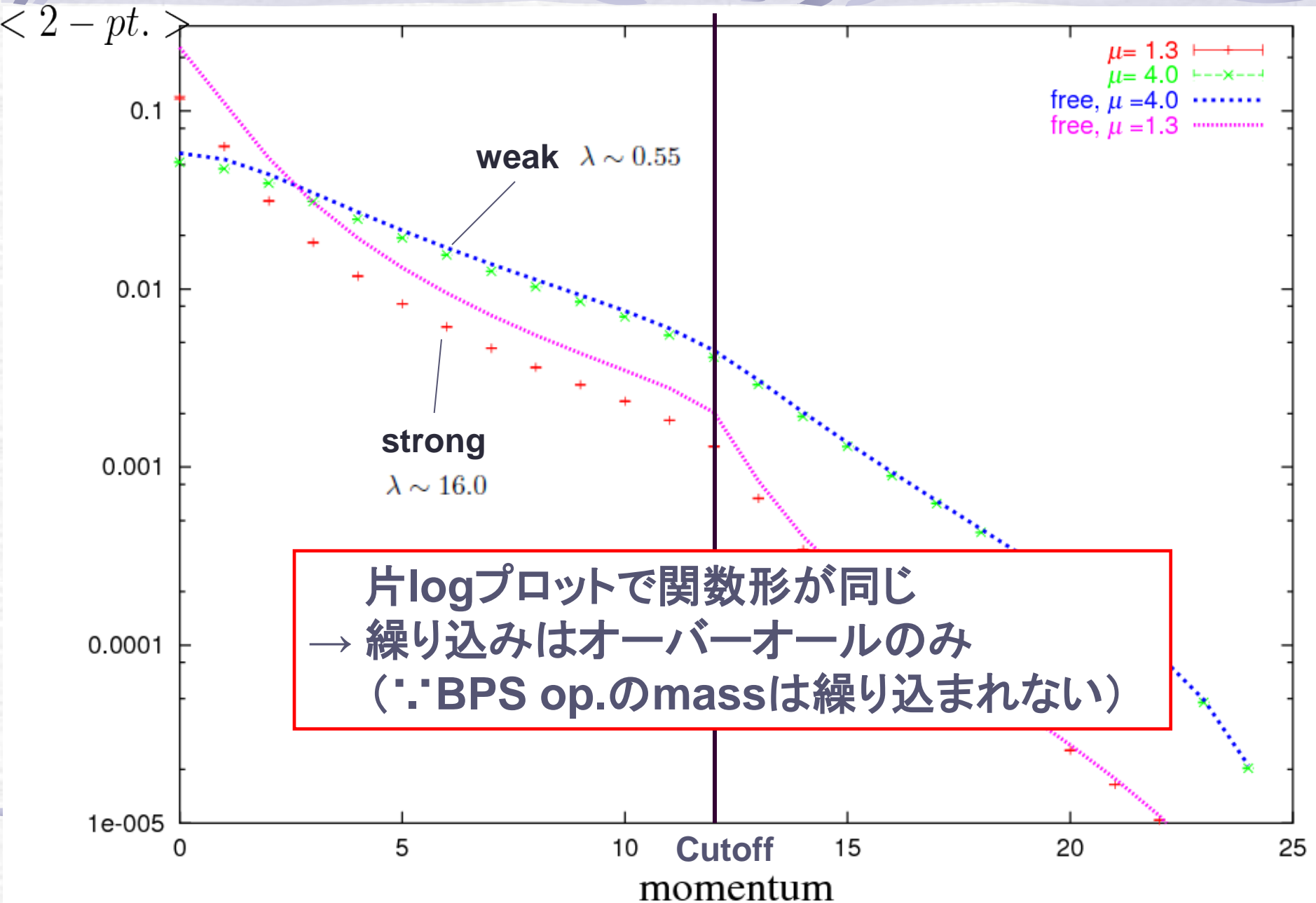


$$L_i = \left(\begin{array}{cccccccc} L_i^{[N_0-T/2]} & & & & & & & \\ & \dots & & & & & & \\ & & L_i^{[N_0-1]} & & & & & \\ & & & L_i^{[N_0]} & & & & \\ & & & & L_i^{[N_0+1]} & & & \\ & & & & & \dots & & \\ & & & & & & L_i^{[N_0+T/2]} & \end{array} \right) \otimes \mathbf{1}_{N \times N}$$

