July 20-24, Kyoto

自由なOverlap Fermionの系におけるReflection Positivityの証明

Kouta USUI
Department of Physics, the University of Tokyo, Japan
in collaboration with Yoshio Kikukawa (Univ. of Tokyo)

based on arXiv:1005.3751

Contents

Setup

- 4次元の立方格子 $\Lambda = [-L+1, L]^4 \subset \mathbb{Z}^4$
- Λの境界条件：

周期境界条件　（空間方向）
反周期境界条件　（時間方向）

- フェルミオン場 $\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\alpha(x)\}_{\alpha, x\in\Lambda}$
- フェルミオン場の生成するグラスマン代数 $\mathcal{A}$
- 時刻が正（負）のサイト Λ_+ (Λ_-)
- $\Lambda_\pm$の上の場が生成するグラスマン代数 $\mathcal{A}_\pm$
- フェルミオンの格子作用 (D_Λ: Λ上のDirac演算子, D: $\mathbb{Z}^4$上のDirac演算子)

$$A(\bar{\psi}, \psi) = \sum_{x\in\Lambda} \bar{\psi}(x) D_\Lambda \psi(x)$$

$$D_\Lambda(x, y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^4} (-1)^{n_0} D(x + 2nL, y)$$

- 期待値汎関数 $\langle\cdot\rangle$

$$\langle F\rangle = \frac{1}{Z}\int D[\psi]D[\bar{\psi}]\mathrm{e}^{A(\bar{\psi},\psi)}F(\bar{\psi},\psi)$$

Reflection Positivity (RP)

θ reflection を次のように定義する：

- サイトに対して：$\theta(t, \boldsymbol{x}) = (-t+1, \boldsymbol{x})$ ($t = 1/2$ 平面に関する時間反転)
- 場に対して：

$$\theta\psi(x) = \bar{\psi}(\theta x)\gamma_0, \quad \theta\bar{\psi}(x) = \gamma_0\psi(\theta x)$$

- このθを$\mathcal{A}$ に拡張する：

$$\theta(FG) = \theta(G)\theta(F)$$

$$\theta(\alpha F + \beta G) = \alpha^*\theta(F) + \beta^*\theta(G)$$

定義. 格子理論を定義する期待値汎関数が，任意の$F \in \mathcal{A}_+$ に対して

$$\langle\theta(F)F\rangle \geq 0$$

を満たすとき，この理論はReflection Positiveであるという．

この条件は，格子理論からUnitarityを持つ量子論を再構成できることを保証する．

[K. Osterwalder, R. Schrader '73]
[K. Osterwalder, E. Seiler '78]

Wilson Fermion

- Wilson Dirac **演算子**.

$$D_{\mathrm{w}} = \frac{1}{2}\sum_{\mu=0}^{3}\gamma_\mu(\partial_\mu - \partial_\mu^\dagger) + \frac{1}{2}\sum_{\mu=0}^{3}\partial_\mu\partial_\mu^\dagger$$

- Wilson **フェルミオンに関しては，自由フェルミオンだけでなく，ゲージ相互作用がある場合も** Reflection Positivity **が満たされることが厳密に示されている．**

[M. Lüscher '77]
[R. Osterwalder, E. Seiler '78]
[P. Menotti, A. Pelissetto '87]

- **この意味で，**Wilson **フェルミオンを用いた応用（例えば格子** QCD **における数値計算など）は十分に基礎付けがされているといえる．**

Overlap Fermion

- Overlap Dirac **演算子**

$$D = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{X}{\sqrt{X^\dagger X}}\Big), \quad X = D_{\mathrm{w}} - m, \quad 0 < m < 2$$

[H. Neuberger '98]

- Overlap **フェルミオンの** Reflection positivity **の完全な証明は今までになされていない．**

[M. Lüscher '01][M. Creutz '04][J. E. Mandula '09]

- **この発表の主な結果**:

> **定理.** **自由な** overlap Dirac fermion **の系は，** Reflection Positive **である．（ただし，** $0 < m \leq 1$ **とする）．**

[Y. Kikukawa and KU, arXiv:1005.3751]

- **従って，ゲージ相互作用の無い場合においては，格子上の** Overlap **フェルミオンの系は実際に** Unitarity **を満たす量子論になっていることが厳密に示されたことになる．**

定理の証明

- 証明のOutline ([R. Osterwalder, E. Seiler '78] にならう)
  - Lemma を4つ用意する．((i) から (iv))
  - これらのLemmaから，定理が直ちに従うことを示す
  - Lemma を示す．((iii) (iv) のみをここでは示す)

定理の証明

- **証明の** Outline ([R. Osterwalder, E. Seiler '78] **にならう**)
  - Lemma **を** 4 **つ用意する．((i) から (iv))**
  - **これらの** Lemma **から，定理が直ちに従うことを示す**
  - Lemma **を示す．**((iii) (iv) **のみをここでは示す**)
- **準備**：

$$\mathcal{P} := \left\{ \sum_j \theta(F_j^+) F_j^+ \ : \ F_j^+ \in \mathcal{A}_+ \right\}$$

$$\langle F \rangle_0 := \int D[\psi] D[\bar{\psi}] F(\bar{\psi}, \psi)$$

$$A = A_+ + A_- + \Delta A, \quad A_+ \in \mathcal{A}_+, A_- \in \mathcal{A}_-$$

- 4 **つの** Lemma：
  - Lemma (i) If $F \in \mathcal{P}$, then $\langle F \rangle_0 \geq 0$ [R. Osterwalder, E. Seiler '78]
  - Lemma (ii) $F, G \in \mathcal{P}$ implies $FG \in \mathcal{P}$ [R. Osterwalder, E. Seiler '78]
  - Lemma (iii) $A_- = \theta(A_+)$
  - Lemma (iv) $\Delta A \in \mathcal{P}$

