場の理論と弦理論 @ 基研　２０１２年７月２３－２７日

AdS/CFT対応と物性物理

高柳　匡

京都大学基礎物理学研究所

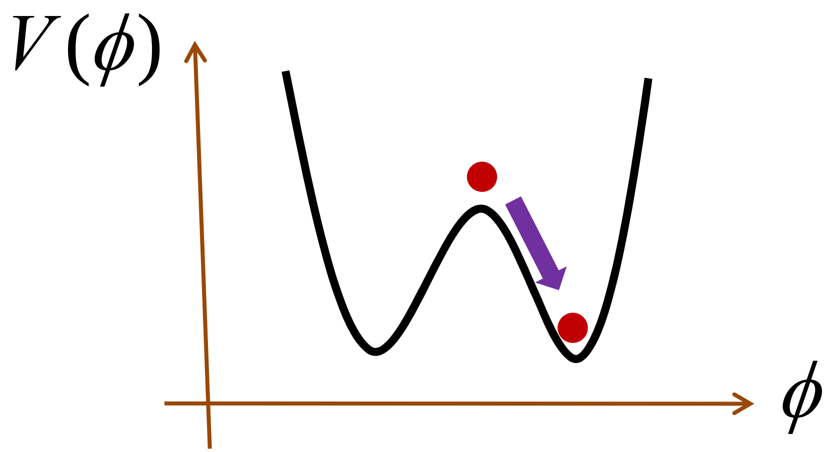
① はじめに

素粒子理論の物性理論との関わり

1960-　自発的対称性の破れ（南部-Goldstone）⟺ 超流動

Higgs現象 ⟺ 超伝導

Landau-Ginzbrug 理論（統一的視点）



素粒子理論 ⟺ 物性物理におけるユニバーサルな視点

1980- 2次元共形場理論 ⟺ 臨界現象（Ising模型など）

ビラソロ対称性 ユニバーサリティークラス

⇓ ⇓

超弦理論のT-双対性 Kramers-Wannie 双対性

（小さい半径＝大きな半径） (低温⇔高温)

双対性 ＝ 一見、全く異なる理論が実は等価になる現象

（典型例：強結合＝弱結合） $``Z[1/g] = Z[g]"$

⇒高次元の量子臨界点（共形場理論）にうまい記述はあるのか？

1997　AdS/CFT対応の発見 [Maldacena]

AdS/CFT対応

(d+2)次元反ドジッター(AdS)空間上の(量子)重力理論 ＝ (d+1)次元空間上の共形場理論(CFT)

典型例：SU(N)ゲージ理論

古典重力解(ブラックホールなど) ⇔ 強結合の高次元量子臨界点

ユニバーサル？

(～No hair 定理 etc.)

2+1 or 3+1 次元

有名な例：クォーク・グルーオンプラズマの粘性 ➡ 物性物理の同様の例？

$\eta/s=1/4\pi$

コメント

(注1)　AdS/CFT において、古典重力（一般相対論、超重力理論）の極限と等価なゲージ理論は、ラージN極限で強結合極限。

$$\left(\frac{R}{l_{pl}}\right)^4 = N \to \infty \quad , \quad \left(\frac{R}{l_{string}}\right)^4 = Ng_s = \lambda >> 1 \quad .$$

(注2)　物性物理における電磁場(U(1)ゲージ場)は、CFTのグローバル対称性と解釈し、SU(N)ゲージ対称性とは関係ない。SU(N)ゲージ対称性の起源は、物性物理のSlave-particle 法（RVB法）と類似していると推測されるが、正確な理解はまだない。

$$c_\sigma = \sum_{a=1}^{N} \underbrace{b^a}_{\substack{holon \\ (charge)}} \cdot \underbrace{s_\sigma^a}_{\substack{spinon \\ (spin)}}$$

「物性系のトイ模型？」　「ユニバーサルな性質に着目する？」

（注3） ワインバーグ・ウイッテンの定理によると、「非自明で、保存するエネルギー運動量テンソル $\partial^{\mu} T_{\mu\nu} = 0$ が存在する理論では、スピン2以上の粒子は許されない。」

⇒重力子（スピン2）は、低スピンの粒子の複合粒子と思うことができない。AdS/CFT(ホログラフィー）は、時空の一部がEmergentに構築されるので、抵触しない。

（注4） η/s=1/4π は、古典重力で、空間的に等方的な場合に適用される。最近、非等方な場合に、破れることが示された。

例１ p-wave hol. superconductor ⇒ η/s>1/4π

[Gubser-Pufu 08] [Erdmenger-Kerner-Zeller 10, See also Natsuume-Ohta 10]

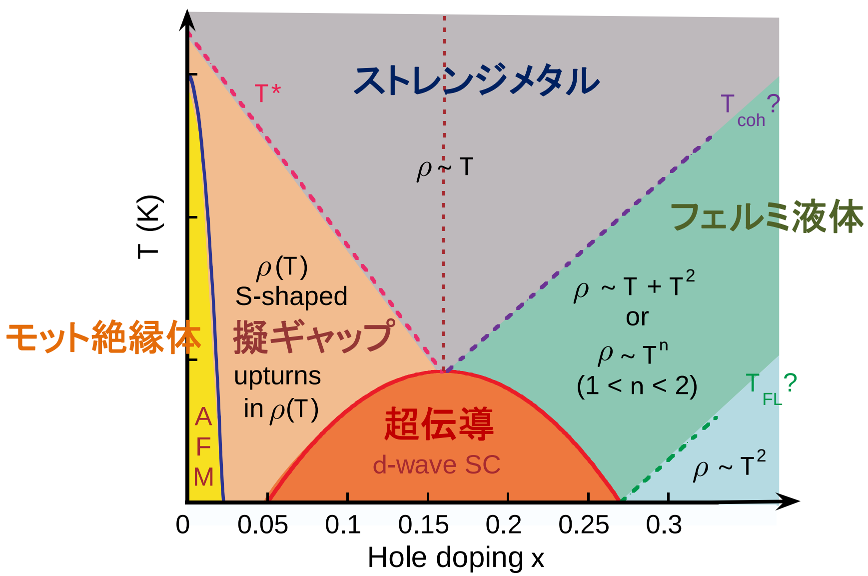
例２ N=4 SYM with θ∝X3 ⇒ η/s<1/4π

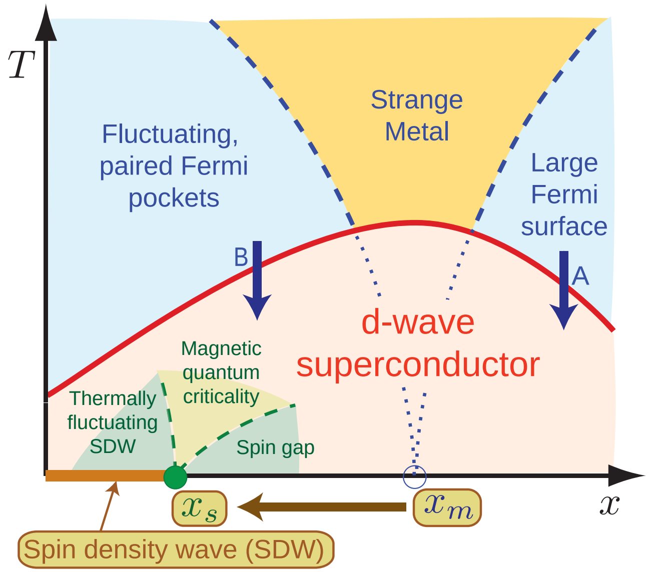
[Azeyanagi-Li-TT 09, Mateos-Trancanelli 11] [Rebhan-Steineder 11]

物性物理に現れる量子臨界点の例(多くが2+1次元)

銅酸化物高温超伝導、重い電子系、グラフェン、量子ホール効果のプラトー転移点　など。

銅酸化物高温超伝導体の相図





Figs taken from Sachdev 0907.0008

ここ4，５年、AdS/CFTの物性物理への応用が盛んに議論されるようになってきた。(AdS/CMP、AdS/CMTとも呼ばれる)

（2001　粘性の計算 (⇒QGP/Cold atom） [Policastro-Son-Starinets]）

2006　エンタングルメント・エントロピーの計算 [Ryu-TT] ⑤

2007　2次元量子臨界点の電気伝導 [Herzog-Kovtun-Sachdev-Son] ②

2008　超伝導の記述 [Gubser, Hartnoll-Herzog-Horowitz] ③

2008　非相対論的スケール不変性 [Son, Mcgreevy, Kachru et.al.]

