

第31回 理論懇シンポジウム「宇宙物理の標準理論：未来へ向けての再考」

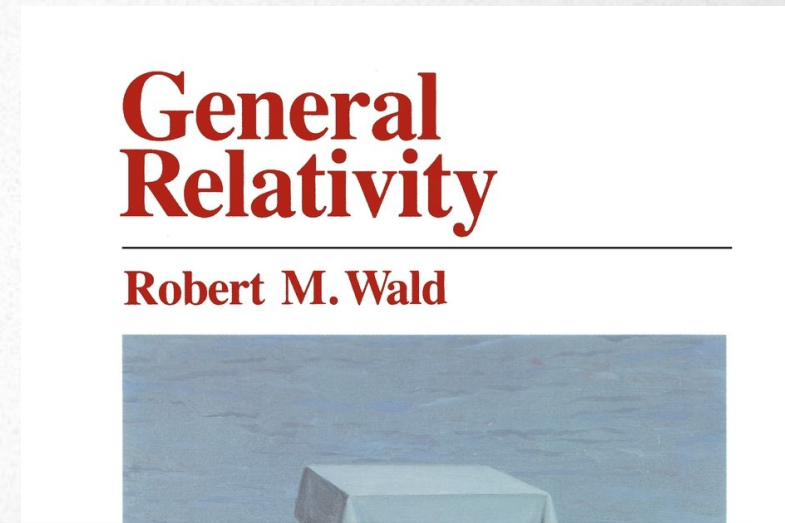
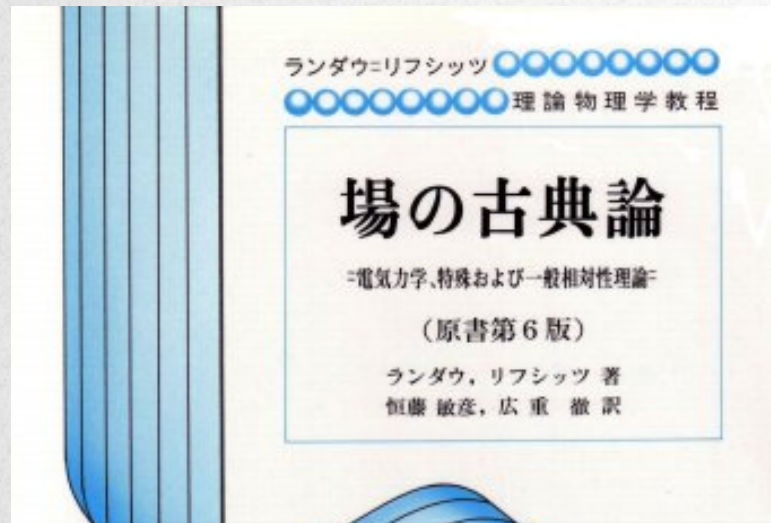
一般相対論と**その拡張**

小林 努



立教大学

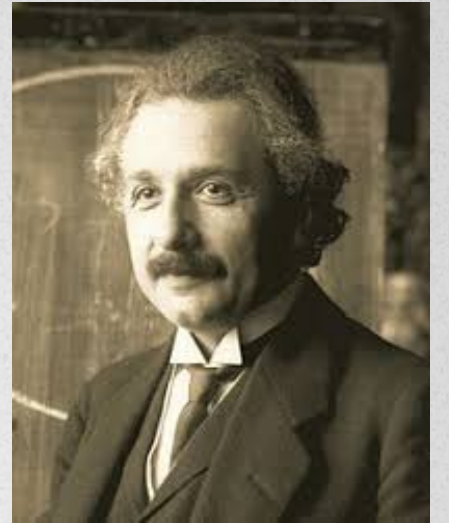
一般相対論は学部4年生でも知っているので
今さら説明する必要はないですね。。。。