定理の証明

- **証明の** Outline ([R. Osterwalder, E. Seiler '78] **にならう**)
  - Lemma **を** 4 **つ用意する．((i) から (iv))**
  - **これらの** Lemma **から，定理が直ちに従うことを示す**
  - Lemma **を示す．**((iii) (iv) **のみをここでは示す**)
- **準備**：

$$\mathcal{P} := \overline{\left\{ \sum_j \theta(F_j^+) F_j^+ \ : \ F_j^+ \in \mathcal{A}_+ \right\}}$$

$$\langle F \rangle_0 := \int D[\psi] D[\bar{\psi}] F(\bar{\psi}, \psi)$$

$$A = A_+ + A_- + \Delta A, \quad A_+ \in \mathcal{A}_+, A_- \in \mathcal{A}_-$$

- 4 **つの** Lemma：
  - Lemma (i) If $F \in \mathcal{P}$, then $\langle F \rangle_0 \geq 0$ [R. Osterwalder, E. Seiler '78]
  - Lemma (ii) $F, G \in \mathcal{P}$ implies $FG \in \mathcal{P}$ [R. Osterwalder, E. Seiler '78]
  - Lemma (iii) $A_- = \theta(A_+)$
  - Lemma (iv) $\Delta A \in \mathcal{P}$

定理の証明

- **証明の**Outline ([R. Osterwalder, E. Seiler '78] **にならう**)
  - Lemma **を**4**つ用意する．(**(i) **から** (iv)**)**
  - **これらの**Lemma**から，定理が直ちに従うことを示す**
  - Lemma **を示す．**((iii) (iv) **のみをここでは示す**)

定理の証明

- **証明の** Outline ([R. Osterwalder, E. Seiler '78] **にならう**)
  - Lemma **を** 4 **つ用意する．((i) から** (iv)**)**
  - **これらの** Lemma **から，定理が直ちに従うことを示す**
  - Lemma **を示す．**((iii) (iv) **のみをここでは示す**)
- Remember four lemmas :

  - Lemma (i) If $F \in \mathcal{P}$, then $\langle F \rangle_0 \geq 0$
  - Lemma (ii) $F, G \in \mathcal{P}$ implies $FG \in \mathcal{P}$
  - Lemma (iii) $A_- = \theta(A_+)$
  - Lemma (iv) $\Delta A \in \mathcal{P}$

- **これらの** Lemma **から定理が次のように示せる**：[R. Osterwalder, E. Seiler '78]

$$\left\langle \mathrm{e}^{A}\, \theta(F)F \right\rangle_0 = \left\langle \mathrm{e}^{A_+ + A_- + \Delta A}\, \theta(F)F \right\rangle_0 = \left\langle \mathrm{e}^{A_+ + \theta(A_+) + \Delta A}\, \theta(F)F \right\rangle_0 \quad \text{by (iii)}$$

$$= \left\langle \underbrace{\theta(\mathrm{e}^{A_+})\mathrm{e}^{A_+}\, \mathrm{e}^{\Delta A}}_{\in\mathcal{P}\ \text{(by (ii),(iv))}} \underbrace{\theta(F)F}_{\in\mathcal{P}} \right\rangle_0 \geq 0 \quad \text{by (i) and (ii)}$$

$$\Longrightarrow \langle \theta(F)F \rangle = \left\langle \mathrm{e}^{A} \right\rangle_0^{-1} \left\langle \mathrm{e}^{A}\, \theta(F)F \right\rangle_0 \geq 0.$$

定理の証明

- 証明の Outline ([R. Osterwalder, E. Seiler '78] にならう)
  - Lemma を4つ用意する．((i) から (iv))
  - これらの Lemma から，定理が直ちに従うことを示す
  - Lemma を示す．((iii) (iv) のみをここでは示す)

定理の証明

- 証明の Outline ([R. Osterwalder, E. Seiler '78] にならう)
  - Lemma を4つ用意する．((i) から (iv))
  - これらの Lemma から，定理が直ちに従うことを示す
  - Lemma を示す．((iii) (iv) のみをここでは示す)
- Lemma (iii) $A_- = \theta(A_+)$ の証明．
  - Charge conjugation property of the overlap Dirac operator :

$$\gamma_0 D(x,y)^\dagger \gamma_0 = D(\theta y, \theta x)$$

  - We can explicitly calculate $\theta(A_+)$:

$$\begin{aligned}
\theta(A_+) &= \sum_{x\in\Lambda_+}\sum_{y\in\Lambda_+} \theta\Big(\bar\psi(x) D_\Lambda(x,y)\psi(y)\Big) \\
&= \sum_{x\in\Lambda_+}\sum_{y\in\Lambda_+} \bar\psi(\theta y)\underbrace{\gamma_0 D_\Lambda(x,y)^\dagger\gamma_0}_{=D(\theta y,\theta x)}\psi(\theta x) \\
&= \sum_{x'\in\Lambda_-}\sum_{y'\in\Lambda_-} \bar\psi(x') D_\Lambda(x',y')\psi(y') \quad x' := \theta y,\ y' := \theta x \\
&= A_-
\end{aligned}$$