Non-rela. conformal　　Lifshitz

④

2008　非フェルミ液体の記述 [S. Lee, Liu-McGreevy-Vegh, Zaanen]

2011 ハイパースケーリングの破れと非フェルミ液体 ⑥

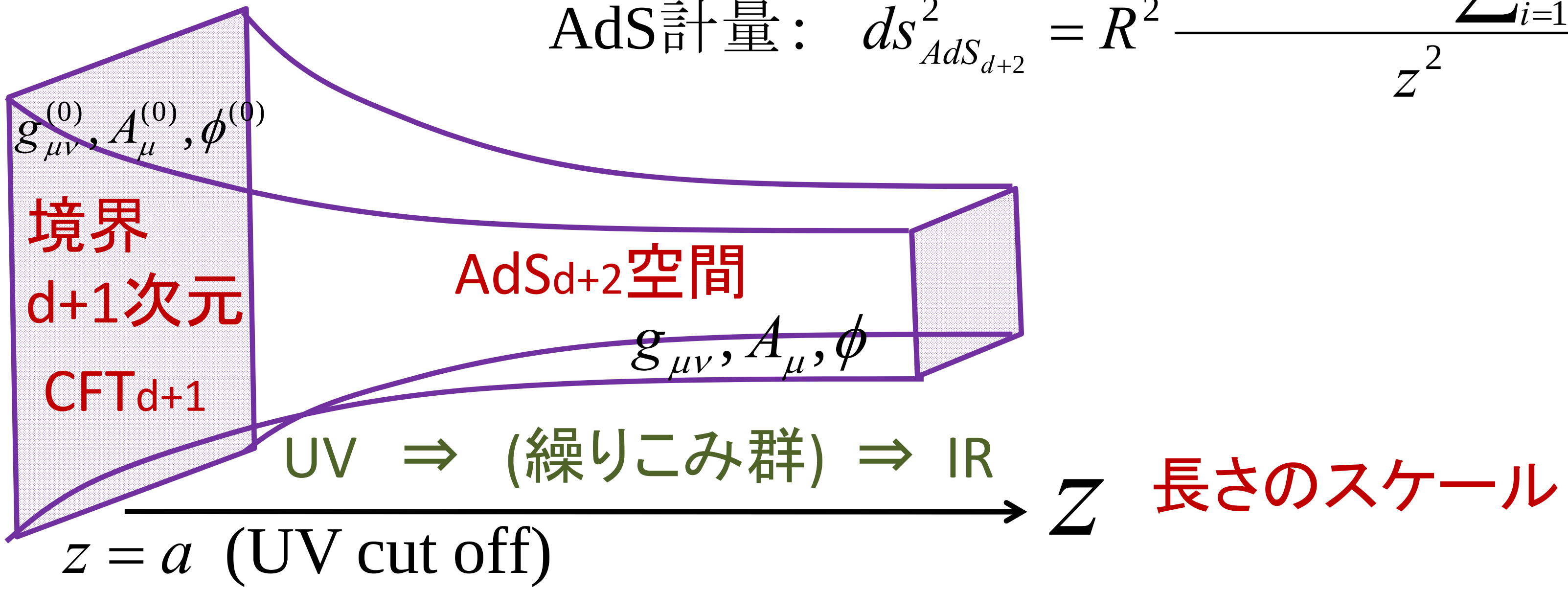
[Ogawa-Ugajin-TT, Huijse-Sachdev-Swingle]

内容

② 電気伝導とAdS/CFT

(2-1) AdS/CFT対応

AdS計量： $ds^2_{AdS_{d+2}} = R^2 \dfrac{dz^2 - dt^2 + \sum_{i=1}^{d} dx_i^2}{z^2}.$



AdS/CFTの基本原理:
（bulk-boundary 関係）
[Gubser-Klebanov-Polyakov, Witten 1998]

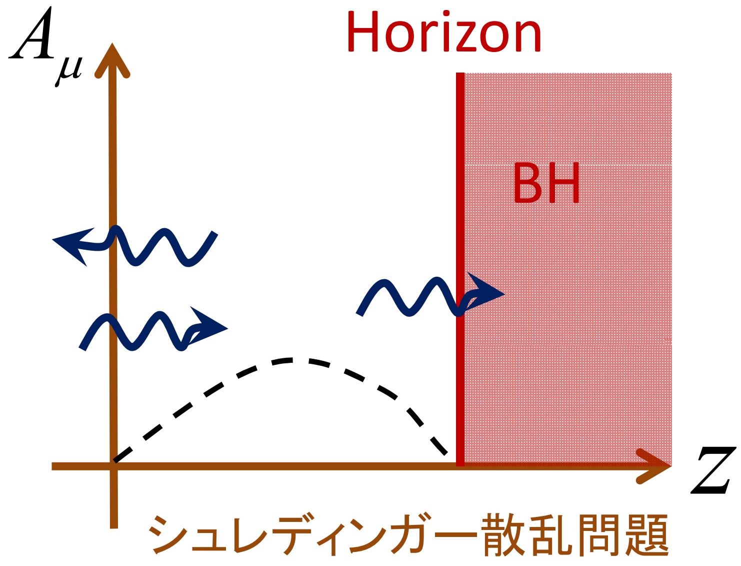
$$\boxed{Z_{CFT}(g_{\mu\nu}^{(0)}, A_\mu^{(0)}, \phi^{(0)}) = Z_{Gravity}(g_{\mu\nu}, A_\mu, \phi) \approx e^{-S_{Gravity}(g_{\mu\nu}, A_\mu, \phi)}\Big|_{\text{on-shell}}}$$

CFTの外場

運動方程式の境界値問題

(2-2) 電気伝導率の計算

電荷を持った4次元AdSブラックホール(～金属状態)における電気伝導度を計算する。



Maxwell方程式：　$\partial_\mu(\sqrt{g}F^{\mu\nu}) = 0.$

$$A_\mu(z,\omega) \underset{z\to 0}{\approx} \underbrace{A_\mu^{(0)}(\omega)}_{\text{外場}} + z\cdot \underbrace{A_\mu^{(1)}(\omega)}_{\text{カレント}} + \dots ,$$

$$A_\mu(z,\omega) \underset{z\to z_H}{\approx} \underbrace{(z-z_H)^{-i\gamma\omega}\cdot a_\mu(\omega)+\dots,}_{\text{地平面に落ち込む境界条件}}$$

$$-\partial_w^2\Psi + V(w)\Psi = \omega^2\Psi$$

カレント：　$J^\mu(\omega) = \left.\dfrac{\delta S_{Maxwell}}{\delta A_\mu(z,\omega)}\right|_{z\to 0} = A_\mu^{(1)}(\omega),$

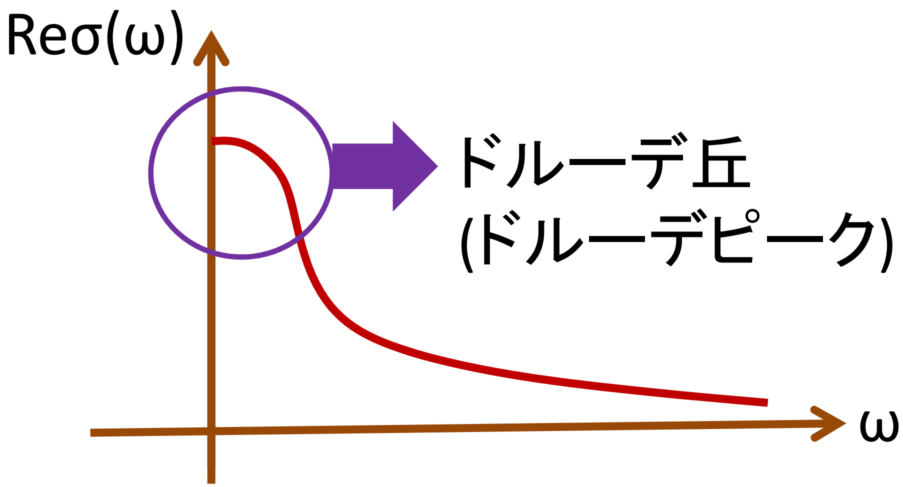
交流電気伝導度　$\sigma_{xx}(\omega) = \dfrac{j_x(\omega)}{E_x(\omega)} = \dfrac{A_x^{(1)}(\omega)}{-i\omega\cdot A_x^{(0)}(\omega)} = \dfrac{1-R(\omega)}{1+R(\omega)}.$

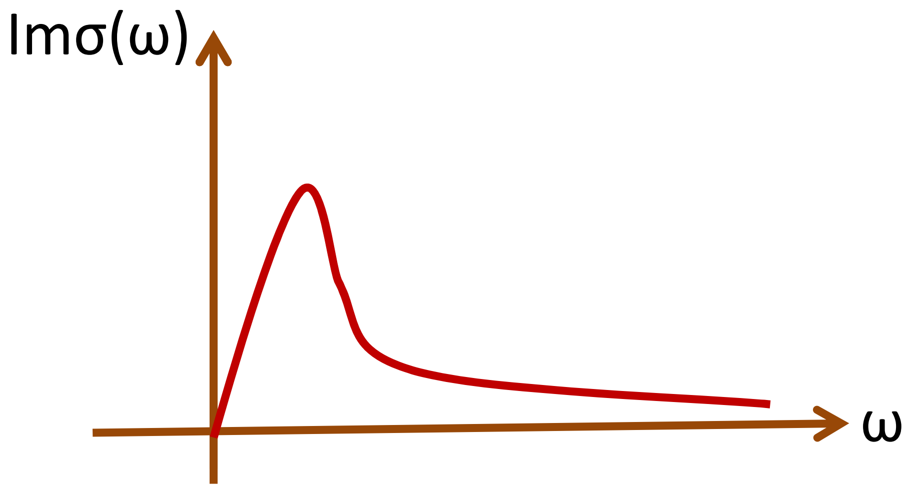
ドルーデ模型(電気伝導の基本)

金属中の電子の古典的運動方程式：$m\dfrac{dv}{dt} = eEe^{-i\omega t} - m\dfrac{v}{\tau}.$

$$\sigma(\omega) = \frac{j(\omega)}{E(\omega)} = \frac{ne^2 v}{Ee^{-i\omega t}} = \frac{ne^2\tau}{m(1-i\omega\tau)}.$$