宇宙物理理論の研究室の「標準カリキュラム」

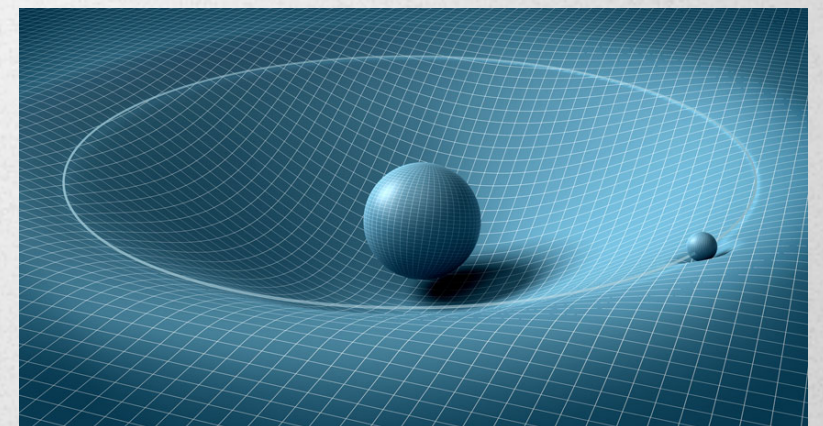
- ・ 4年生 - 場の古典論
- ・ M1 - Wald

- 現状、**一般相対論**で特に問題はない
- 困るのは、ロマンがないことぐらい



- なぜ「標準理論」を拡張したいのか？
- この分野の近年の動向
- どの**非標準(拡張)理論**が生き残っているのか


・・・という話をします。



Plan

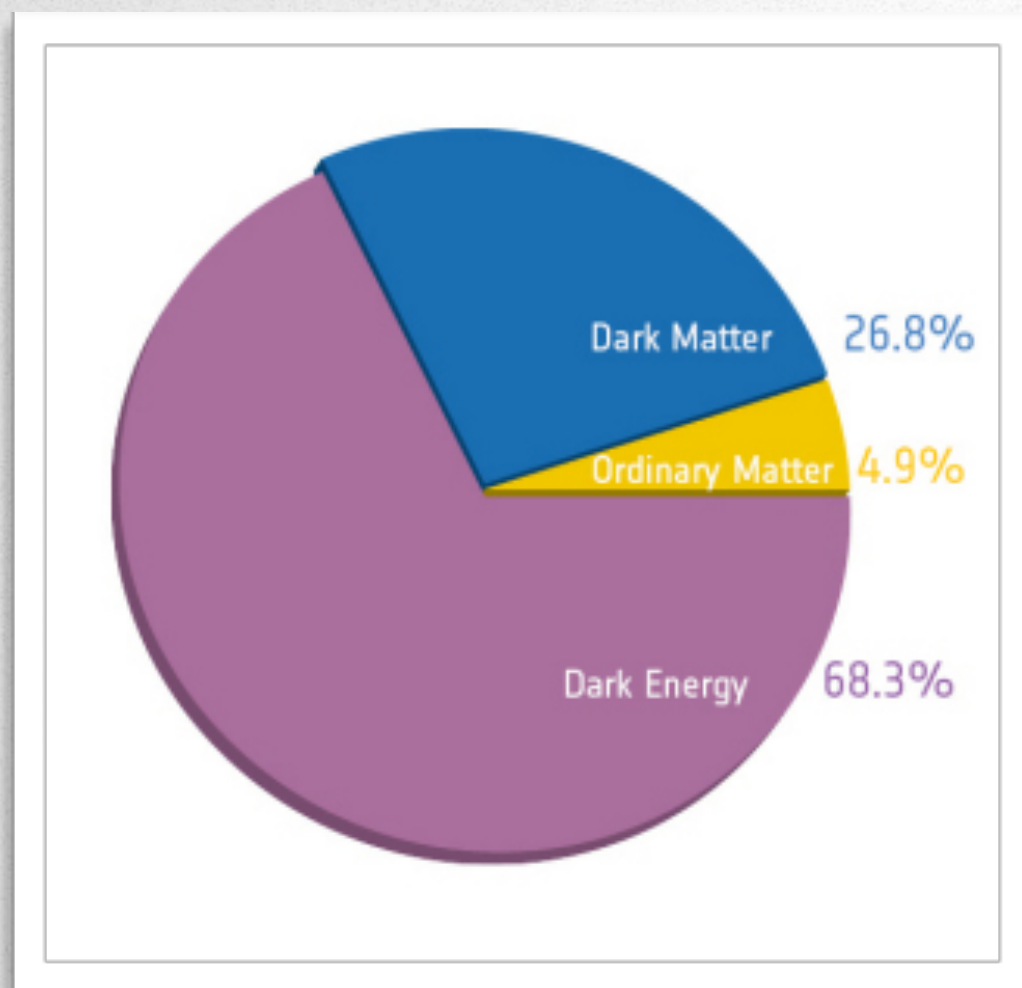
- なぜ修正重力？
- 重力を拡張(修正)するとは？
- “まとも”な重力理論に要請されること
- 近年の研究の動向 — Horndeski & beyond
- GW170817以降の修正重力
- まとめ

$$c = \hbar = 1$$

- 
- なぜ修正重力？
 - 重力を拡張(修正)するとは？
 - “まとも”な重力理論に要請されること
 - 近年の研究の動向 — Horndeski & beyond
 - GW170817以降の修正重力
 - まとめ