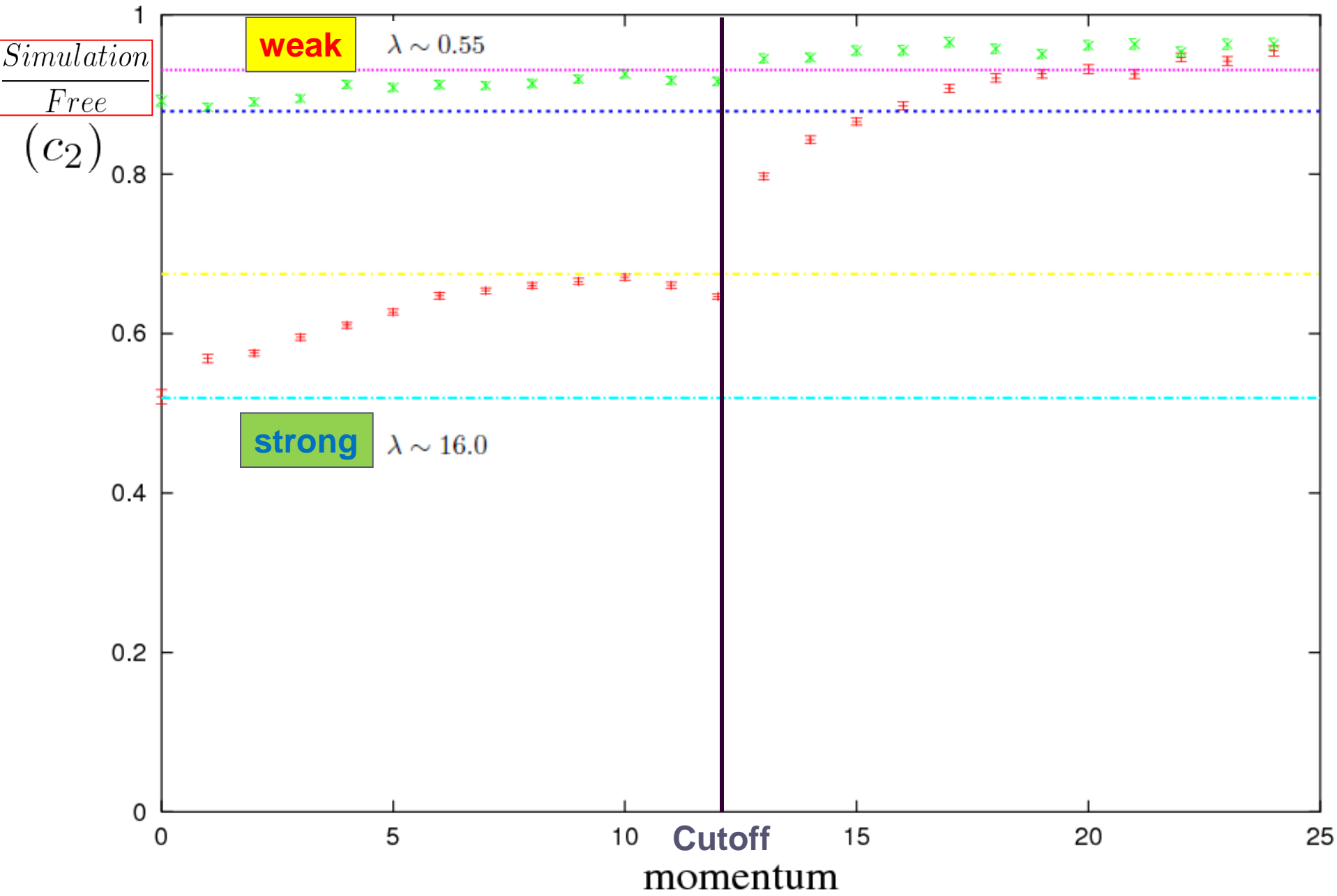
3

(3)