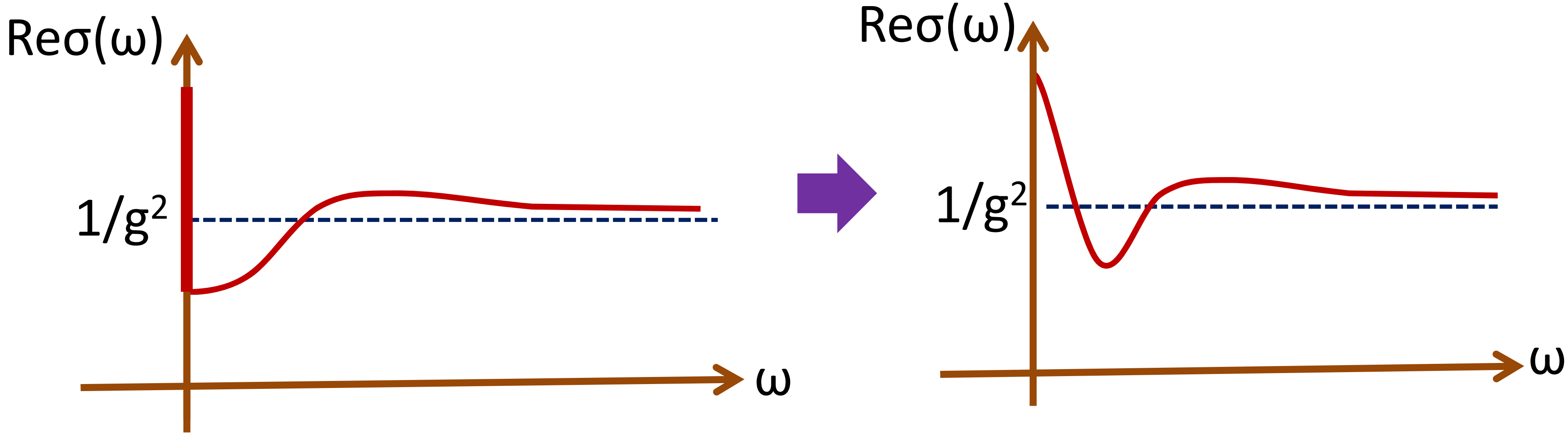
$$\mathrm{Re}\,\sigma(\omega) = \frac{ne^2\tau}{m(1+\omega^2\tau^2)}, \qquad \mathrm{Im}\,\sigma(\omega) = \frac{ne^2\omega\tau^2}{m(1+\omega^2\tau^2)}.$$





2+1次元系のホログラフィック電気伝導度の概略

電荷を帯びたAdS BHなどにおけるゲージ場を用いて、電気伝導率を計算すると重力場とも運動方程式が混じる。それを対角化して計算すると、
直流(DC)電気伝導度は発散する（ドルーデ丘がδ関数:Reσ(ω)~δ(ω)）。



並進対称性が完全にある場合
（超伝導と区別しにくい）

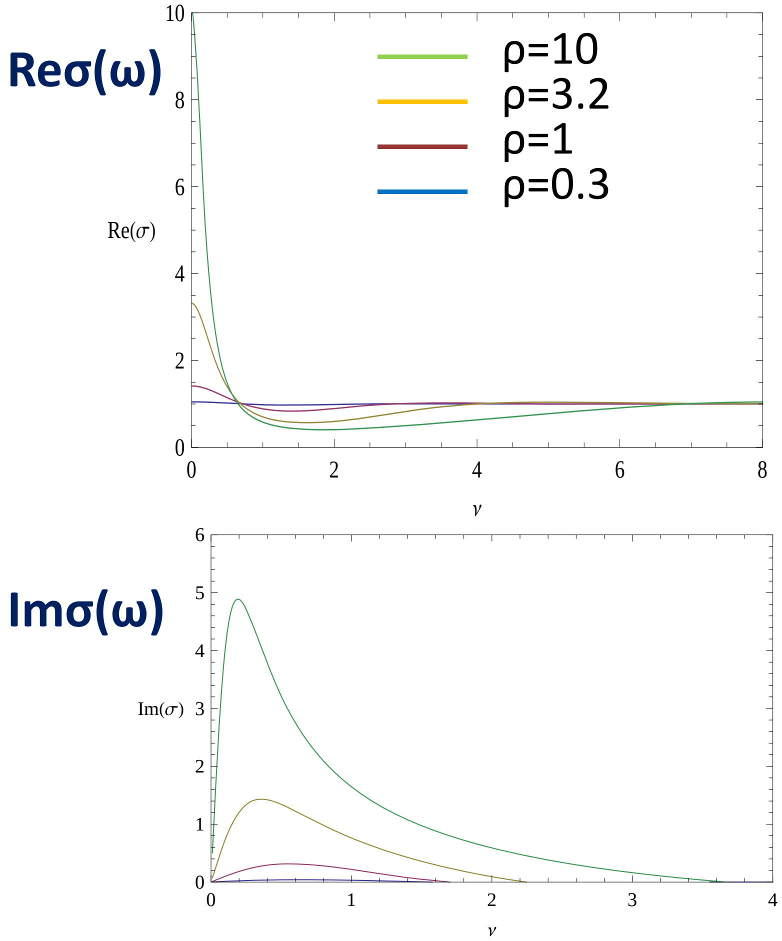
並進対称性が破れている場合
⇒格子構造（フォノン相互作用）、不純物との相互作用など

有限の直流電気伝導度: (1) Probe braneの手法 [Karch-O'Bannon 07]
(2) 格子構造 [Horowitz-Santos-Tong 12]

(2+1)次元量子臨界点での交流電気伝導度

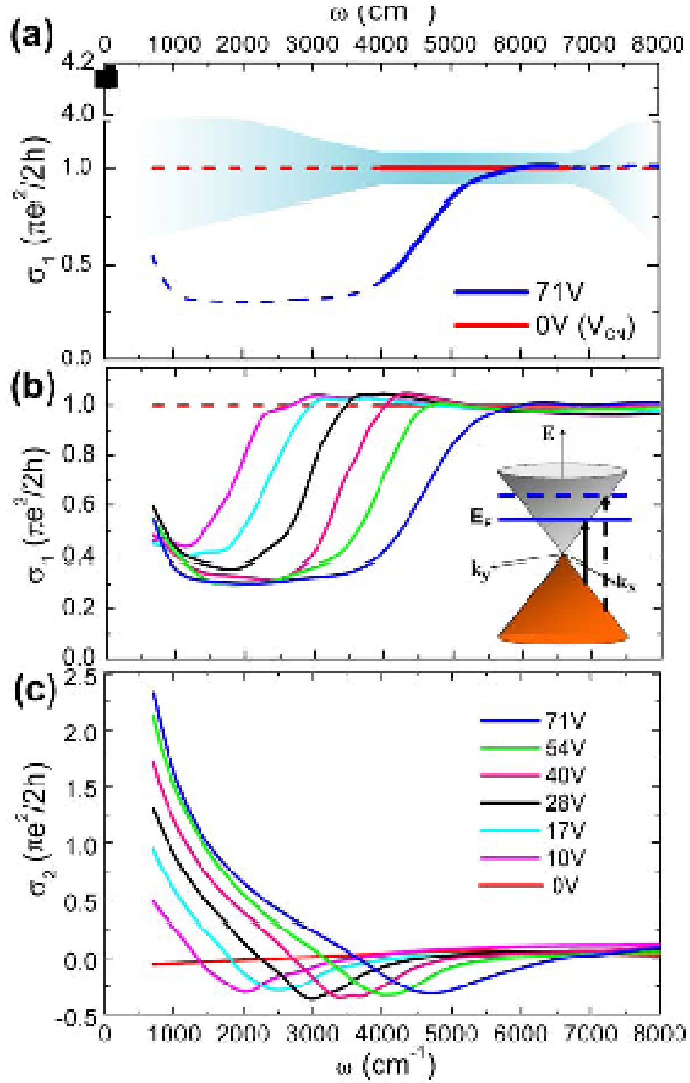
AdS/CFT(Probe brane)の計算

[Das-Nishioka-TT 10]



グラフェンの光学電気伝導度

[Z.Li et.al. Nature Physics 4, 532 (2008)]



Einstein- Maxwell- Scalar

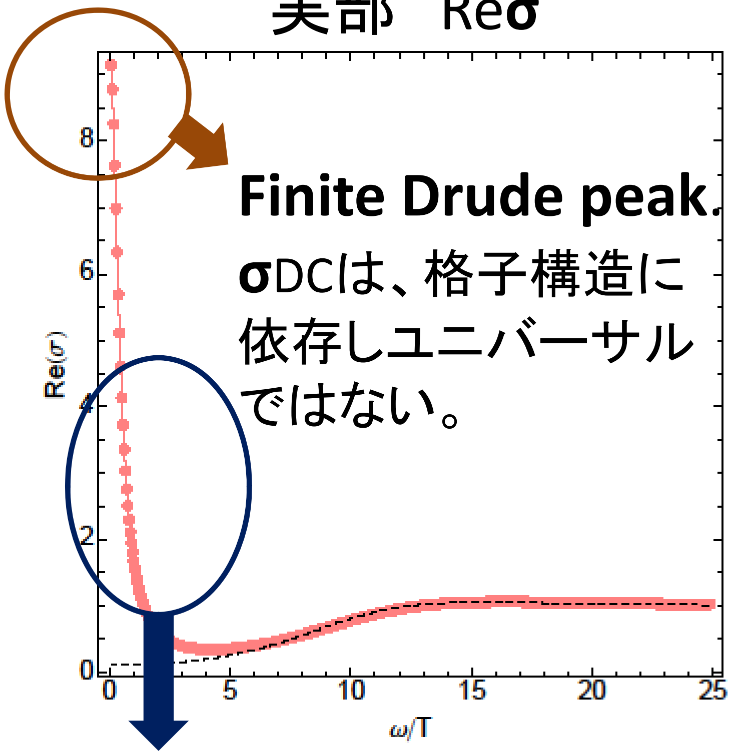
スカラー場の「格子」

$$\phi(y,z) = \phi_0 \cos(k_L y).$$

<u>格子構造を入れた計算</u>

[Horowitz-Santos-Tong 12]

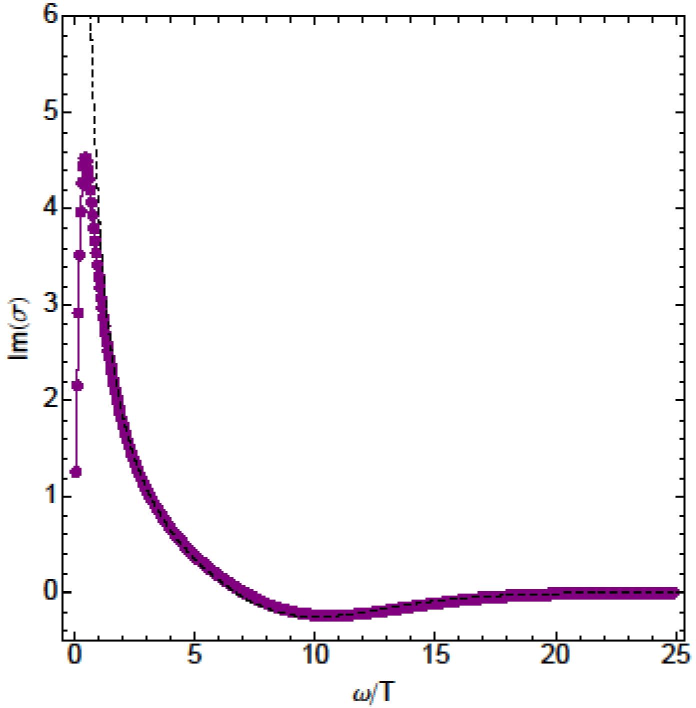
実部　Re**σ**



Finite Drude peak.