動機1: 宇宙の加速膨張

- **宇宙項**で説明できるが、修正重力でも説明できる
- 起源がわからないので、あり得る可能性は検討したい

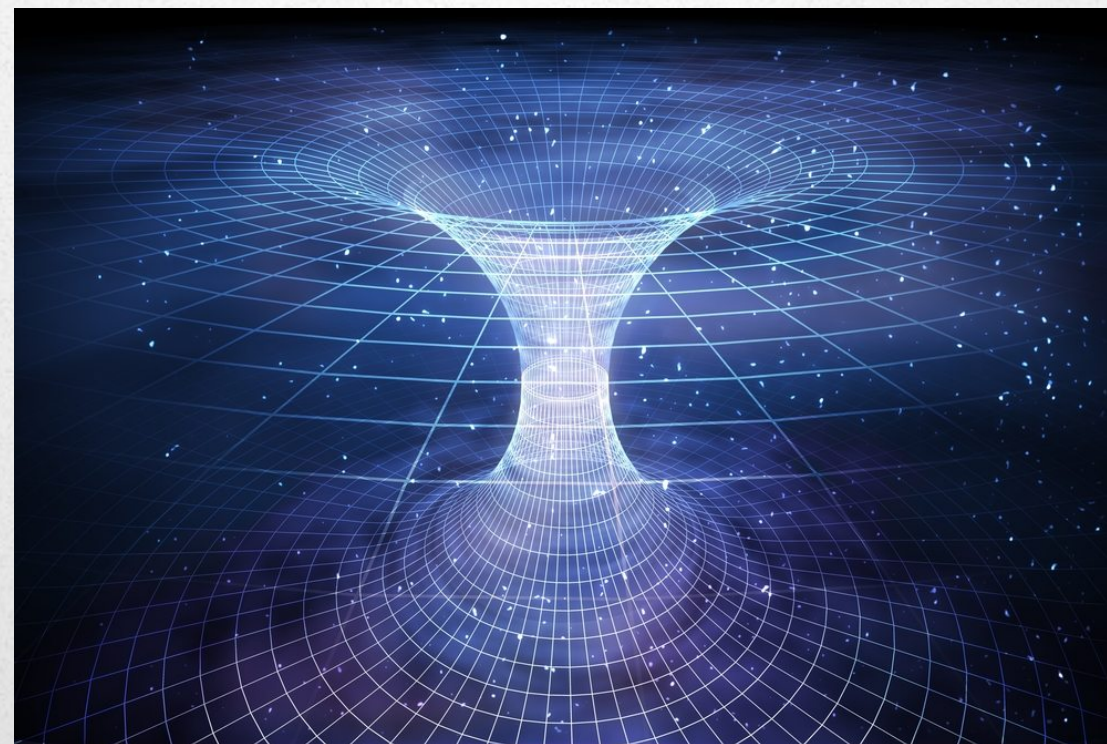


Planck



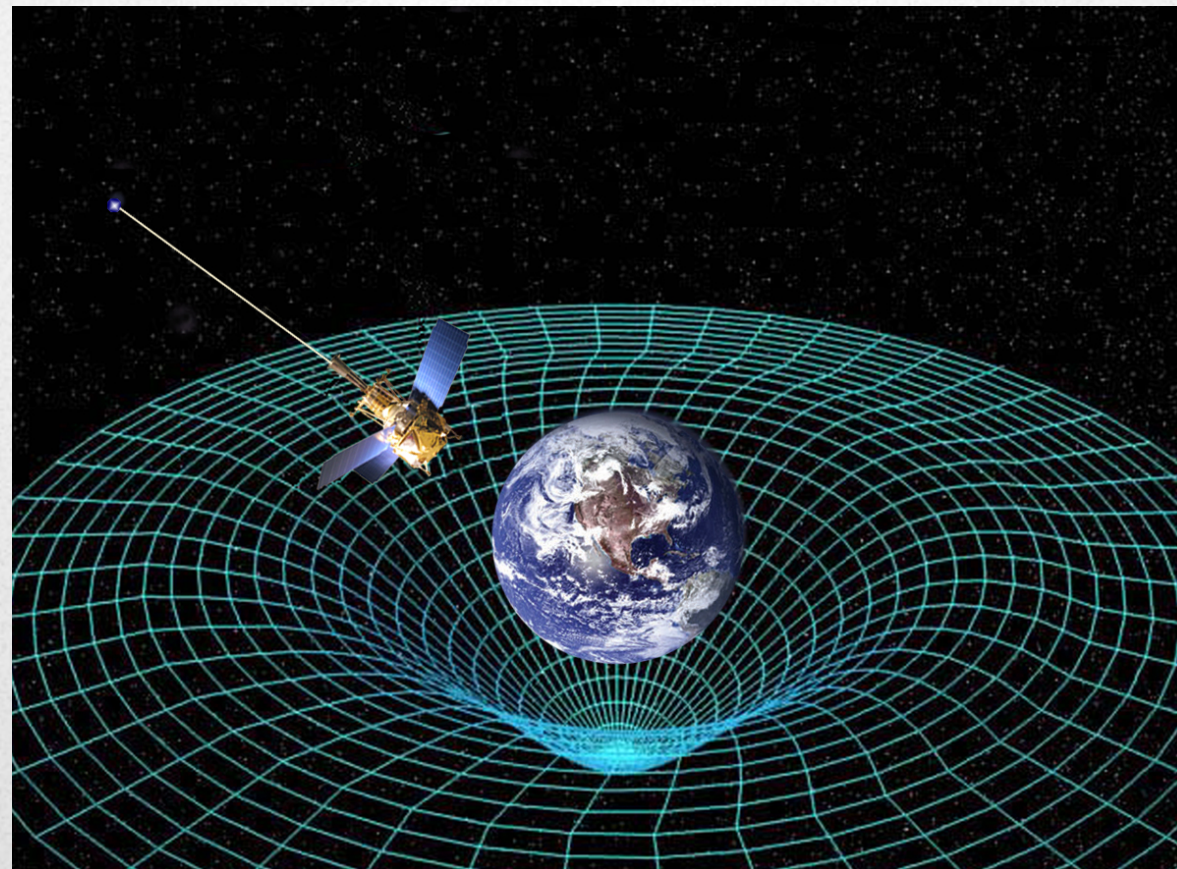
動機2: 一般相対論は“低エネルギー有効理論”であると考えられる

- 高エネルギー/強重力、どこかで一般相対論による記述は悪くなるはず (プランクスケールかもしれないが)
- 量子重力は万人の夢
- 初期宇宙/ブラックホールに痕跡があるかもしれない