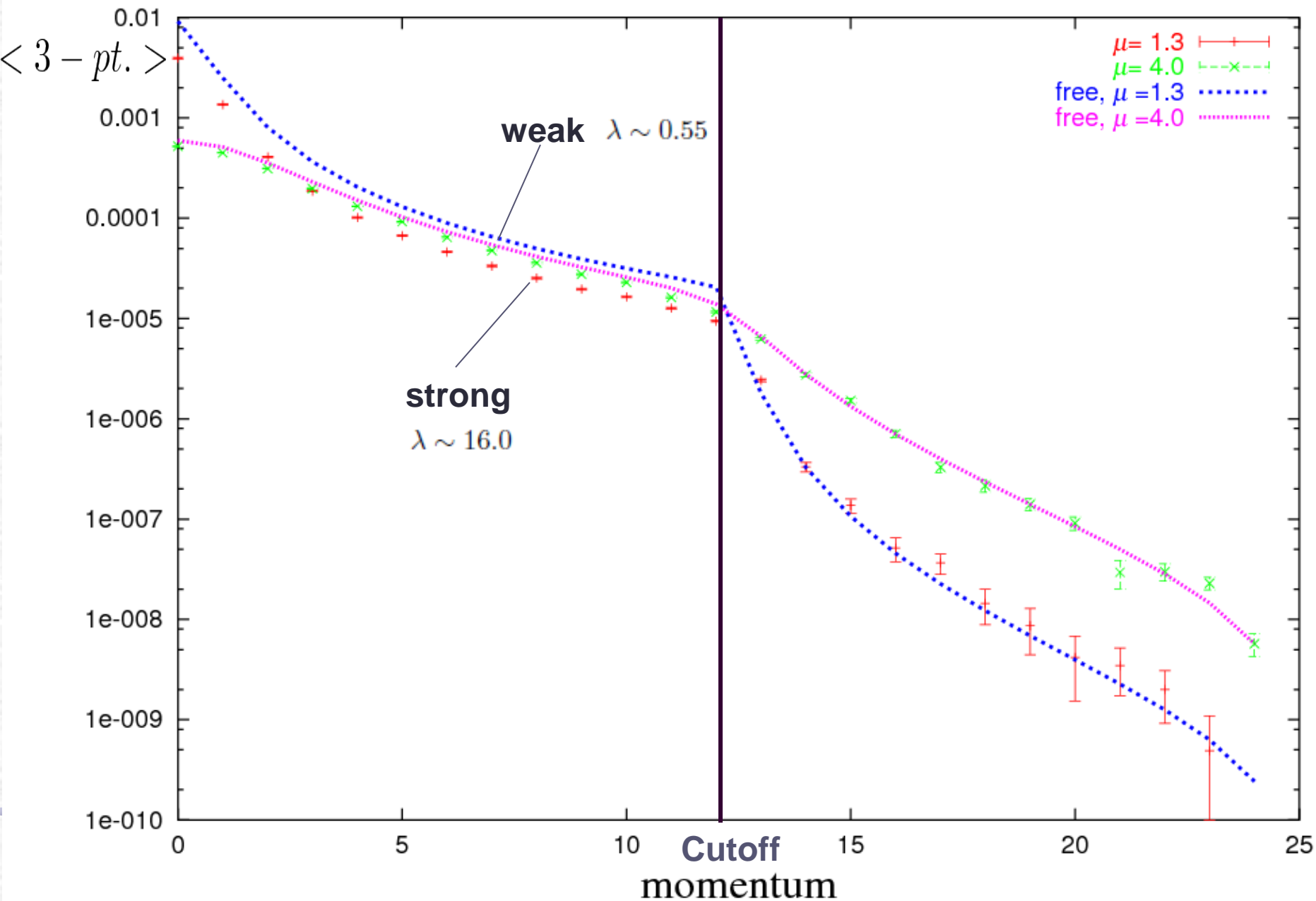
2点関数のフーリエ変換



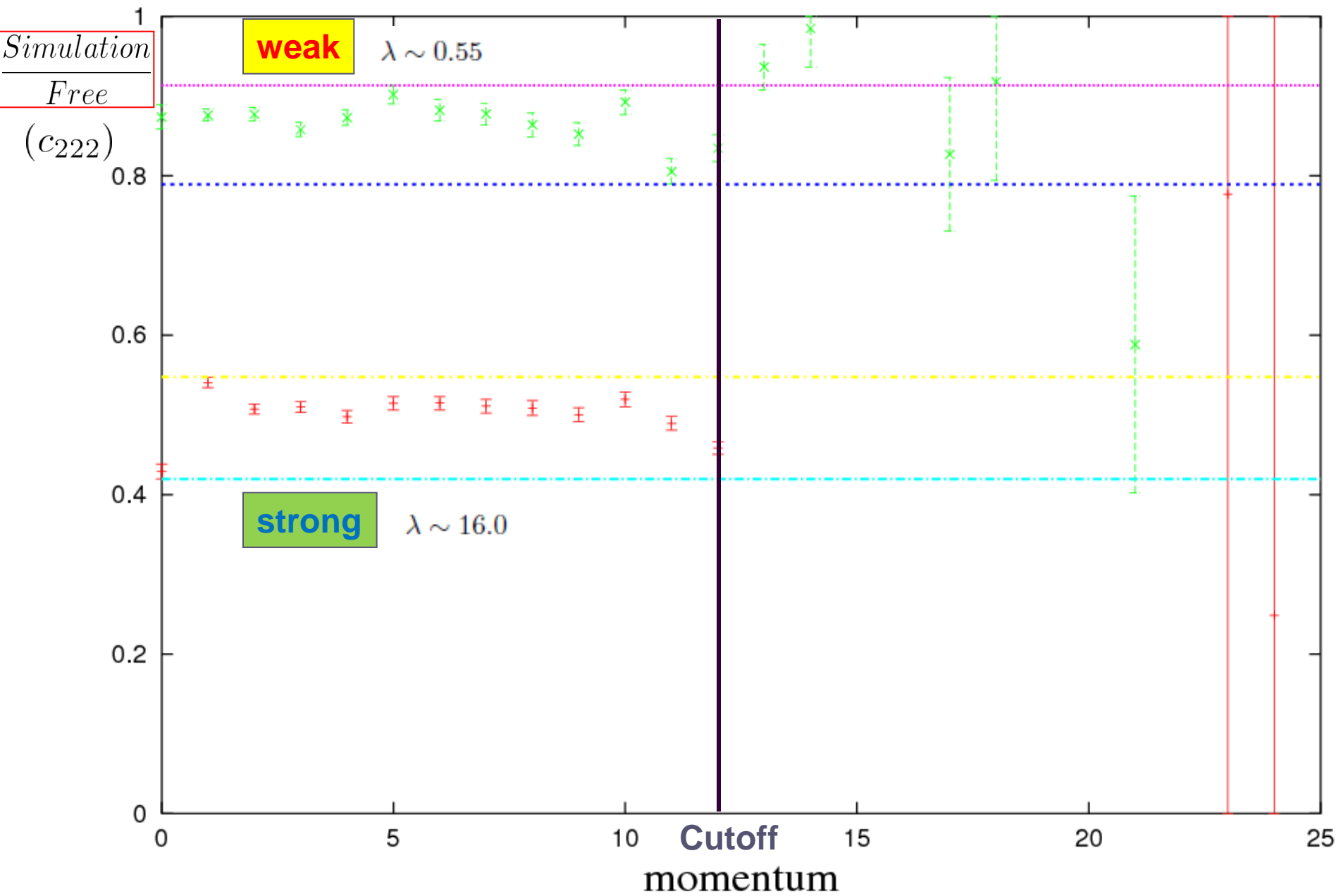
2点関数の繰り込み因子



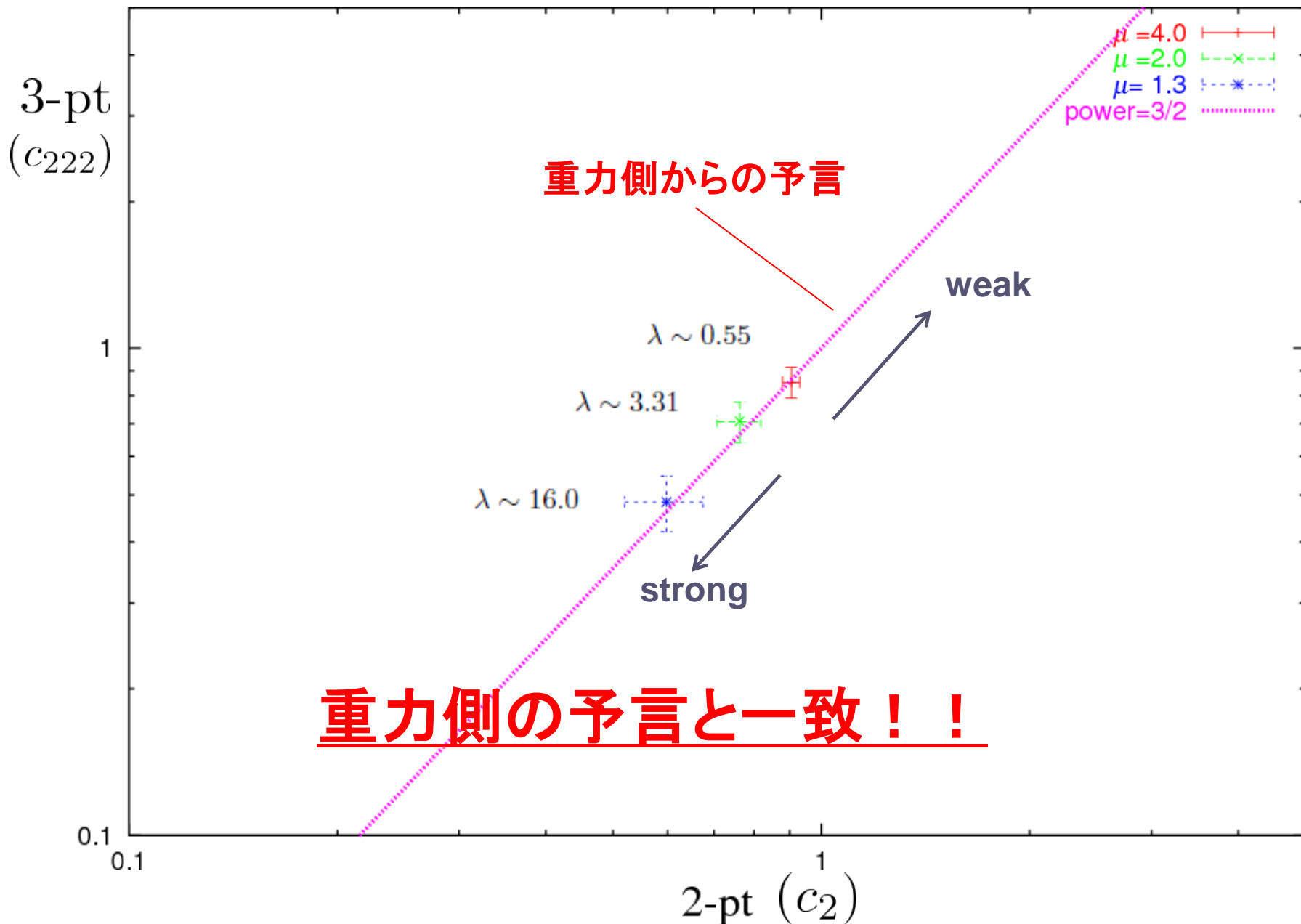
3点関数のフーリエ変換



3点関数の繰り込み因子



2点関数と3点関数の繰り込み因子



講演の流れ

1. 導入・動機
2. どうやって、SYMを計算機に乗せるか？
3. Chiral Primary Op.の相関関数
4. 結果
5. **まとめと展望**

まとめと展望

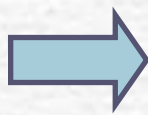
$SU(\infty)$ $\mathcal{N} = 4$ SYMにおいて、

Chiral Primary Operatorの2点・3点関数

を16 superchargeを尊重しながらモンテカルロシミュレーションで計算した。

特に、各々の相関関数のオーバーオールの一貫性を計算した：

$$c_{222} = c_2^{3/2}$$



3点関数の非一貫性定理の示唆

AdS/CFT対応からの予言の確認

Work in progress

- ・円形Wilsonループ [M.H.-Ishiki-Nishimura-Tsuchiya]
 - 厳密な計算結果が存在 [Cf. Erickson-Semenoff-Zarembo, Drukker-Gross, Pestun]
 - Useful for precisely check of our approach
- ・長方形 Wilsonループ [M.H.-Ishiki-Nishimura-Tsuchiya] [Cf. Maldacena, Rey-Yee]
 - SYM側での強結合の計算はなし
 - Non-BPS op.でもAdS/CFTは成り立つのか??
- ・ S^3 上のLarge N等価性の詳細な検証 [M.H.-Nishimura-Tsuchiya]