σDCは、格子構造に依存しユニバーサルではない。

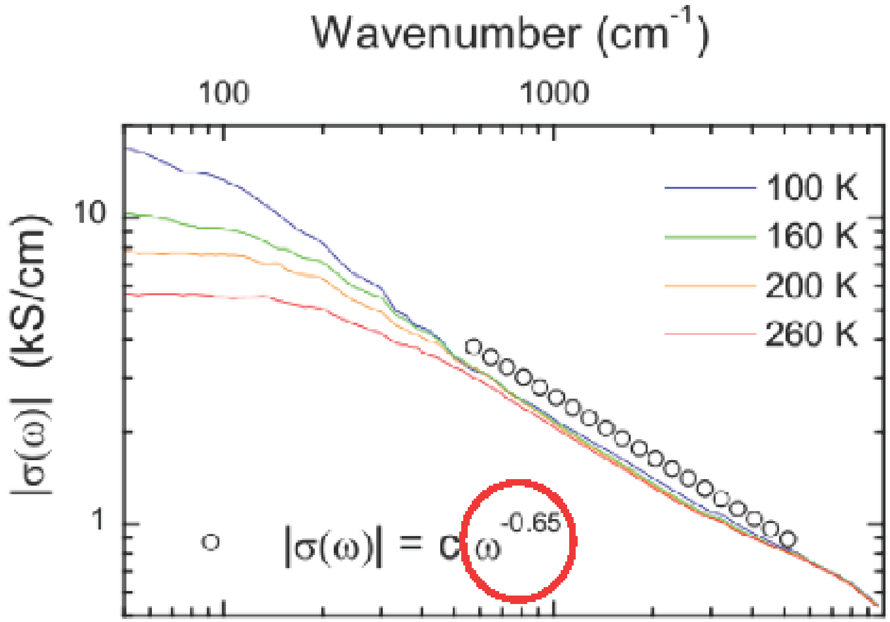
虚部　Im**σ**



$$|\sigma(\omega)| \approx \frac{B}{\omega^{2/3}} + C.$$ (格子構造に依存しない)

$\Rightarrow$ 銅酸化物高温超伝導体 の異常金属相の振る舞 いと同じ！

Comparison with the cuprates
(van der Marel, et al 2003)



$$Bi_2Sr_2Ca_{0.92}Y_{0.08}Cu_2O_{8+\delta}$$

From Horowitz's talk at Strings 2012
``Why General Relativity is like a High Temperature Superconductor''

③ 超伝導とAdS/CFT（ちょっとだけ）

電荷を帯びたAdSブラックホールに、複素スカラー場を導入する。

⇒ Einstein-Maxwell-Scalar理論

[ホログラフィック超伝導: Gubser, Hartnoll-Hertzog-Horowitz 2008]

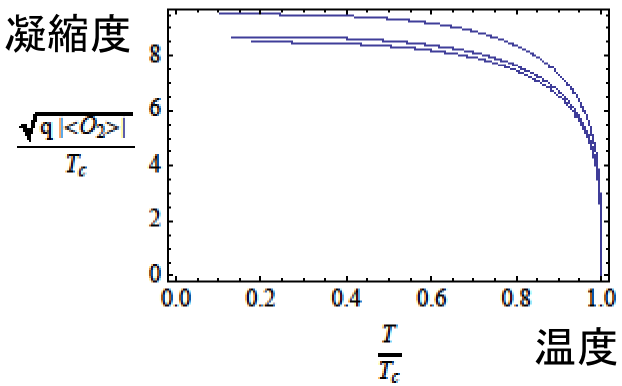
$$S_{EMS}=\frac{1}{16\pi G_N}\int dx^4\sqrt{-g}\left(R-2\Lambda-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\left|(\partial_\mu-iqA_\mu)\phi\right|^2-m^2|\phi|^2\right).$$

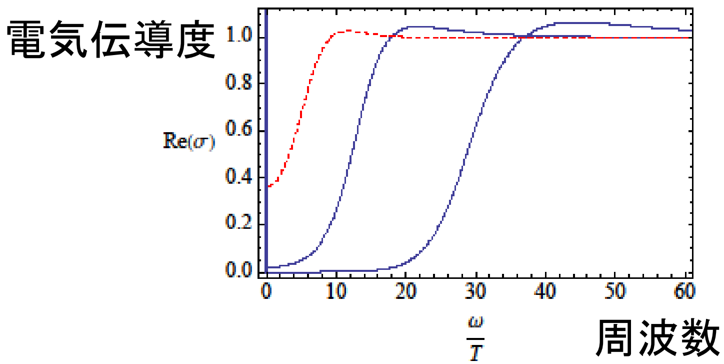
$V_{eff}(\phi)=\left(m^2-q^2(A_t)^2|g_{tt}|\right)|\phi|^2 \quad \Rightarrow \quad A_t\approx\mu$ が大きいと不安定。

$$\left\langle\phi(x,z)\right\rangle_{Gravity}\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle O(z)\right\rangle_{CFT}\neq 0$$

超伝導状態

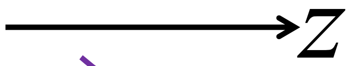
[BCS理論とは異なり強結合]





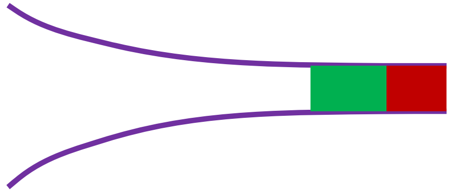
Figs Taken from arXiv:0810.1563

ホログラフィックな系の大まかな分類(ボゾニック)



電荷を帯びたBH ⇔ (異常)金属

[Herzog-Kovtun-Sachdev-Son 07]



電荷を帯びたBH
+スカラー凝縮 ⇔ 超伝導

[Gubser, Hartnoll-Hertzog-Horowitz 08]

AdSソリトン ⇔ 絶縁体(閉じ込め)

AdSソリトン
＋スカラー凝縮 ⇔ 超伝導(散逸なし）

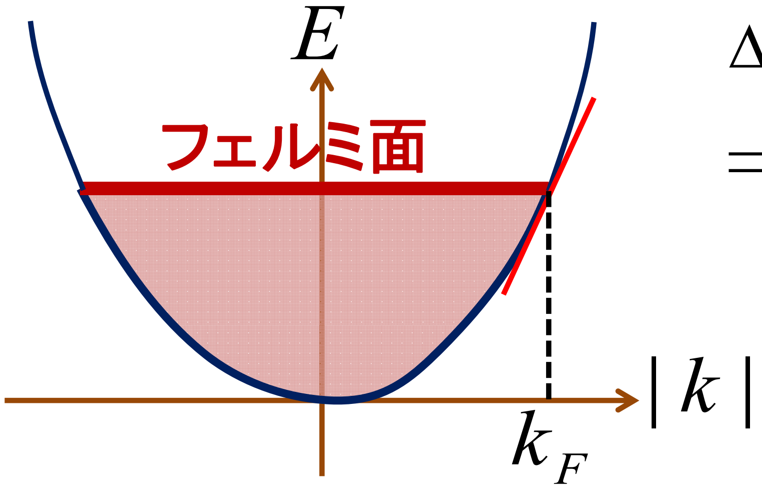
[Nishioka-Ryu-TT 10,
Horowitz-Way 11]

AdSソリトン
＋D-branes ⇔ トポロジカル絶縁体
（量子ホール系など）

[Davis-Kraus-Shah 08, Fujita-Li-Ryu-TT 10]

④　非フェルミ液体とAdS/CFT

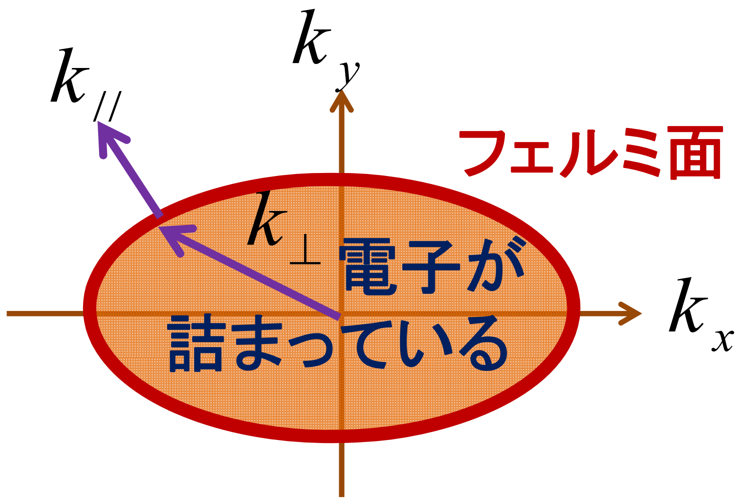
(4-1) ランダウのフェルミ液体と非フェルミ液体



$$\Delta E \propto \Delta k_{//}$$

$$\Rightarrow \text{フェルミ液体} \approx \prod_{\vec{k}F} \mathrm{CFT}_2(\vec{k}_F)$$

例えば、$C \propto S \propto T \cdot V.$



ランダウのフェルミ液体:
自由電子描像が、電子間相互作用があっても、質量を有効質量に置き換えればほぼ適用できる。
⇒準粒子描像 $\Gamma \sim \omega^2.$