定理の証明

- **証明の** Outline ([R. Osterwalder, E. Seiler '78] **にならう**)
  - Lemma **を** 4 **つ用意する．**((i) **から** (iv))
  - **これらの** Lemma **から，定理が直ちに従うことを示す**
  - Lemma **を示す．**((iii) (iv) **のみをここでは示す**)
- Lemma (iv) $\Delta A \in \mathcal{P}$ **の証明．**

$$\Delta A = \sum_{x\in\Lambda_+}\sum_{y\in\Lambda_-}\bar{\psi}(x)D_\Lambda(x,y)\psi(y) + \sum_{x\in\Lambda_-}\sum_{y\in\Lambda_+}\bar{\psi}(x)D_\Lambda(x,y)\psi(y) \in \mathcal{P}$$

- Strategy :
  1. Dirac **演算子** D **のスペクトル表示を求める．**
  2. **有限格子上の演算子** D_Λ **のスペクトル表示を求める．**

$$D_\Lambda(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^4}(-1)^{n_0}D(x+2nL,y)$$

  3. ΔA **を次の形に書き下す．**

$$\Delta A = \sum_{\boldsymbol{p}}\int_{E_1}^{\infty}\frac{dE}{2\pi}\frac{1}{V}\Big[\theta(C_{E,\boldsymbol{p}})C_{E,\boldsymbol{p}} + \theta(D_{E,\boldsymbol{p}})D_{E,\boldsymbol{p}}\Big] \in \mathcal{P}$$

- Spectral representation of D :

$$D(x,y)\Big|_{x_0>y_0} = \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dp_0}{2\pi}\, \mathrm{e}^{ip_0(x_0-y_0)} \mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \frac{X(p_0,\boldsymbol{p})}{2\sqrt{X^\dagger X(p_0,\boldsymbol{p})}}$$

$$= \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \int_{E_1}^{\infty} \frac{dE}{2\pi}\, \mathrm{e}^{-E(x_0-y_0)} \mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \frac{X(iE,\boldsymbol{p})}{\sqrt{-X^\dagger X(iE,\boldsymbol{p})}}$$

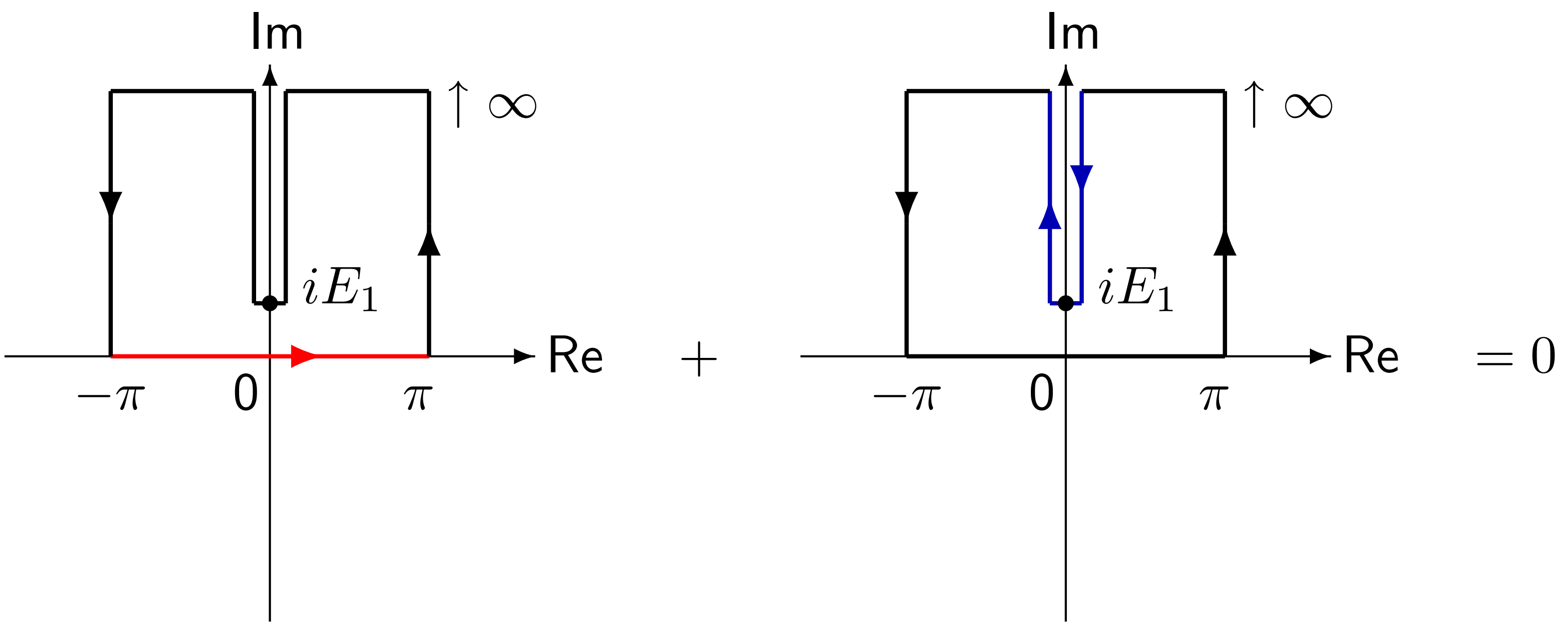

図1　積分経路

- Spectral representation of D_Λ :