 - 超対称性が等価性にどのような影響を与えるか?

まとめと展望(続き)

・他の場合のAdS/CFT (ゲージ/重力)対応の検証

ex.) ある別のPWMMの真空周りでの展開

→ *SYM on $\mathbb{R} \times S^2$ with 16 supercharges*

— シミュレーションはこの理論の方が簡単

— Non-AdS / Non-CFT対応 [Cf. Lin-Maldacena]

・有限温度への拡張

— Fuzzy sphereのダイナミクスを深く理解する必要あり

・現象論的に興味あるモデルへの応用 [SQCDへの応用: M.H.-Nishimura]

ここで用いたLarge N reductionは $\mathbb{R} \times S^3$ 上 $\mathcal{N} = 1$ の理論にも適用可能

→ S^3 半径 $\rightarrow \infty$ の極限で \mathbb{R}^4 上の理論を調べることができる

— 現象論的に面白い超対称性理論での非摂動効果を見れる?

ex.) gluino condensation, dynamical SUSY breaking etc....

ありがとうございました。

SYM from PWMM (概略)

$\mathcal{N} = 4$ $SU(N)$ SYM on $\mathbf{R} \times S^3$

局所的に、
 $S^3 \sim S^2 \times S^1$

S^1 方向の次元簡約

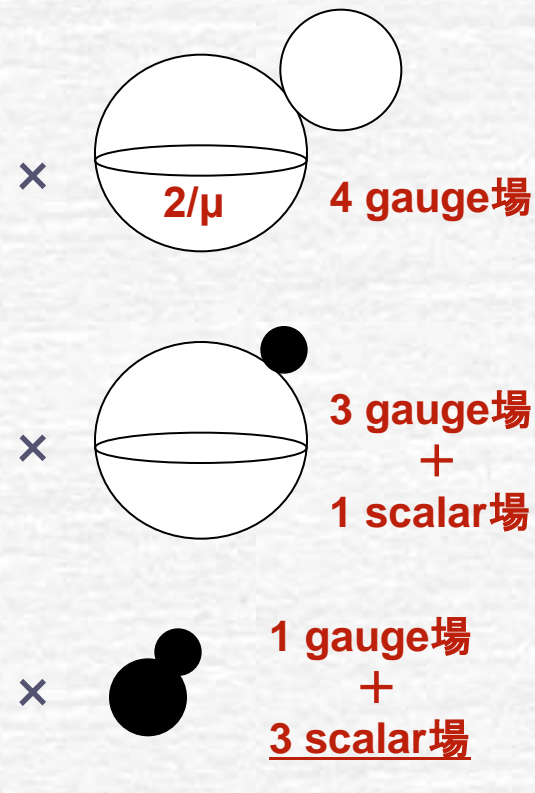
S^1 上の Large N reduction

SYM on $\mathbf{R} \times S^2$ with 16 supercharges

S^2 方向の次元簡約

Fuzzy sphereの可換極限

Plane Wave Matrix Model (PWMM)