繰りこみ群的考え方 [Polchinski arXiv:hep-th/9210046]

$$\Delta E \propto \Delta k_{//} << k_F (\sim k_\perp)$$

$$\Rightarrow t = [E]^{-1}, \quad k_{//} = [E]^{1}, \quad k_\perp = [E]^{0}, \quad \psi = [E]^{-1/2}.$$

$$S = \int dt (dp)^3 [i\psi_\sigma^+(p)\partial_t \psi_\sigma(-p) - (E(p) - E_F)\psi_\sigma^+(p)\psi_\sigma(-p)]$$

$$\underline{+ \int dt (dp_1)^3 \cdots (dp_4)^3 \psi_\sigma^+(p_1)\psi_\sigma(p_3)\psi_\sigma^+(p_2)\psi_\sigma(p_4) \cdot V(p_1, p_2, p_3, p_4)\delta^3(p_1 + p_2 - p_3 - p_4).}$$

電子間相互作用（クーロン力、フォノン交換など）

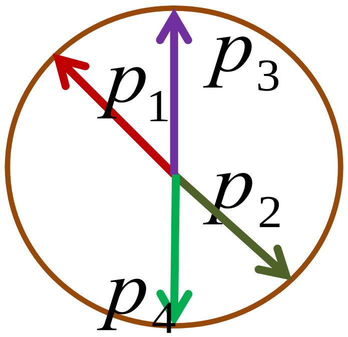
⇩ 大雑把には

$$\int dt \prod_{i=1,2,3,4} dp_{//}^i (dp_\perp^i)^2 \quad \psi_\sigma^+(p_1)\psi_\sigma(p_3)\psi_\sigma^+(p_2)\psi_\sigma(p_4) \cdot V \cdot \delta^3(p_{1\perp} + p_{2\perp} - p_{3\perp} - p_{4\perp}).$$

$$\sim [E]^{-1} \cdot [E]^4 \cdot [E]^{-2} = [E]^1.$$

⇒Irrelevant（電子間相互作用は低エネルギーで小さい）

但し、$p_1 + p_2 = 0$ の時は、より詳しい議論が必要。



$$\delta^3(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$$
$$= \delta(p_{1//} + p_{2//} - p_{3//} - p_{4//})\delta^2(p_{1\perp} + p_{2\perp} - p_{3\perp} - p_{4\perp})$$
$$\sim [E]^{-1}$$

➡ 電子間相互作用は、**Marginal**になる。

⬇ 繰りこみ群を調べる

$$V(E) = \frac{V_0}{1 + NV_0 \log(E_0 / E)}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_0 > 0 \quad \text{(斥力)} \\ V_0 < 0 \quad \text{(引力)} \end{cases}$$

$V_0 > 0$（斥力） 低エネルギーで相互作用が小さくなる。
⇒ランダウのフェルミ液体

$V_0 < 0$（引力） 低エネルギーで相互作用が大きくなる。
⇒超伝導（BCS理論）

しかし、フェルミ面のある系に、masslessなボゾン場（スカラー場やゲージ場）が結合している系を考えると今の議論は適用できなくなる。⇒準粒子描像が成り立たない

このような場合は、ランダウのフェルミ液体とは異なる性質（電気伝導度や比熱の異常）を持つ系が現れることが知られ、非フェルミ液体と呼ばれる。このような系は、強く相互作用しているので、複雑な量子論的な解析が必要とされる。

[Lee 09, Metlitski-Sachdev 10]

従って、AdS/CFT対応を用いた計算法が役に立つ可能性があり、AdS/CMTの重要な動機の一つである。

[cf. 1+1 dim.   Tomonaga-Luttinger Liquid ⇒ Free fermion
Gopakumar-Hashimoto-Klebanov-Sachdev-Schoutens 12 ⇒ $\dfrac{SU(N)_N \times SU(N)_N}{SU(N)_{2N}}$]

(4-2) 非フェルミ液体とAdSブラックホール

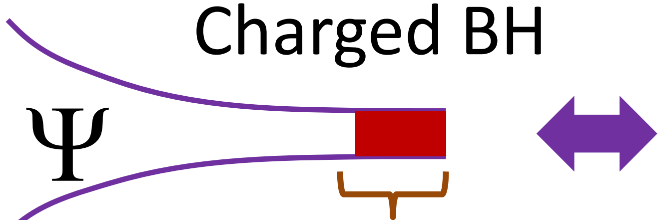
電荷を帯びたAdS BHに、フェルミオン場を導入する。

$$S_{EMS} = \frac{1}{16\pi G_N}\int dx^4 \sqrt{-g}\left(R - 2\Lambda - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\overline{\Psi}\Gamma^{\mu}(\partial_{\mu} - iqA_{\mu})\Psi - m\overline{\Psi}\Psi\right).$$

RN-BH解

$$\begin{cases} ds^2_{RN} = \dfrac{L^2}{z^2}\left(-f(z)dt^2 + \dfrac{dz^2}{f(z)} + dx^2 + dy^2\right), \qquad A_t = \mu\left(1 - \dfrac{z}{z_+}\right), \\ f(z) = 1 - \left(1 + \dfrac{\mu^2 z_+^2}{L^2}\right)\left(\dfrac{z}{z_+}\right)^3 + \dfrac{\mu^2 z_+^2}{L^2}\cdot\left(\dfrac{z}{z_+}\right)^4 \underbrace{\propto}_{\substack{\text{Extremal Limit } T=0 \\ z_+^2\mu^2 = 3L^2}} (z - z_+)^2. \end{cases}$$

Charged BH



AdS2

非フェルミ液体
(しかしT=0でS>0⇒不安定?)

[Liu-McGreevy-Vegh 09]

非フェルミ液体(⇔ストレンジメタル相） [Liu-McGreevy-Vegh 2009]

$$G_R(\omega,k)\approx\frac{h}{v_F\cdot(k-k_F)-\omega-c\cdot\omega^{\nu}}$$

→ AdS2/CFT1

$\Rightarrow$ 分散関係 $\omega\propto(k-k_F)^z$, z:動的臨界指数

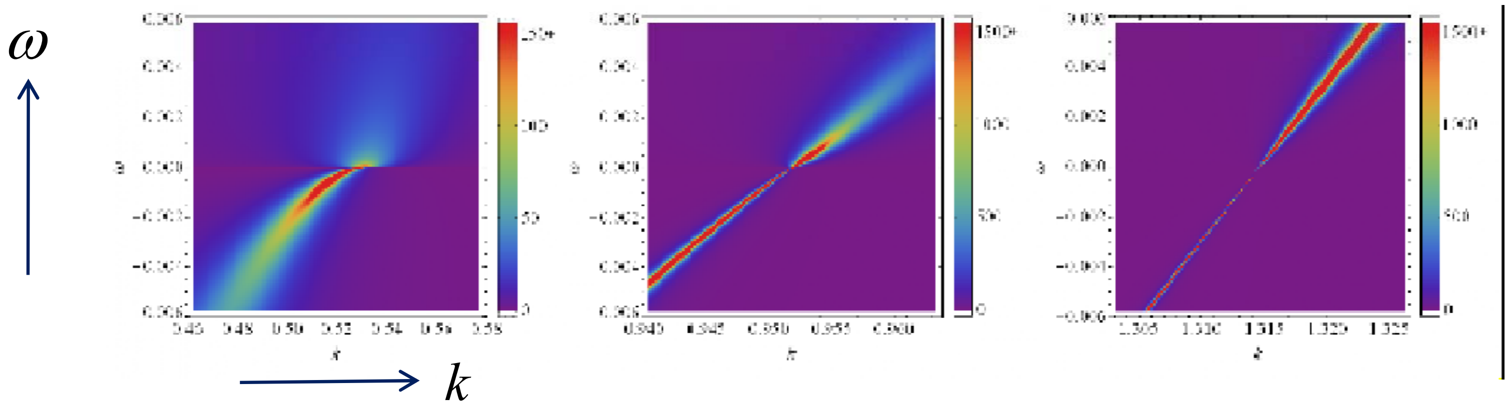
$\nu>1 \rightarrow z=1$: フェルミ液体に類似

$\nu<1 \rightarrow z=1/\nu>1$: 非フェルミ液体

$\nu=1 \rightarrow z=1+0$: マージナル・フェルミ液体

AdSブラックホールの電荷などを変えることで、全ての場合が実現される。

[MFL: Varma-Littlewood-Schmitt-Rink-Abrahams-Ruckenstein 1996]



$\nu=0.48$ $\nu=1$ $\nu=1.46$

(4-3) 電子星（Electron Star)　[Hartnoll-Tavanfar 10]

$$
\begin{cases}
R_{ab} - \dfrac{1}{2} g_{ab} R - \dfrac{3}{L^2} g_{ab} = F_{ac} F_b^{\ c} - \dfrac{1}{4} g_{ab} F_{cd} F^{cd} + T_{ab}^{STAR}, \\
\nabla_a F^{ba} = J_{STAR}^{b}.
\end{cases}
$$

$$
T_{ab} \equiv (\rho + p) u_a u_b + p g_{ab}, \qquad J_a \equiv \sigma \cdot u_a
$$

縮退したフェルミ液体の状態方程式を仮定する

IRでLifshitz geometryが現れる(T=0でS=0)

フェルミ液体
（電子星）

フェルミ液体にいくらか似ている（２点関数からフェルミ面を確認できる。しかし、$\Gamma \sim \omega^2$ とは異なる振る舞い。Massless グルーオンなども存在する。）

Lifshitz geometry [Kachru-Liu-Mulligan 08]

相対論的スケール不変性: $(t, x_i, r) \to (\lambda t, \lambda x_i, r/\lambda)$

非相対論的スケール不変性:

$$(t, x_i, r) \to (\lambda^z t, \lambda x_i, r/\lambda)$$

z: dynamical exponent

対応する重力解の形(z=1だとAdSになる）

$$\boxed{ds^2_{Scaling} = -r^{2z} dt^2 + r^2 \sum_{i=1}^{d} dx_i^2 + \frac{dr^2}{r^2}.}$$