$$\begin{cases} D(x,y)\Big|_{x_0>y_0} = \int_{E_1}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\, \mathrm{e}^{-E(x_0-y_0)} \mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \frac{X(iE,\boldsymbol{p})}{\sqrt{-X^\dagger X(iE,\boldsymbol{p})}} \\ D_\Lambda(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^4} (-1)^{n_0} D(x+2nL,y) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad D_\Lambda(x,y)\Big|_{x_0>y_0} = \sum_{\boldsymbol{p}} \int_{E_1}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} \frac{1}{V} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-2EL}} \mathrm{e}^{-E(x_0-y_0)} \mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \frac{X(iE,\boldsymbol{p})}{\sqrt{-X^\dagger X(iE,\boldsymbol{p})}}$$
$$+ \sum_{\boldsymbol{p}} \int_{E_1}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} \frac{1}{V} \frac{\mathrm{e}^{-2EL}}{1+\mathrm{e}^{-2EL}} \mathrm{e}^{+E(x_0-y_0)} \mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \frac{-X(-iE,\boldsymbol{p})}{\sqrt{-X^\dagger X(iE,\boldsymbol{p})}}$$

- **目標の式** :

$$\sum_{x\in\Lambda_+} \sum_{y\in\Lambda_-} \bar{\psi}(x) D_\Lambda(x,y) \psi(y) = \sum_{\boldsymbol{p}} \int_{E_1}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} \frac{1}{V} \Big[\theta(C_{E,\boldsymbol{p}}) C_{E,\boldsymbol{p}} + \theta(D_{E,\boldsymbol{p}}) D_{E,\boldsymbol{p}} \Big]$$

- X **の重要な性質** :

スピノルの足を持つ行列$Y_\pm(E,\boldsymbol{p})$ **が存在して**

$$X(\pm iE,\boldsymbol{p}) = \mp\gamma_0 Y_\pm^\dagger Y_\pm(E,\boldsymbol{p}) \quad (E \geq E_1).$$

- Spectral representation of D_Λ :

$$\begin{cases} D(x,y)\Big|_{x_0>y_0} = \int_{E_1}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\, \mathrm{e}^{-E(x_0-y_0)} \mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \frac{X(iE,\boldsymbol{p})}{\sqrt{-X^\dagger X(iE,\boldsymbol{p})}} \\ D_\Lambda(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^4} (-1)^{n_0} D(x+2nL,y) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow\ D_\Lambda(x,y)\Big|_{x_0>y_0} = \sum_{\boldsymbol{p}} \int_{E_1}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} \frac{1}{V} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-2EL}} \mathrm{e}^{-E(x_0-y_0)} \mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \frac{-\gamma_0 Y_+^\dagger Y_+(E,\boldsymbol{p})}{\sqrt{-X^\dagger X(iE,\boldsymbol{p})}}$$
$$+\sum_{\boldsymbol{p}} \int_{E_1}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} \frac{1}{V} \frac{\mathrm{e}^{-2EL}}{1+\mathrm{e}^{-2EL}} \mathrm{e}^{+E(x_0-y_0)} \mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \frac{-\gamma_0 Y_-^\dagger Y_-(E,\boldsymbol{p})}{\sqrt{-X^\dagger X(iE,\boldsymbol{p})}}$$

- **目標の式** :

$$\sum_{x\in\Lambda_+} \sum_{y\in\Lambda_-} \bar\psi(x) D_\Lambda(x,y)\psi(y) = \sum_{\boldsymbol{p}} \int_{E_1}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} \frac{1}{V} \Big[\theta(C_{E,\boldsymbol{p}}) C_{E,\boldsymbol{p}} + \theta(D_{E,\boldsymbol{p}}) D_{E,\boldsymbol{p}} \Big]$$

- X **の重要な性質** :

スピノルの足を持つ行列 $Y_\pm(E,\boldsymbol{p})$ **が存在して**

$$X(\pm iE,\boldsymbol{p}) = \mp\gamma_0 Y_\pm^\dagger Y_\pm(E,\boldsymbol{p}) \quad (E \geq E_1).$$

- **目標の式**：

$$\sum_{x\in\Lambda_+}\sum_{y\in\Lambda_-}\bar{\psi}(x)D_\Lambda(x,y)\psi(y)=\sum_{\boldsymbol{p}}\int_{E_1}^{\infty}\frac{dE}{2\pi}\frac{1}{V}\left[\theta(C_{E,\boldsymbol{p}})C_{E,\boldsymbol{p}}+\theta(D_{E,\boldsymbol{p}})D_{E,\boldsymbol{p}}\right]$$

- D_Λ **のスペクトル表示を求めた**：

$$\begin{aligned}D_\Lambda(x,y)\Big|_{x_0-y_0>0}&=\sum_{\boldsymbol{p}}\int_{E_1}^{\infty}\frac{dE}{2\pi}\frac{1}{V}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-2EL}}\mathrm{e}^{-E(x_0-y_0)}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\frac{-\gamma_0Y_+^\dagger Y_+(E,\boldsymbol{p})}{\sqrt{-X^\dagger X(iE,\boldsymbol{p})}}\\&+\sum_{\boldsymbol{p}}\int_{E_1}^{\infty}\frac{dE}{2\pi}\frac{1}{V}\frac{\mathrm{e}^{-2EL}}{1+\mathrm{e}^{-2EL}}\mathrm{e}^{E(x_0-y_0)}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\frac{-\gamma_0Y_-^\dagger Y_-(E,\boldsymbol{p})}{\sqrt{-X^\dagger X(iE,\boldsymbol{p})}}\end{aligned}$$