PWMMの真空解

(SYMでは S^3 のゲージ場だった) 3つのスカラー場に対して、

$$[X_i, X_j] = i\mu\epsilon_{ijk}X_k \quad (i,j,k=1,2,3) \iff X_i = \mu L_i$$

(L_i : $SU(2)$ の表現行列)

$$\implies X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = Const. \quad \text{Fuzzy sphere (非可換球面) 解!}$$

ラージN reduction on S^1

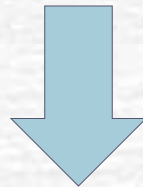
[Kawai-Sato, Ishii-Ishiki-Shimasaki-Tsuchiya]

行列量子力学

$$S = \int d\tau \text{Tr} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4} g^2 \phi^4 \right)$$

($\phi : N \times N$ Hermitian matrix)

$$0 \leq \tau < 2\pi R$$



$$\frac{d\phi}{d\tau} \rightarrow [i\tilde{P}, \phi] \quad \phi(\tau) = \phi$$

Reduced Model :

$$\tilde{S}_r = \text{Tr} \left(-\frac{1}{2} [\tilde{P}, \phi]^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4} g_r^2 \phi^4 \right)$$

$$g_r^2 = \frac{g^2}{2\pi R}$$

ただし、 $\phi : N(T+1) \times N(T+1)$ 行列 として、

※ τ 方向の運動量分布：

$$\tilde{P} = \frac{1}{R} \text{diag} \left(-\frac{T}{2}, -\frac{T}{2} + 1, \dots, \frac{T}{2} \right) \otimes \mathbf{1}_{N \times N}$$



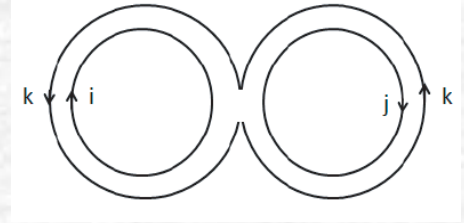
次の極限で、reduced model は元の理論のplanar limitを再現する:

$$N \rightarrow \infty \quad T \rightarrow \infty \quad \tilde{\lambda} = g_r^2 N = \text{fixed}$$

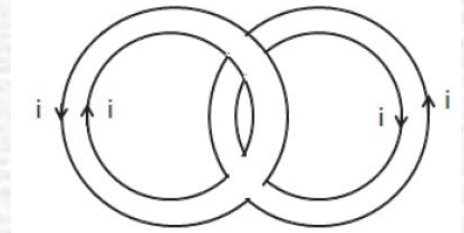
等価性のチェック

Originalの理論

$$\tilde{F}_{planar}^{2-loop} = \frac{1}{2} N^2 \tilde{\lambda} \sum_{n,l} \frac{1}{\left(\frac{n^2}{R^2} + m^2\right) \left(\frac{l^2}{R^2} + m^2\right)},$$

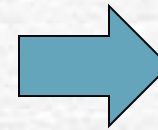


Reduced Model



Planar

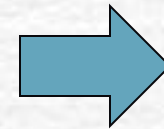
$$\tilde{F}_{m,planar}^{2-loop} = \frac{1}{2} N^2 (T+1) \tilde{\lambda} \sum_{n,l=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{\left(\frac{n^2}{R^2} + m^2\right) \left(\frac{l^2}{R^2} + m^2\right)}.$$



$$\tilde{F}_{planar}^{2-loop} = \frac{\tilde{F}_{m,planar}^{2-loop}}{T+1}.$$

Non-planar

$$\tilde{F}_{m,non-pla}^{2-loop} = N \times \left(\frac{1}{4} g_r^2 \sum_{a=\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{m^4} \right) = \frac{1}{4} (T+1) \tilde{\lambda} \frac{1}{m^4}.$$



Suppressed !



2010/7/23

極限で、reduced model はOriginalの理論の planar limitを再現する

ゲージ理論のLarge N reduction

先の処方箋をゲージ理論にそのまま適用すると、

[Gross-Kitazawa ,
Bhanot-Heller-Neuberger]

$$S_{YM} = \frac{1}{g^2} \int d^D x \frac{1}{4} \text{Tr} [\partial_\mu - iA_\mu, \partial_\nu - iA_\nu]^2$$
$$\rightarrow S_{YM,R} = -\frac{2\pi}{\Lambda} \frac{1}{4g^2} \text{Tr} [P_\mu + A_\mu, P_\nu + A_\nu]^2,$$

しかし、この作用は

$$A_\mu \implies A_\mu + D \quad (D : \forall \text{ 対角行列}) \quad \text{の下で不変}$$



対角成分にflat directionがあり、バックグラウンドが**不安定**



通常は固有値を手で固定する処方箋が行われる(quench処方)

※これはSUSYと両立しない

SYM on $R \times S^3 \leftarrow$ SYM on $R \times S^2$

S^1 方向の運動量は、古典解により実現される。

ゲージ場部分の作用:

$$S_{R \times S^2} = \frac{1}{g_{R \times S^2}^2} \int dt \frac{d\Omega_2}{\mu^2} \text{Tr} \left(\frac{1}{2} (\partial_t X_i)^2 - \frac{1}{2} \left(\mu X_i + i\epsilon_{ijk} (\mu L_j^{(0)} X_k - \frac{1}{2} [X_j, X_k]) \right)^2 \right)$$

古典解:

$$\mu X_i + i\mu\epsilon_{ijk} L_j^{(0)} X_k - \frac{i}{2}\epsilon_{ijk} [X_j, X_k] = 0,$$