(4-4) これまでの（非）フェルミ液体の記述のまとめ

(i)　AdS　charged BH は、絶対零度でエントロピーが零でない

⇒低温で不安定。超伝導か電子星になると期待される。

(ii) 電子星は、低温でも安定で、フェルミ液体を記述。

⇒しかし、(i)と(ii)の両方で、フェルミ面を持つフェルミオンの系
は、重力側の**one-loop量子効果**に相当し、ずっと大きな
$O(N^2)$の自由度を持つ全く別の物質（グルーオン）が存在する。

疑問：AdS/CFTの古典重力の極限に（非）フェルミ液体は
存在するのか？⇒次の話題の動機の一つ。

⑤エンタングルメント・エントロピーとAdS/CFT

(5-1)エンタングルメント・エントロピーの定義と性質

エンタングルメント・エントロピーとは、量子エンタングルメント(量子もつれ合い、絡み合い)の度合いを測定する量

「基底状態がどれほど量子的に複雑か？」をあらわす。

現在まで、様々な分野に応用されてきている。

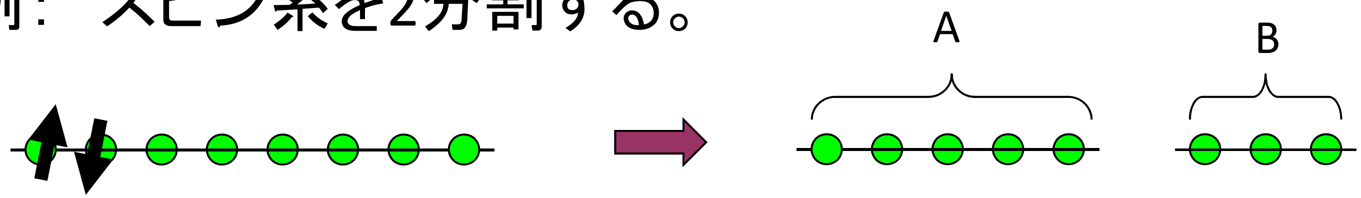
- 量子情報、量子コンピューター(量子情報量の定義)
- 物性理論(低次元量子多体系のオーダーパラメーター)
- 量子重力理論(ブラックホールのエントロピーとの関係)

エンタングルメント・エントロピーの定義

まず、多体系の量子力学において、全体系を部分系AとBに二分割する。このとき、もとのHilbert空間は、二つのHilbert空間の直積に分かれる

$$H_{tot} = H_A \otimes H_B \quad .$$

具体例： スピン系を2分割する。



全体系の密度行列をρ_{tot} とする。
例えば絶対零度(純粋状態)では、$\rho_{tot} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ 。

このときBを観測しない(Bをトレースアウトする)と仮定した場合の密度行列は、

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B \rho_{tot} \quad ,$$

と書け、これをAに制限した密度行列と呼ぶ。

この設定で、「Aに関するエンタングルメント・エントロピー」S_Aを ρ_A に対するフォン・ノイマンエントロピーとして定義する:

$$\boxed{S_A = -\mathrm{Tr}_A\, \rho_A \log \rho_A \quad .}$$

(5-2)エンタングルメント・エントロピーと物性物理

(i)密度行列くりこみ群

密度行列くりこみ群 : 自由度の圧縮を行って、量子多体系を
効率よく数値シュミレーションする方法。

このとき、「どれだけシュミレートしにくいか」
を測るのが、エンタングルメント・エントロピー。

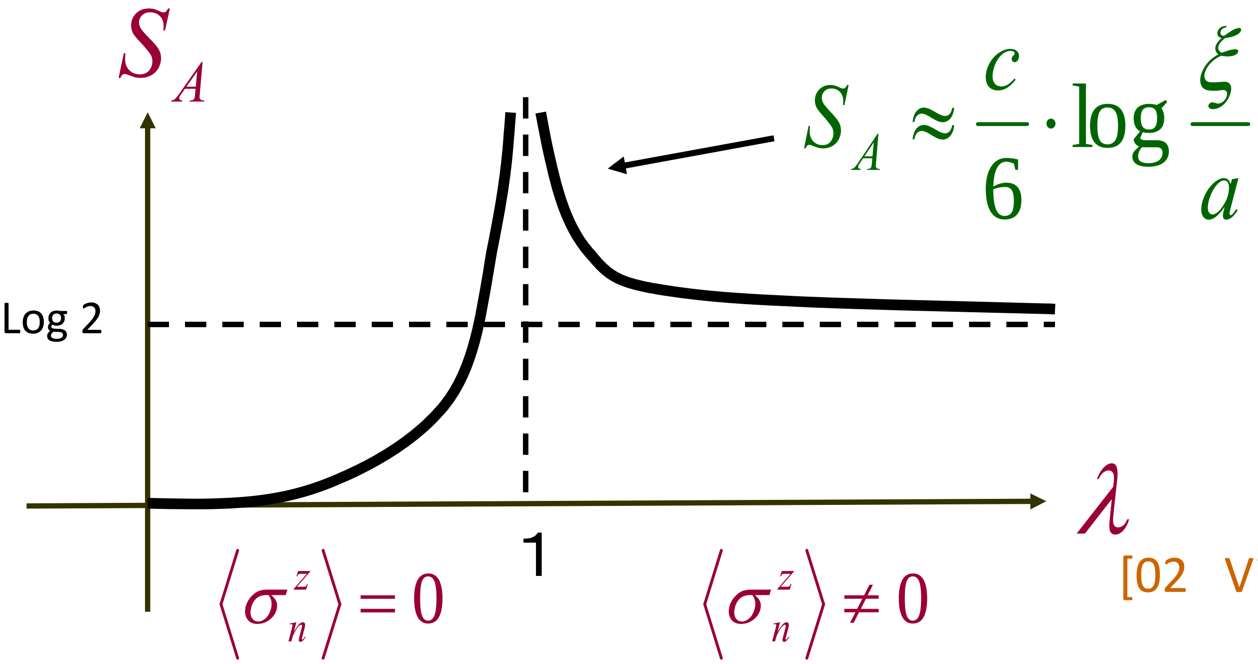
[01 Osborne-Nielsen]

これは、量子相転移点で一般に発散する。

(ii)スピンチェイン系における量子相転移

外場中の量子Ising模型は、λ＝１で量子相転移する

$$H = -\sum_n \sigma_n^x - \lambda \sum_n \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z$$



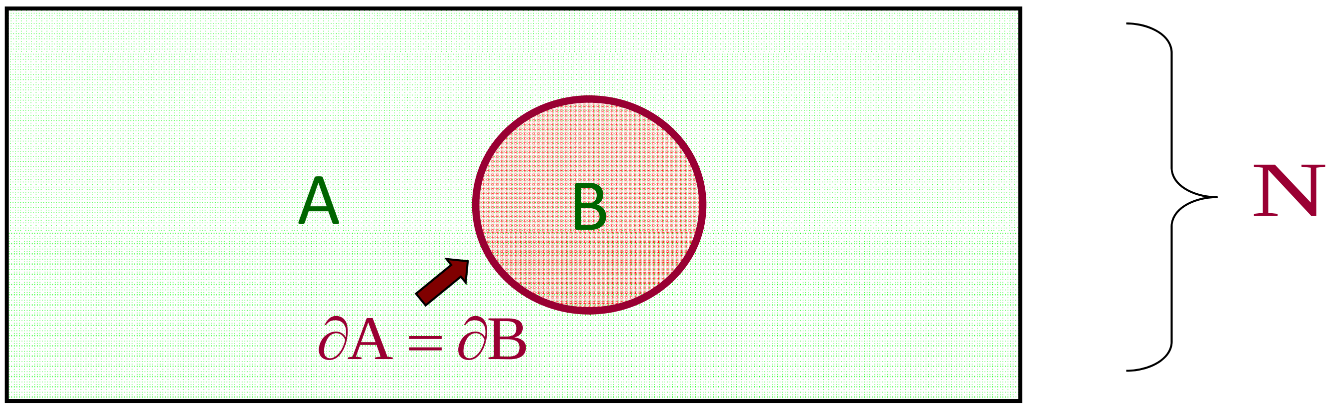
[02 Vidal et.al.]

(5-3) 場の理論における幾何学的エントロピー

場の理論におけるエンタングルメント・エントロピーを考える。
時空Mは、d+1次元で定義され、静的であるとする。

$$M = R_t \times N.$$

このときHilbert空間をAとBの二つに分けるのを幾何学的に行う。(幾何学的エントロピーとも呼ばれる。)



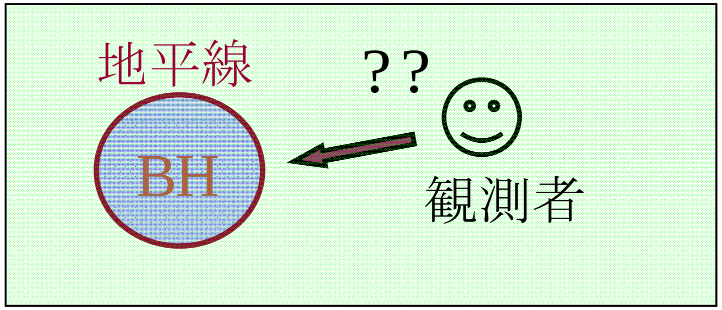
幾何学的エントロピーの面積則

場の理論は、無限の自由度を有するので、幾何学的エントロピーは紫外発散する。基底状態に対して、次の面積則が知られている（aは正規化のための格子間隔）。

$$\boxed{S_A \sim \frac{\mathrm{Area}(\partial A)}{a^{d-1}} + (\text{subleading terms}).}$$

[Bombelli-Koul-Lee-Sorkin 86, Srednicki 93]