- $C_{E,\boldsymbol{p}}$ **と** $D_{E,\boldsymbol{p}}$ **を次のように定義する**：

$$C_{E,\boldsymbol{p}}=\sqrt{\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-2EL}}}\sum_{x\in\Lambda_+}\bar{\psi}(x)\gamma_0\frac{Y_+^\dagger(E,\boldsymbol{p})}{(-X^\dagger X(iE,\boldsymbol{p}))^{1/4}}\mathrm{e}^{-Ex_0}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}},$$

$$D_{E,\boldsymbol{p}}=\sqrt{\frac{\mathrm{e}^{-2EL}}{1+\mathrm{e}^{-2EL}}}\sum_{x\in\Lambda_+}\bar{\psi}(x)\gamma_0\frac{Y_-^\dagger(E,\boldsymbol{p})}{(-X^\dagger X(iE,\boldsymbol{p}))^{1/4}}\mathrm{e}^{Ex_0}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}$$

$$
\begin{aligned}
D_\Lambda(x,y)\Big|_{x_0-y_0>0} &= \sum_{\boldsymbol{p}}\int_{E_1}^{\infty}\frac{dE}{2\pi}\frac{1}{V}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-2EL}}\mathrm{e}^{-E(x_0-y_0)}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\frac{-\gamma_0 Y_+^\dagger Y_+(E,\boldsymbol{p})}{\sqrt{-X^\dagger X(iE,\boldsymbol{p})}} \\
&+\sum_{\boldsymbol{p}}\int_{E_1}^{\infty}\frac{dE}{2\pi}\frac{1}{V}\frac{\mathrm{e}^{-2EL}}{1+\mathrm{e}^{-2EL}}\mathrm{e}^{E(x_0-y_0)}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\frac{-\gamma_0 Y_-^\dagger Y_-(E,\boldsymbol{p})}{\sqrt{-X^\dagger X(iE,\boldsymbol{p})}}
\end{aligned}
$$

$$
C_{E,\boldsymbol{p}} = \sqrt{\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-2EL}}}\sum_{x\in\Lambda_+}\bar{\psi}(x)\gamma_0\frac{Y_+^\dagger(E,\boldsymbol{p})}{(-X^\dagger X(iE,\boldsymbol{p}))^{1/4}}\mathrm{e}^{-Ex_0}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}},
$$

$$
D_{E,\boldsymbol{p}} = \sqrt{\frac{\mathrm{e}^{-2EL}}{1+\mathrm{e}^{-2EL}}}\sum_{x\in\Lambda_+}\bar{\psi}(x)\gamma_0\frac{Y_-^\dagger(E,\boldsymbol{p})}{(-X^\dagger X(iE,\boldsymbol{p}))^{1/4}}\mathrm{e}^{Ex_0}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}
$$

- **これらの式から，**Lemma(iv)**の結論が（従って定理が）示される．**：

$$
\begin{aligned}
\sum_{x\in\Lambda_+}\sum_{y\in\Lambda_-}\bar{\psi}(x)D_\Lambda(x,y)\psi(y) &= \sum_{\boldsymbol{p}}\int_{E_1}^{\infty}\frac{dE}{2\pi}\frac{1}{V}\Big[-C_{E,\boldsymbol{p}}\theta(C_{E,\boldsymbol{p}})-D_{E,\boldsymbol{p}}\theta(D_{E,\boldsymbol{p}})\Big] \\
&= \sum_{\boldsymbol{p}}\int_{E_1}^{\infty}\frac{dE}{2\pi}\frac{1}{V}\Big[\theta(C_{E,\boldsymbol{p}})C_{E,\boldsymbol{p}}+\theta(D_{E,\boldsymbol{p}})D_{E,\boldsymbol{p}}\Big] \in \mathcal{P}
\end{aligned}
$$

格子上の$\mathcal{N}=1$ Wess-Zumino modelのReflection Positivity

- Overlap演算子を用いて$U(1)_R$対称性を保った定式化では，Free limitでのSupersymmetryを持つ．

  [K. Fujikawa, M. Ishibashi '02][Y. Kikukawa, H. Suzuki '04]

- Overlap演算子を用いた定式化において，Reflection Positivityは満たされるか？

  考察すべきは次の2点：

1. Majoranaフェルミオンに対しても，Reflection positivityが成り立つか？

2. Supersymmetryのために，Overlap演算子で定義されるbosonの系を考えることが必要．

$$S_B = \sum_{x\in\Lambda} \phi(x)^\dagger D^\dagger D(x,y)\phi(y)$$

このbosonの系に対してReflection Positvityが示せるか？

結論：1.はOKだが，2.は示せない！

Majoranaの場合

- Charge conjugation **演算子**C :

$$C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T, \quad C\gamma_5 C^{-1} = \gamma_5^T, \quad C^\dagger C = 1, \quad C^T = -C$$

- Majorana condition $\bar{\psi} = \psi^T C$ **は，**θ**反転の定義に矛盾しない．すなわち，**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta\psi(x) = \bar{\psi}(\theta x)\gamma_0 \\ \theta\bar{\psi}(x) = \gamma_0\psi(\theta x) \end{array} \right. \Longrightarrow \theta(\psi(x)) = C\gamma_0\psi(\theta x)$$

- Lemma (i)(ii)(iii)(iv) **は，この場合も成り立つことが示せる．したがって，**Majorana**フェルミオンの場合にも**Reflection Positivity**は成り立つ．**