$\vec{X} = \chi \vec{e}_r + a_1 \vec{e}_\varphi - a_2 \vec{e}_\theta$, と展開して、

$$\hat{a}_1 = 0,$$

$$\hat{a}_2 = -\frac{\cos \theta \mp 1}{\sin \theta} \hat{\chi},$$

$$\hat{\chi} = \mu \text{diag}(\cdots, \underbrace{q_{s-1}, \cdots, q_{s-1}}_{N_{s-1}}, \underbrace{q_s, \cdots, q_s}_{N_s}, \underbrace{q_{s+1}, \cdots, q_{s+1}}_{N_{s+1}}, \cdots),$$

$$q_s = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \cdots$$

モノポールchargeと縮重度を適切に選ぶことで、 S^1 方向の運動量を実現される。

$R \times S^3 \leftarrow R \times S^2$ prescription

$R \times S^2$ 上のSYMは、以下の極限で $R \times S^3$ 上のSYMのplanar limitを再現する:

場を古典解の周りで展開:

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi \rightarrow \tilde{P} + \chi \\ a_2 \rightarrow -\frac{\cos \theta \mp 1}{\sin \theta} \tilde{P} + a_2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} -\frac{T}{2} \qquad \qquad \qquad \frac{T}{2} \\ \text{-----} \rightarrow p_i \end{array}$$
$$\tilde{P} = \mu \times \text{diag} \left(-\frac{T}{2}, -\frac{T}{2} + 1, \dots, \frac{T}{2} \right) \otimes \mathbf{1}_{N \times N}$$

極限:

$$N \rightarrow \infty \quad T \rightarrow \infty \quad g_{R \times S^2}^2 = \frac{\mu g_{R \times S^3}^2}{4\pi}$$

SYM on $R \times S^2 \leftarrow PWMM$

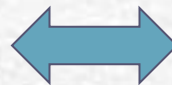
Fuzzy sphereの可換極限により、 S^2 上の理論が実現される。

ゲージ場部分の作用:

$$S_{PW}^{gauge} = \frac{1}{g_{PW}^2} \int \frac{dt}{\mu^2} \text{Tr} \left(\frac{1}{2} (\partial_t X_i)^2 - \frac{1}{2} \left(\mu X_i - \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} [X_j, X_k] \right)^2 \right)$$

古典解:

$$[X_i, X_j] = -i\mu\epsilon_{ijk}X_k.$$



$$\hat{X}_i = -\mu L_i$$

※任意のSU(2)の表現に比例、一般に可約

表現次元と表現の縮重度を適切に選ぶことで、望みのモノポール chargeを持つ配位の周りの S^2 上の理論が実現される。

Fuzzy sphere harmonics

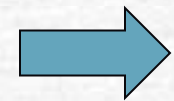
(2j+1) × (2j'+1) 長方形行列 M を SU(2) のスピンの j 表現で展開する:

$$M = \sum_{r,r'} M_{rr'} |jr\rangle\langle j'r'|.$$

$$\left(\begin{matrix} (2j'+1) \\ \blacksquare \\ (2j+1) \end{matrix} \right)$$

線形写像 $L_i \circ$ を定義:

$$L_i \circ |jr\rangle\langle j'r'| \equiv L_i^{[j]} |jr\rangle\langle j'r'| - |jr\rangle\langle j'r'| L_i^{[j']},$$



$$[L_i \circ, L_j \circ] = i \epsilon_{ijk} L_k \circ.$$

Fuzzy sphere harmonics:

$$\hat{Y}_{Jm}^{(jj')} = \sqrt{N_0} \sum_{r,r'} (-1)^{-j+r'} C_{jr j'-r'}^{Jm} |jr\rangle\langle j'r'|,$$

$$\left\{ \begin{aligned} L_{\pm} \circ \hat{Y}_{Jm}^{(jj')} &= \sqrt{(J \mp m)(J \pm m + 1)} \hat{Y}_{Jm \pm 1}^{(jj')}, \\ L_3 \circ \hat{Y}_{Jm}^{(jj')} &= m \hat{Y}_{Jm}^{(jj')}, \\ L_i \circ L_i \circ \hat{Y}_{Jm}^{(jj')} &= J(J+1) \hat{Y}_{Jm}^{(jj')}. \end{aligned} \right.$$

Fuzzy sphereの可換極限

$$\begin{aligned}
 (2j' + 1) &\rightarrow \infty & N_0 = j + j' + 1 &\rightarrow \infty \\
 \left(\hat{Y}_{Jm}^{jj'} \right) & & j - j' = q &= \text{fixed} \\
 (2j + 1) &\rightarrow \infty & &
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{N_0} \text{tr}(\hat{Y}_{J_1 m_1}^{(j'j)} \dagger \hat{Y}_{J_2 m_2}^{(j'j'')} \hat{Y}_{J_3 m_3}^{(j''j)})$$



$$\int \frac{d\Omega_2}{4\pi} \left(Y_{J_1 m_1 q_1} \right)^* Y_{J_2 m_2 q_2} Y_{J_3 m_3 q_3}$$

$\left[Y_{Jmq} : \text{monopole charge } q \text{ の monopole harmonics} \right]$



$$j - j' \leftrightarrow q$$

$$L_i \circ \leftrightarrow L_i^{(q)}$$

$$\frac{1}{N_0} \text{tr} \leftrightarrow \int \frac{d\Omega_2}{4\pi}$$

$R \times S^2 \leftarrow$ PWMM prescription

例えば、

monopole配位: $\chi = \mu \times \text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_s, \dots) \otimes \mathbf{1}_{N \times N}$

の周りの理論を再現したい場合、

場を古典解の周りで展開: $X_i \rightarrow \mu L_i + X_i$

ただし、 $L_i^{[N_0]}$: SU(2)の N_0 次元表現として、

$$L_i = \begin{pmatrix} L_i^{[N_0+2q_1]} & & & & & \\ & L_i^{[N_0+2q_2]} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & L_i^{[N_0+2q_s]} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}_{N \times N}$$

$$N_0 \rightarrow \infty \quad N \rightarrow \infty \quad g_{R \times S^2}^2 = 4\pi \frac{g_{PW}^2}{N_0}$$