動機3: 一般相対論のテスト

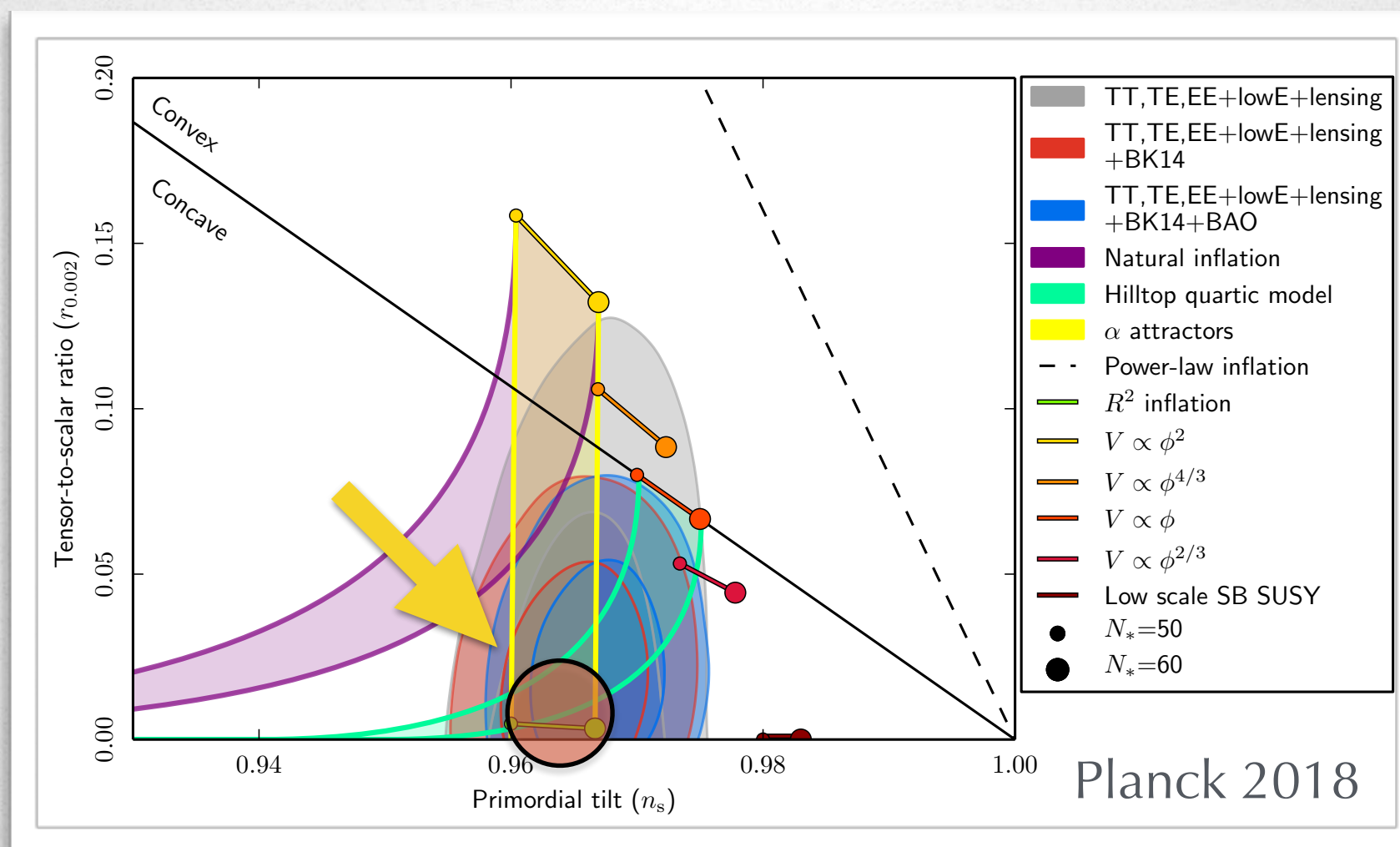
- 太陽系実験、天文学的観測、宇宙論的観測、重力波、、、
- 一般相対論のテストをするためには比較相手が必要
- 「理論/モデルの相対化」は科学として健全な態度



動機4: インフレーション

- 観測とよく合うモデルは“修正重力”インフレーション
- インフラトンと重力場の相互作用は「標準的」でない可能性が高い

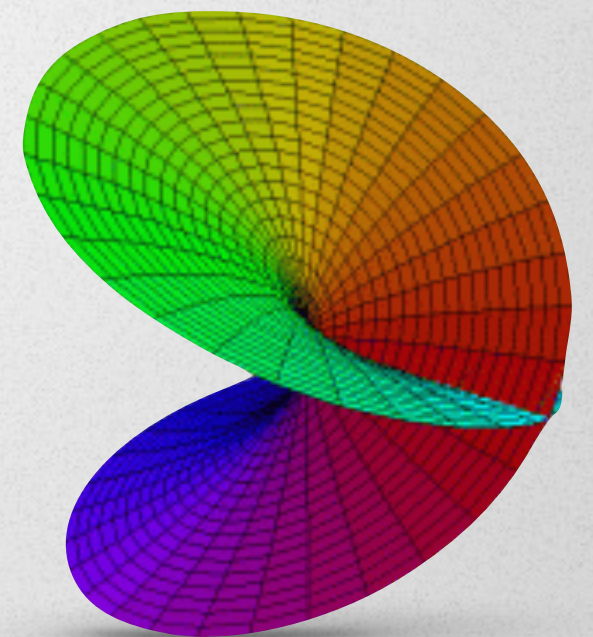
テンソル-スカラー比




スカラー揺らぎのスペクトル指数

動機5: 重力を深く理解したい

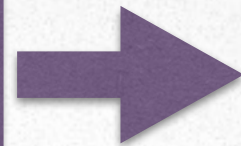
- 純粋に理論的な興味であったとしても・・・
 - Massive spin-2理論の構築を試みることで、massless spin-2理論がどう特別なのか理解できる
 - 高次元時空を研究することで、4次元時空(の特殊性)をさらに深く理解できる
- 宇宙物理・天文とは直接の関係がなくても、物理(場の理論、幾何学、、、)としては面白いこともある