これはブラックホールのエントロピーの面積則に似ている。



⇒ 実際に、量子補正に対応していると考えられている。

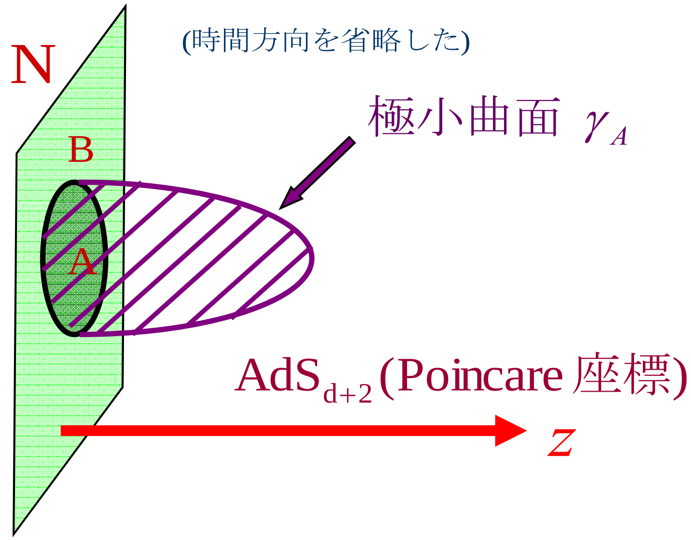
[Susskind-Uglm 94']

でも、BHエントロピーの古典的な項自体は？

(5-4) AdS/CFTとエンタングルメント・エントロピー

ホログラフィック・エンタングルメント・エントロピー [Ryu-TT 06]

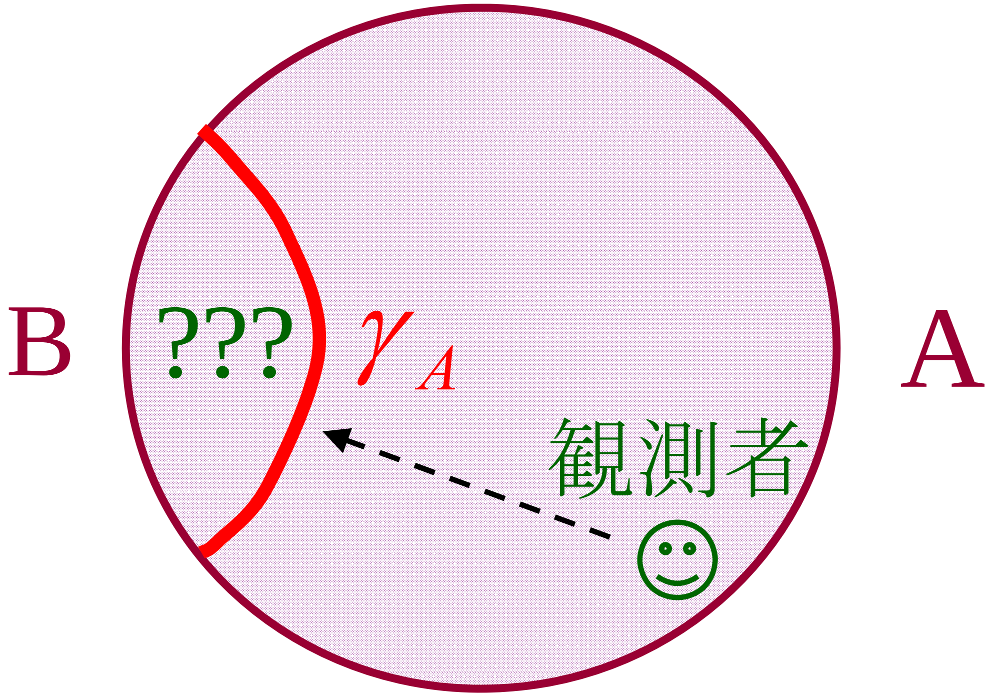
$$S_A = \frac{\mathrm{Area}(\gamma_\mathrm{A})}{4G_N^{(d+2)}}.$$



ここで、γ_A は、d+2次元時空中のd次元の最小面積曲面で、境界が部分系Aの境界と一致するもの。

（AdS3/CFT以外は、一般的な証明はないが、多くの検証がなれてきている。
Casini-Huerta-Myers 11によってA=球面の場合は一般次元で証明された。）

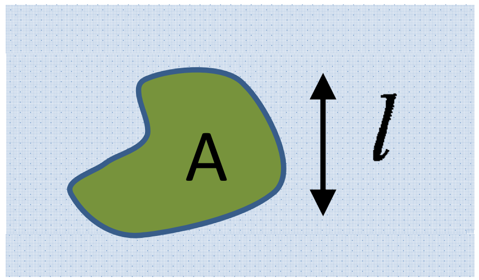
直感的解釈



γ_A があたかもブラックホールのホライズンであるかのように振る舞い、Bの情報を中に隠している。

HEEの一般的振る舞い

CFTd+1



$$S_A = \frac{\pi^{d/2} R^d}{2G_N^{(d+2)}\Gamma(d/2)}\left[p_1\left(\frac{l}{a}\right)^{d-1} + p_3\left(\frac{l}{a}\right)^{d-3} + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \begin{cases} p_{d-1}\left(\frac{l}{a}\right) + p_d & (\text{if } d+1 = \text{odd}) \\ p_{d-2}\left(\frac{l}{a}\right)^2 + q\log\left(\frac{l}{a}\right) & (\text{if } d+1 = \text{even}) \end{cases} \right],$$

面積則の発散

where $p_1 = (d-1)^{-1}, p_3 = -(d-2)/[2(d-3)], \ldots.$

$\ldots.. \quad q = (-1)^{(d-1)/2}(d-2)!!/(d-1)!! \quad .$

奇数次元CFTの自由度の目安
⇒3次元版のc定理(F定理)
の証明。[QFT: Casini-Huerta 12,
See also Klebanov-Nishioka-Pufu-Safdi 12
Hol: Liu-Mezei 12, Myers-Singh 12]

ワイルアノマリーに対応し、セントラルチャージに比例する。

⑤ハイパースケーリングの破れとAdS/CFT

[Ogawa-Ugajin-TT 11]

面積則の破れ

d+1次元のフェルミオン系では、フェルミ面が存在すると、以下のようにlog的にEEの面積則が破れる。[Wolf 05, Gioev-Klich 05]

$$\boxed{S_A \sim L^{d-1} \log L, \qquad (\mathrm{L} = \mathrm{A}\text{の大きさ}).}$$

[コメント]

(i)フェルミ面近傍の励起は、動径方向には`相対論的'になり、

２次元CFTで近似できる。logの振る舞いはそれに起因する。

(ii) 最近の研究で、相互作用でこの振る舞いは変わらないことが分かってきている。[Swingle 09,10, Zhang-Grover-Vishwanath 11, Swingle-Senthil 11]

AdS/CFTに基づく重力双対の解析(特にAdS4/CFT3を考える)

仮定する計量の形(古典重力の極限で考える):

$$ds^2 = \frac{R_{AdS}^2}{z^2}\left(-f(z)dt^2 + g(z)dz^2 + dx^2 + dy^2\right).$$

$$\text{漸近的 AdS} \Rightarrow f(0) = g(0) = 1.$$

前述の of EE のlog的振る舞いを実現するには、

$$g(z) \to \left(\frac{z}{z_F}\right)^2 \qquad (z \to \infty).$$

となることが必要。z_F^{-1} は、フェルミエネルギーと解釈できる。

ヌル・エネルギー条件

重力理論が物理的に矛盾がない(例えばゴーストが存在しないなど)ために、通常課す条件がヌル・エネルギー条件である:

$$T_{\mu\nu}N^{\mu}N^{\nu} \geq 0 \qquad \text{for any null vector } N^{\mu}.$$

これから、zが大きい赤外領域で、次の振る舞いが要求される:

$$g(z) \propto z^2, \quad f(z) \propto z^{-2m} \quad \Rightarrow \quad m \geq 1.$$

2+1次元系の比熱の振る舞いは、

$$C \propto T^{\alpha} \quad \text{with} \quad \alpha \leq \frac{2}{3}.$$

[Ogawa-Ugajin-TT 11]

このことから、ランダウのフェルミ液体(α=1)は、AdS/CFTの古典重力近似の範囲では実現できないことが分かった！

ランダウのフェルミ液体ができないのは、CFT側が強結合だからと推測される。このように比熱に異常が生じるが、フェルミ面が存在する系は、**非フェルミ液体**と呼ばれていることは前述した。

[cf. Faulkner-Liu-McGreevy-Vegh 09 : 古典重力の範囲ではない]

具体的には以下のような、Einstein-Maxwell-Scalar理論を考えるとそのような解が得られる:

$$S_{EMS} = \frac{1}{16G_N}\int dx^4 \sqrt{-g}\left[R - 2\Lambda - W(\phi)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)\right].$$

$$\left.\begin{aligned} V(\phi) + 2\Lambda &\approx -\frac{(p^2+12p+32)}{4R_{AdS}^2}\cdot e^{-\sqrt{\frac{2}{p-2}}\phi}, \\ W(\phi) &\approx \frac{8A^2}{z_F^2\, p(8+p)R^2} e^{3\sqrt{\frac{2}{(p-2)}}\phi}, \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(z) \propto z^{-p},\ g(z) \propto z^2,\ (p > 2).$$

[このモデル自体に関しては既に多くの研究がある。Gubser-Rocha 09,
Charmousis-Goutéraux-Kim-Kiritsis-Meyer 10,
Goldstein-Iizuka-Kachru-Prakash-Trivedi-Westphal 10, ……]

コメント

AdS: ゼロ温度極限での特異性が現れないためには、

⇒ $\alpha=2/3$ [Shaghoulian 11]

CMT: スピン揺らぎの理論:

[Moriya, Hertz, Millis …. 70'-90']

N Fermions + U(1) gauge:

⇒ $\alpha=2/3$ (i.e. $z=3$)