$R \times S^3 \rightarrow R \times S^2$

locally, $S^3 \sim S^2 \times S^1$

$$S_{R \times S^3} = \frac{1}{g_{R \times S^3}^2} \int dt \frac{d\Omega_3}{(\mu/2)^3} \text{Tr} \left(-\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} - \frac{1}{2} D_a \Phi_{AB} D^a \Phi^{AB} - \frac{1}{2} \Phi_{AB} \Phi^{AB} \right. \\ \left. + \frac{1}{4} [\Phi_{AB}, \Phi_{CD}] [\Phi^{AB}, \Phi^{CD}] + i\psi_A^\dagger D_t \psi^A + i\psi_A^\dagger \sigma^i D_i \psi^A \right. \\ \left. + \psi_A^\dagger \sigma^2 [\Phi^{AB}, (\psi_B^\dagger)^T] - \psi^{AT} \sigma^2 [\Phi_{AB}, \psi^B] \right).$$

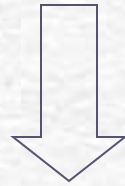


Dimensional reduction
(dropping S^1 derivative)

$$S_{R \times S^2} = \frac{1}{g_{R \times S^2}^2} \int dt \frac{d\Omega_2}{\mu^2} \text{Tr} \left(\frac{1}{2} (D_t \vec{X} - i\mu \vec{L}^{(0)} A_t)^2 - \frac{1}{2} (\mu \vec{X} + i(\mu \vec{L}^{(0)} \times \vec{X} - \vec{X} \times \vec{X}))^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} D_t \Phi_{AB} D_t \Phi^{AB} + \frac{1}{2} \vec{D} \Phi_{AB} \cdot \vec{D} \Phi^{AB} - \frac{\mu^2}{8} \Phi_{AB} \Phi^{AB} + \frac{1}{4} [\Phi_{AB}, \Phi_{CD}] [\Phi^{AB}, \Phi^{CD}] \right. \\ \left. + i\psi_A^\dagger D_t \psi^A - \psi_A^\dagger \vec{\sigma} \cdot \vec{D} \psi^A - \frac{3\mu}{4} \psi_A^\dagger \psi^A + \psi_A^\dagger \sigma^2 [\Phi^{AB}, (\psi_B^\dagger)^T] - \psi^{AT} \sigma^2 [\Phi_{AB}, \psi^B] \right), \quad (3.2)$$

$R \times S^2 \rightarrow PWMM$

$$\begin{aligned}
 S_{R \times S^2} = & \frac{1}{g_{R \times S^2}^2} \int dt \frac{d\Omega_2}{\mu^2} \text{Tr} \left(\frac{1}{2} (D_t \vec{X} - i\mu \vec{L}^{(0)} A_t)^2 - \frac{1}{2} (\mu \vec{X} + i(\mu \vec{L}^{(0)} \times \vec{X} - \vec{X} \times \vec{X}))^2 \right. \\
 & + \frac{1}{2} D_t \Phi_{AB} D_t \Phi^{AB} + \frac{1}{2} \vec{D} \Phi_{AB} \cdot \vec{D} \Phi^{AB} - \frac{\mu^2}{8} \Phi_{AB} \Phi^{AB} + \frac{1}{4} [\Phi_{AB}, \Phi_{CD}] [\Phi^{AB}, \Phi^{CD}] \\
 & \left. + i\psi_A^\dagger D_t \psi^A - \psi_A^\dagger \vec{\sigma} \cdot \vec{D} \psi^A - \frac{3\mu}{4} \psi_A^\dagger \psi^A + \psi_A^\dagger \sigma^2 [\Phi^{AB}, (\psi_B^\dagger)^T] - \psi^{AT} \sigma^2 [\Phi_{AB}, \psi^B] \right), \tag{3.2}
 \end{aligned}$$



Dimensional reduction
(dropping S^2 derivative)

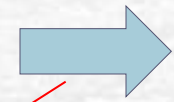
$$\begin{aligned}
 S_{PW} = & \frac{1}{g_{PW}^2} \int \frac{dt}{\mu^2} \text{Tr} \left(\frac{1}{2} (D_t X_i)^2 - \frac{1}{2} (\mu X_i - \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} [X_j, X_k])^2 + \frac{1}{2} D_t \Phi_{AB} D_t \Phi^{AB} - \frac{\mu^2}{8} \Phi_{AB} \Phi^{AB} \right. \\
 & + \frac{1}{2} [X_i, \Phi_{AB}] [X_i, \Phi^{AB}] + \frac{1}{4} [\Phi_{AB}, \Phi_{CD}] [\Phi^{AB}, \Phi^{CD}] + i\psi_A^\dagger D_t \psi^A \\
 & \left. - \frac{3\mu}{4} \psi_A^\dagger \psi^A + \psi_A^\dagger \sigma^i [X_i, \psi^A] + \psi_A^\dagger \sigma^2 [\Phi^{AB}, (\psi_B^\dagger)^T] - (\psi^A)^T \sigma^2 [\Phi_{AB}, \psi^B] \right). \tag{3.4}
 \end{aligned}$$

フーリエモード正則化

[Hanada-Nishimura-Takeuchi '07]

まず、 $t=[0, \beta]$ として、**IR cutoff** を課す:

$$X_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{X}_{i,n} e^{i\omega n t}$$



$$X_i(t) = \sum_{n=-\Lambda}^{\Lambda} \tilde{X}_{i,n} e^{i\omega n t}$$

$$\omega \equiv \frac{2\pi}{\beta}$$

フーリエモード cutoff

この正則化は一般的にはゲージ不変性を壊すが、**さらに、モードの数を制限し、UV cutoff を課す**、**1次元の場合は壊さない**

Staticかつ対角なゲージに取ることができるので、**壊さない**:

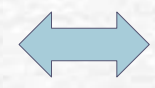
$$A(t) = \frac{1}{\beta} \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$$