Overlap BosonのReflection Positivity

- 証明の方針はフェルミオンの場合と同様． 結局

$$-S_B = A_+ + \theta(A_+) + \sum_j \theta(B_j)B_j, \quad A_+, B_j \in \mathcal{A}_+$$

と書けること，すなわち, 次を示す問題に帰着：

$$-\Delta S_B = -\sum_{x\in\Lambda_+, y\in\Lambda_-} \phi^\dagger(x) D^\dagger D(x,y)\phi(y) \in \mathcal{P}$$

- ΔS_B のexplicitな表式：

$$\begin{aligned}
-\Delta S_B &= -\sum_{x\in\Lambda_+, y\in\Lambda_-} \phi^\dagger(x) D^\dagger D(x,y)\phi(y) \\
&= \frac{1}{(2L)^3}\sum_{\boldsymbol{p}}\int_{E_1}^{\infty}\frac{dE}{\pi}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2EL}}\frac{\cosh E - b(\boldsymbol{p})}{\sqrt{2b(\boldsymbol{p})\cosh E - a(\boldsymbol{p})}}\times \\
&\quad \times \Big\{\theta\big(C(E,\boldsymbol{p})\big)\big(C(E,\boldsymbol{p})\big) + \theta\big(e^{-EL}C(-E,\boldsymbol{p})\big)\big(e^{-EL}C(-E,\boldsymbol{p})\big)\Big\}
\end{aligned}$$

(ただし, $C(E,\boldsymbol{p}) = \sum_{x\in\Lambda_+} \mathrm{e}^{-Ex_0}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\phi^\dagger(x) \in \mathcal{A}_+$)

Overlap BosonのReflection Positivity

- **証明の方針はフェルミオンの場合と同様． 結局**

$$-S_B = A_+ + \theta(A_+) + \sum_j \theta(B_j)B_j, \quad A_+, B_j \in \mathcal{A}_+$$

と書けること，すなわち,次を示す問題に帰着：

$$-\Delta S_B = -\sum_{x\in\Lambda_+, y\in\Lambda_-} \phi^\dagger(x) D^\dagger D(x,y)\phi(y) \in \mathcal{P}$$

- ΔS_B **の**explicit**な表式：**

$$\begin{aligned}
-\Delta S_B &= -\sum_{x\in\Lambda_+, y\in\Lambda_-} \phi^\dagger(x) D^\dagger D(x,y)\phi(y) \\
&= \frac{1}{(2L)^3} \sum_{\boldsymbol{p}} \int_{E_1}^{\infty} \frac{dE}{\pi} \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2EL}} \frac{\cosh E - b(\boldsymbol{p})}{\sqrt{2b(\boldsymbol{p})\cosh E - a(\boldsymbol{p})}} \times \\
&\quad \times \left\{ \theta\big(C(E,\boldsymbol{p})\big)\big(C(E,\boldsymbol{p})\big) + \theta\big(e^{-EL}C(-E,\boldsymbol{p})\big)\big(e^{-EL}C(-E,\boldsymbol{p})\big) \right\}
\end{aligned}$$

(**ただし,** $C(E,\boldsymbol{p}) = \sum_{x\in\Lambda_+} \mathrm{e}^{-Ex_0}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\phi^\dagger(x) \in \mathcal{A}_+$)

- $\cosh E - b(\boldsymbol{p})$ の符号は正にも負にもなる！

- 伝搬関数の Källán-Lehmann 表示：

$$(D^\dagger D)^{-1}(x,y) = \int_0^\infty \frac{dE}{\pi} \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\, \mathrm{e}^{-E(x_0-y_0)} \mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \rho(E,\boldsymbol{p})$$

$$\rho(E,\boldsymbol{p}) = (\text{isolated pole}) + \frac{(\cosh E - b(\boldsymbol{p}))\sqrt{a(\boldsymbol{p}) - 2b(p)\cosh E}}{\cosh^2 E - a(\boldsymbol{p}) + b(\boldsymbol{p})^2}\theta(E-E_1)$$

Overlap boson の Reflection Positivity は成り立たない！

- ‘安全な’運動量領域（d＝時空の次元）：

$$E \geq E_1 \implies \cosh E - b(\boldsymbol{p}) \geq 0$$

となるような，空間運動量の領域

$$\mathcal{S} = \left\{ \boldsymbol{p} \in [-\pi,\pi]^{d-1} \;:\; \sum_{k=1}^{d-1} (\cos p_k - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{d+1}{4} \right\}$$