[Lee 09, Metlitski, and S. Sachdev 10,
Mross-McFreevy-Liu-Senthil 10,
Lawler-Barci-Fernandez-Fradkin-Oxman 06]

現実の物質: $YbRh_2(Si_{1-x}Ge_x)_2$

⇒ $\alpha=2/3$

Examples of heavy fermions

[Pepin 11]

Compound	$H_c/P_c/x_c$	$\frac{C_v}{T}\to\infty$?	$\rho\sim T^a$	Reference
$YbRh_2(Si_{1-x}Ge_x)_2$	$x_c=0.05$ $H_c^{\parallel c}=0.66T$ $H_c^{\perp c}=0.06T$	$T^{-0.34}$	T	Dresden, Grenoble
$CeCoIn_5$	$H_c=5T$	$T^{-\alpha}$	T	Los Alamos, Grenoble
$Ce(Cu_{1-x}Au_x)_6$	$x_c=0.016$	$Log\left(\frac{T_0}{T}\right)$	T	Karlsruhe
$CeCu_{6-x}Ag_x$	$x_c=0.2$	$Log\left(\frac{T_0}{T}\right)$	$T^{1.1}$	Gainesville
$CeNi_2Ge_2$	$P_c=0$	$Log\left(\frac{T_0}{T}\right)$	$T^{1.4}$	Karlsruhe, Cambridge
U_2Pt_2In	$P_c=0$	$Log\left(\frac{T_0}{T}\right)$	T	Leiden
$CeCu_2Si_2$	$Pc=0$	$Log\left(\frac{T_0}{T}\right)$	$T^{1.5}$	Dresden, Grenoble
$Ce(Ni_{1-x}Pd_x)Ge_2$	$x=0.065$	$\gamma_0-T^{1/2}$	$\rho_0+T^{3/2}$	Los Alamos
$YbAgGe$	$H=4T$	$Log\left(\frac{T_0}{T}\right)$	T	Ames, Grenoble
$CeIn_{3-x}Sn_x$	$p_c=26kbar$	?	$T^{1.6}$	Dresden
U_2Pd_2In	$P_c<0$	?	T	Leiden
$CePd_2Si_2$	$P_c>0$	?	$T^{1.2}$	Karlsruhe, Dresden
$CeRhIn_5$	$P_c\sim 1.6GPa$	?	T	Los Alamos, Grenoble
$CeIn_3$	$P_c>0$	?	$T^{1.5}$	Dresden
$Ce_{1-x}La_xRu_2Si_2$	$x_c=0.1$	no	?	Grenoble
$U_3Ni_3Sn_4$	$P_c>0$	no	?	Leiden

このような計量を持つ時空は、Lifshitz時空を
ハイパースケーリングを破るように変形したとも解釈できる。

[Gouteraux-Kiritsis 11, Huijse-Sachdev-Swingle 11,
Dong-Harrison-Kachru-Torroba-Wang 12]

$$ds^2_{(d+2)} = r^{-(d-\theta)}\left(-r^{-2(z-1)}dt^2 + dr^2 + \sum_{i=1}^{d} dx_i^2\right) \quad .$$

$$\Rightarrow C \propto S \propto T^{(d-\theta)/z}. \quad (\theta = \text{hyperscaling violation})$$

$$\left.\begin{array}{l} \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{AdS or Lifshitz} \\ 0 < \theta < d-1 \end{array}\right\} \text{面積則}$$

$$\theta = d\text{-}1 \Rightarrow \text{ Logarithmic EE} \quad \text{(Fermi surface)}$$

$$\left.\begin{array}{l} d-1 < \theta < d \\ \theta = d \Rightarrow \text{Maximally violated, Volume law} \end{array}\right\} \text{面積則からの冪的ずれ}$$

超弦理論はその存在を予言する
が、現実の物質で実現できるのか？

⑥ おわりに

AdS/CMTの概略

	双対	
強結合な量子多体系	⟺	古典的な重力理論（一般相対論）
温度T、電荷密度ρ	⟺	ブラックホールの熱力学
熱力学的エントロピー	⟺	ブラックホールの地平線の面積
エンタングルメント・エントロピー	⟺	時空の最小曲面の面積
電気伝導率	⟺	時空中の電磁場が伝播する振る舞い

このように、AdS/CFT対応を用いると、強相関系の複雑な量子論的計算を古典幾何学的な計算に置き換えることができる。

AdS/CFTから導かれたユニバーサルな物理量の例

例1　強結合量子凝縮系の粘性の計算（等方性を仮定）

[Kovtun-Son-Starinets 05]

（具体例：QGP,Cold Atom)

$$\boxed{\frac{\eta}{s}=\frac{\hbar}{4\pi k_B}.}$$

例2　格子構造のある異常金属の光学電気伝導度

[Horowitz-Santos-Tong 12]

$$\boxed{|\sigma(\omega)|\approx B\cdot\omega^{-2/3}.}$$

例3　フェルミ面のある強結合(2+1)次元系の比熱

[Ogawa-Ugajin-TT 11]

$$\boxed{C\propto T^{\alpha},\quad \alpha\le\frac{2}{3}.}$$

今後の展望

- AdS/CFT対応は、強結合の量子凝縮系の新しい解析法と考えられ、定性的なレベルではうまく行っているように見える。定量的には、ユニバーサルな量に着目する必要があり、そのような例を開発することは今度の課題の一つである。系統的な理解も必要。

- また、非平衡ダイナミクス、ランダム系への応用も今後期待される。

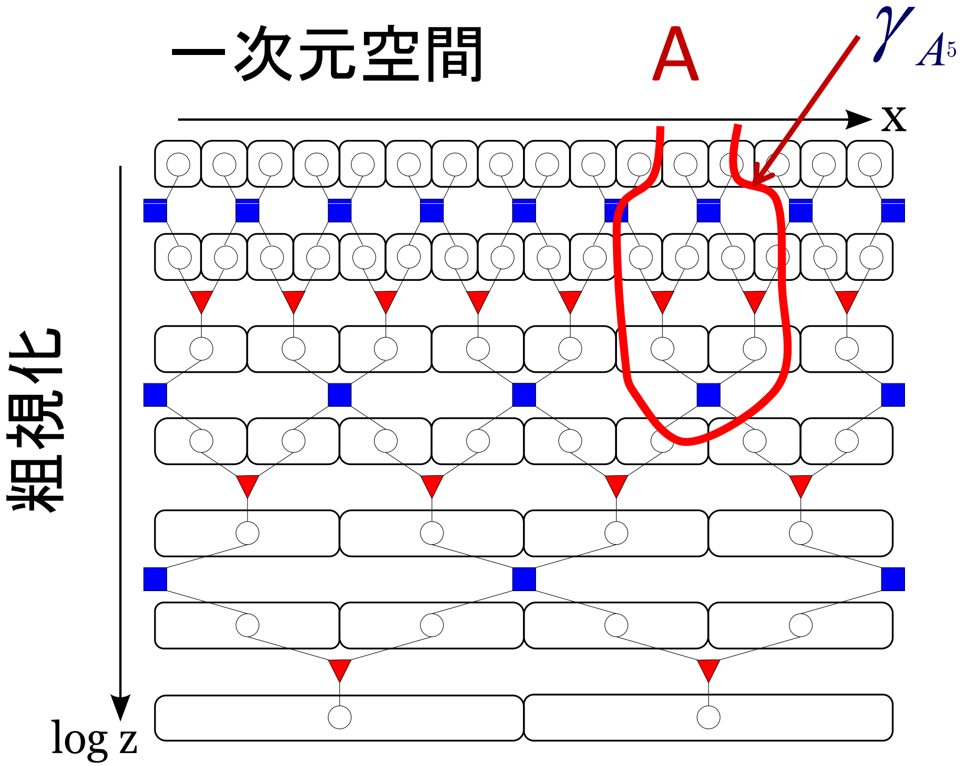
- ホログラフィー原理は、現在でも理解されていない量子重力の問題を超弦理論に基づいて解決する上で、最も重要な鍵と思える。物性理論や量子情報の手法も大いに役に立つ可能性がある。

  例：　ブラックホールの情報損失問題

  　　de Sitter空間やビッグバンにおける量子重力など

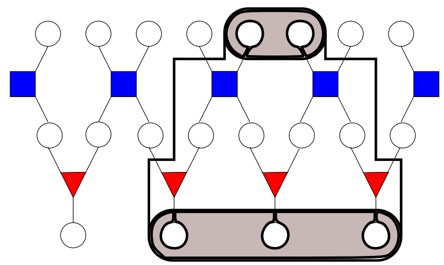
MERA (Multiscale Entanglement Renormalization Ansatz) とAdS/CFT

[MERA, Vidal et.al. 06, Swingle 09, Nozaki-Ryu-TT in preparation]



AdS重力の離散化？

エンタングルメント・エントロピーの計算



$$S_A \approx \mathrm{Min}_{\gamma_A}[\#\,\mathrm{Bonds}]$$

$$\sim \mathrm{Min}_{\gamma_A}\left[\frac{|\gamma_A|}{4G_N}\right].$$

カバーできなかった他の話題

- トポロジカル絶縁体、量子ホール効果
- 不純物効果（Quenched Disorder）
- 非平衡ダイナミクス [⇒中村さんの講演]
- Semi-holographicな記述 [⇒礒野さんのポスター講演]
- フリーデル振動とAdS/CFT
- ラッティンジャーの定理とAdS/CFT
- 様々な模型の超弦理論への埋め込み

などなど

参考文献（レビュー論文）

AdS/CMT 全般:　Hartnoll　arXiv:0905.0932
Mcgreevy　arXiv:0909.0518

Hol. 超伝導:　Herzog　arXiv:0904.1975
Horowitz　arXiv:1002.1722

Hol. Fermi 面:　Iqbal-Liu-Mezei　arXiv:1110.3814

エンタングルメント:　Nishioka-Ryu-TT arXiv:0905.0932
TT arXiv:1204.2450