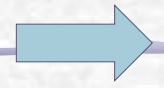
$$S_{\text{FP}} = - \sum_{a < b} 2 \ln \left| \sin \frac{\alpha_a - \alpha_b}{2} \right|$$

residual gauge symmetry

$$\left\{ \begin{array}{l} X_i \mapsto g X_i g^\dagger \\ A \mapsto g A g^\dagger + i g \partial_t g^\dagger \\ g(t) = \text{diag}(e^{i\omega \nu_1 t}, \dots, e^{i\omega \nu_N t}) \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{X}_{i,n}^{ab} \mapsto \tilde{X}_{i,n-\nu_a+\nu_b}^{ab} \\ \alpha_a \mapsto \alpha_a + 2\pi \nu_a \end{array} \right.$$



$-\pi < \alpha_a \leq \pi$ と取れる

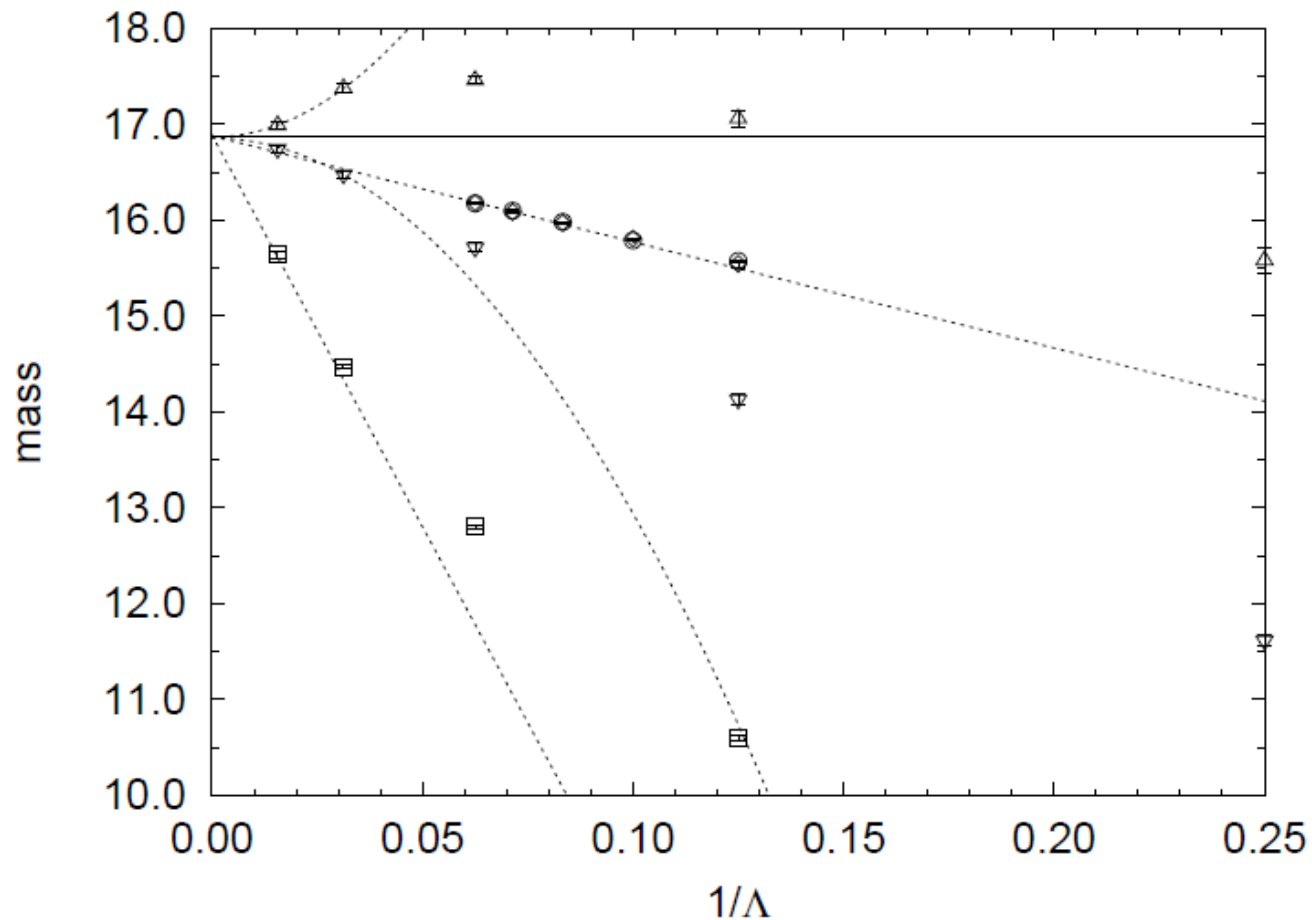


FIG. 1: The circles (diamonds) are the mass for the boson (fermion) obtained by our method for $\Lambda = 8, 10, 12, 14, 16$. The triangles (inverted triangles) are the mass for the boson (fermion) obtained by Giedt et al. [1] with the $O(a)$ -improved lattice action, and the squares are the results obtained by Catterall and Gregory [2] with the lattice action preserving half of SUSY, hence degenerate. The horizontal line represents the exact result, and the dotted lines represent the expected behaviors at large Λ .

正則化の特徴のまとめ

$\mathcal{N} = 4$ $SU(N)$ SYM on \mathbb{R}^4



① 共形変換

$\mathcal{N} = 4$ $SU(N)$ SYM on $\mathbb{R} \times S^3$



② Large N reduction

同等な1次元行列模型(PWMM, BMN)



③ フーリエモード正則化

モンテカルロ・シミュレーション

(Rational Hybrid Monte Carlo)

・massiveになるので、quenchが必要ない

・ゲージ対称性
・SU(2|4)対称性(16 supercharge)をあらわに保つ

・共形対称性を破っているが、極限で回復すると期待されており、実際1-loopレベルで回復することが示されている。

・Non-planarの寄与 $\sim \mathcal{O}(\frac{1}{N^2})$

・UV/IR mixingなどの非可換性はNon-planarの寄与であり、極限では消えると考えられている。

・厳密にはSUSYを破っているが、回復が早いことが知られており、尊重している

バックグラウンドの安定性

インスタントが出て、Fuzzy sphereが他の表現へ行ってしまうことがある。