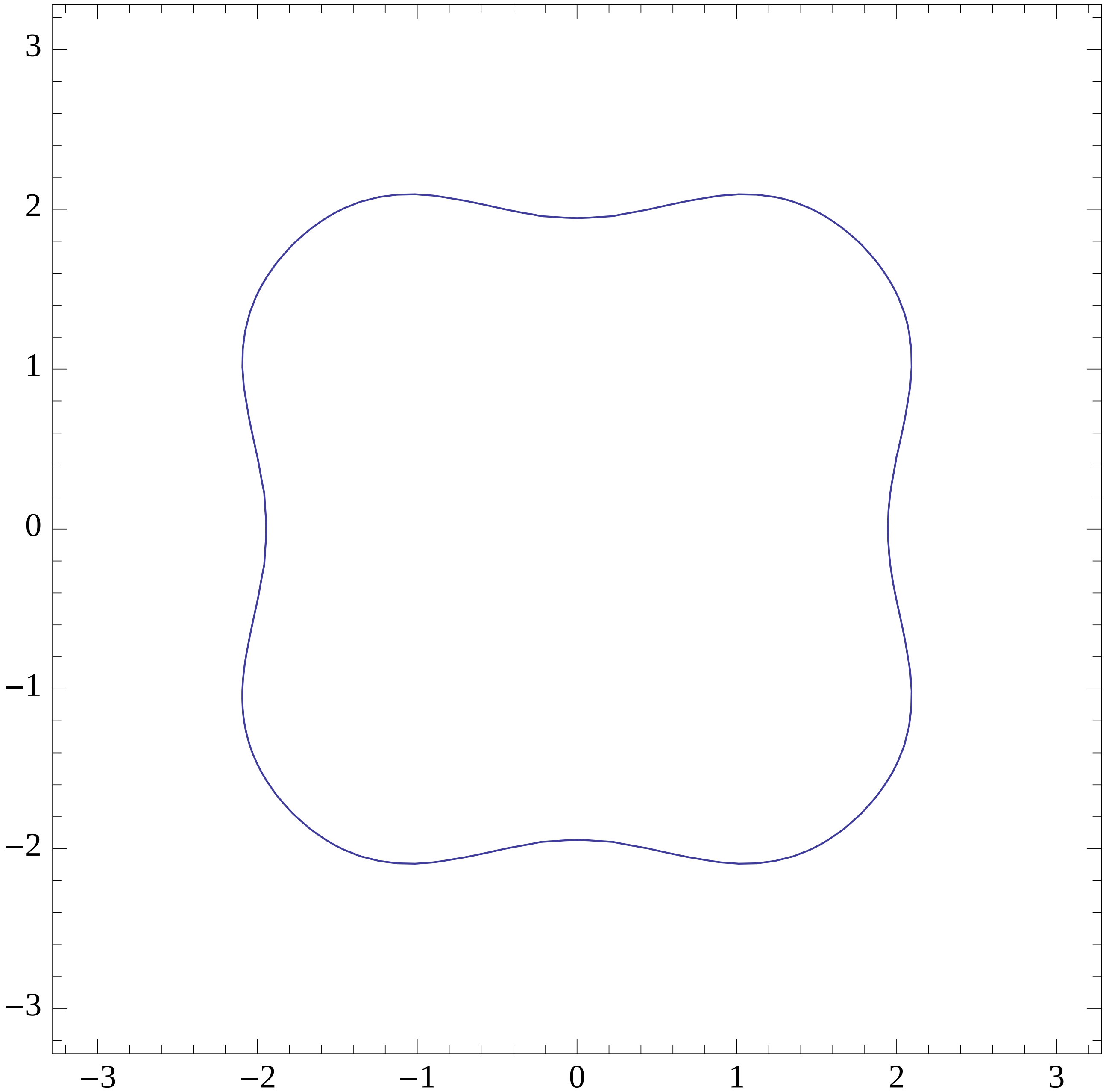

図2　$d = 1 + 2$ **の場合の** $\mathcal{S}$

- **数値例**(1)**：**$d = 2$.

$$\mathcal{S} = \{-1.95 \leq p \leq 1.95\}$$

- **数値例**(2)**：**$d = 4$**，**$p_1 = p_2 = p_3 (= p)$.

$$\mathcal{S} = \{-1.72 \leq p \leq 1.72\}$$

- **破れている範囲の運動量** $\boldsymbol{p} \notin \mathcal{S}$ **に対して，最低のエネルギー** $(d = 4)$**：**

$$\boldsymbol{p} = (\pi, \pi, \pi) \implies E_1 = \cosh^{-1} \frac{37}{12} \approx 1.79\ldots$$

$$\boldsymbol{p} = (\pi, \pi, 0) \implies E_1 = \cosh^{-1} \frac{17}{8} \approx 1.39\ldots$$

$$\boldsymbol{p} = (\pi, 0, 0) \implies E_1 = \cosh^{-1} \frac{5}{4} \approx 0.69\ldots$$

- Free limit **での** SUSY **をあきらめて，通常の** boson

$$S = \sum_{x \in \Lambda} (\partial \phi(x))^2$$

を用いると，Reflection Positivity **が成り立ちかつ，**$U(1)_R$ **対称性も持つモデルになる．**

Summery and Discussions

- 自由なOverlap Fermionの系に対するReflection Positivityの厳密な証明を与えた．これにより，この系が実際に量子論を定義していることが確認された．
- Overlap bosonの系は，Reflection Positivityを満たさない．実際，空間運動量がブリルアンゾーンの端の方にいるモードの寄与によりPositivityが破れる．
- フェルミオンに対して与えた証明は，相互作用のある模型（Chiral Yukawa模型など）にも適用することができる．
- ゲージ相互作用の入った模型(Overlap QCD)がReflection Positivityをみたすかどうかは未解決（今後の研究課題）．
  - Reflection Positivityをゲージ相互作用のある場合に証明する．
  - 実際にReflection Positivityが破れていることを示し，どの程度破れているのかを見積もる．

- **破れている範囲の運動量 $p \notin \mathcal{S}$ に対して，最低のエネルギー** $(d = 4)$**：**

$$\boldsymbol{p} = (\pi, \pi, \pi) \implies E_1 = \cosh^{-1} \frac{37}{12} \approx 1.79\ldots$$
$$\boldsymbol{p} = (\pi, \pi, 0) \implies E_1 = \cosh^{-1} \frac{17}{8} \approx 1.39\ldots$$
$$\boldsymbol{p} = (\pi, 0, 0) \implies E_1 = \cosh^{-1} \frac{5}{4} \approx 0.69\ldots$$

Majorana case

- Charge conjugation operator C :

$$C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T, \quad C\gamma_5 C^{-1} = \gamma_5^T, \quad C^\dagger C = 1, \quad C^T = -C$$

- Majorana condition $\bar{\psi} = \psi^T C$ is consistent with the definition of θ reflection :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta\psi(x) = \bar{\psi}(\theta x)\gamma_0 \\ \theta\bar{\psi}(x) = \gamma_0\psi(\theta x) \end{array} \right. \implies \theta(\psi(x)) = C\gamma_0\psi(\theta x)$$

- Lemma (i)(ii)(iii)(iv) are still true in this case, which imply that the reflection positivity condition is satisfied in Majorana case.

Weyl case

- Chiral projection

$$\psi_\pm(x) = \left(\frac{1 \pm \hat{\gamma}_5}{2}\right)\psi(x), \quad \bar{\psi}_\pm(x) = \bar{\psi}(x)\left(\frac{1 \mp \gamma_5}{2}\right)$$

$$(\hat{\gamma}_5 := \gamma_5(1 - 2D))$$

- Gamma matrices

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Chiral basis :

$$\{v^i_\pm(x) \,|\, \hat{\gamma}_5 v^i_\pm(x) = \pm v^i_\pm(x);\, i = 1, \cdots, 2(2L)^4\}$$

$$\psi_\pm(x) = \sum_i v^i_\pm(x) c^i_\pm \quad (c^i_\pm : \text{Grasmann coefficients})$$

- Path integration measure :

$$\mathcal{D}[\psi_\pm]\mathcal{D}[\bar{\psi}_\pm] = \prod_i dc^i_\pm \prod_{x \in \Lambda; \alpha_\mp} d\bar{\psi}_{\alpha_\mp}(x)$$

- Left-handed expectation $\langle\cdot\rangle^{(-)}$

$$\langle F\rangle^{(-)} := \frac{1}{Z^{(-)}}\int \mathcal{D}[\psi_-]\mathcal{D}[\bar{\psi}_-]\,\mathrm{e}^{A^{(-)}(\bar{\psi}_-,\psi_-)}F(\bar{\psi}_-,\psi_-)$$

- θ reflection : $(\alpha_+ = 1,2,\ \alpha_- = 3,4)$

$$\theta(\psi_{-\alpha_-}(x)) = \{\bar{\psi}_-(\theta x)\gamma_0\}_{\alpha_-} = \bar{\psi}_{-\alpha_+}(\theta x)$$
$$\theta(\bar{\psi}_{-\alpha_+}(x)) = \{\gamma_0\psi_-(\theta x)\}_{\alpha_+} = \psi_{-\alpha_-}(\theta x)$$

- ${\mathcal{A}_\pm}^{(-)}$:= algebra of all the polynomials of the left-handed field components $\psi_{-\alpha_-}(x)$ and $\bar{\psi}_{-\alpha_+}(x)$ on $\Lambda_\pm$
  (NOTE : The field components $\psi_{-\alpha_+}(x)$ are completely excluded from observables)
- Relations between Weyl and Dirac Expectations :

$$\left\langle F(\psi_{-\alpha},\bar{\psi}_{-\alpha_+})\right\rangle^{(-)} = \left\langle F(\psi_{\alpha_-},\bar{\psi}_{\alpha_+})\right\rangle$$

  This follows from the fact that

$$\left\{\left(\frac{1-\hat{\gamma}_5}{2}\right)D^{-1}\ \right\}_{\alpha_-,\alpha_+} = \left\{\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)D^{-1}\right\}_{\alpha_-,\alpha_+}$$

Another 定理の証明 via domain wall fermion

- Domain wall fermion with Pauli Villars fields

$$
\begin{aligned}
S_{\mathsf{DW}}(\bar{\Psi}, \Psi, \bar{\Xi}, \Xi, \bar{\Phi}, \Phi, \bar{\chi}, \chi) = & \sum_{x,s;y,t} \bar{\Psi}(x,s)(D_{\mathsf{w5}}^{\mathsf{Dir}} - m)(x,s;y,t)\Psi(y,t) \\
& + \sum_{x,s;y,t} \bar{\Xi}(x,s)(D_{\mathsf{w5}}^{\mathsf{AP}} - m)(x,s;y,t)\Xi(y,t) \\
& + \sum_{x,s;y,t} \Phi(x,s)^{\dagger}(D_{\mathsf{w5}}^{\mathsf{AP}} - m)^{\dagger}(D_{\mathsf{w5}}^{\mathsf{AP}} - m)(x,s;y,t)\Phi(y,t) \\
& + \sum_{x} \bar{\chi}(x)\chi(x)
\end{aligned}
$$

  - $D_{\mathsf{w5}}^{\mathsf{xxx}}$: Five dimensional Wilson Dirac operator with the boundary condition xxx
  - Ψ, Ξ : Fermionic fields in five dimensional space-time
  - Φ : Pauli Villars field
  - χ : Auxiliary filed in four dimensional space-time
- Relation between overlap fermion and domain wall fermion :

$$
\left\langle F(\bar{\psi}, \psi)\right\rangle_{\mathsf{overlap}} = \lim_{a_5 \to 0} \lim_{N \to \infty} \langle F(\bar{q} + \bar{\chi}, q + \chi)\rangle^{N, a_5}_{\mathsf{domain\ wall}} .
$$

  The positivity of the RHS can be shown in the free case.