- 
- なぜ修正重力？
 - 重力を拡張(修正)するとは？
 - “まとも”な重力理論に要請されること
 - 近年の研究の動向 — Horndeski & beyond
 - GW170817以降の修正重力
 - まとめ

Lovelockの定理 (1971, 1972)

- 4次元
- ラグランジアン密度は計量だけに依存: $\mathcal{L}[g_{\mu\nu}]$
- 2階の運動方程式

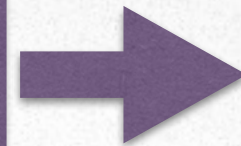


一般相対論 (+宇宙項)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda)$$

Lovelockの定理 (1971, 1972)

- 4次元
- ~~ラグランジアン密度は計量だけに依存: $\mathcal{L}[g_{\mu\nu}]$~~
- 2階の運動方程式

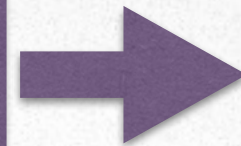


- 計量以外の場(スカラー場、ベクトル場、テンソル場、、、、)を導入する

→ スカラー・テンソル理論
ベクトル・テンソル理論
etc.

Lovelockの定理 (1971, 1972)

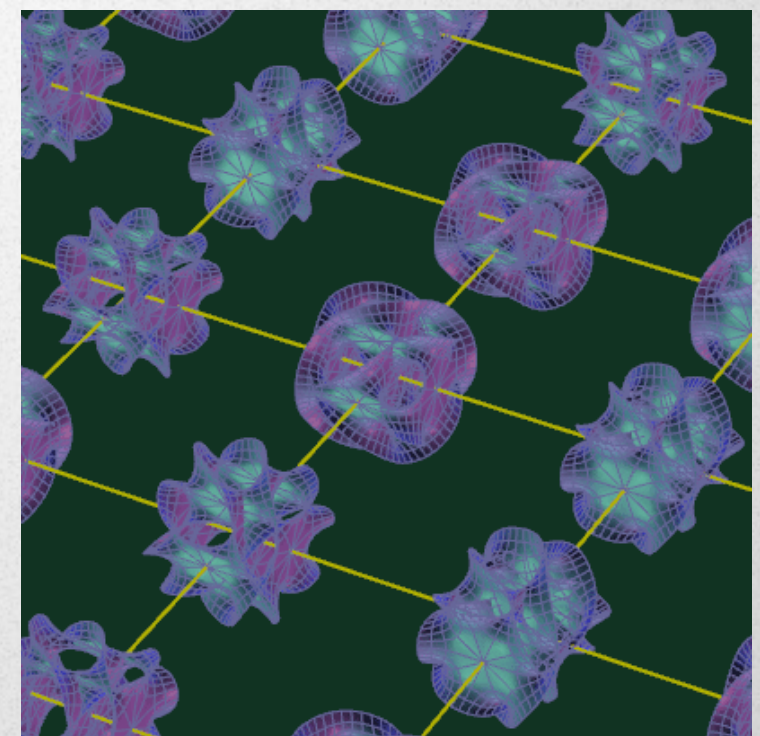
- ~~4次元~~
- ラグランジアン密度は計量だけに依存: $\mathcal{L}[g_{\mu\nu}]$
- 2階の運動方程式



■ 高次元

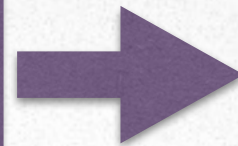


高次元空間の“体積”は
4次元から見たら新しい場



Lovelockの定理 (1971, 1972)

- 4次元
- ラグランジアン密度は計量だけに依存: $\mathcal{L}[g_{\mu\nu}]$
- ~~2階の運動方程式~~



- 高階の運動方程式 \rightarrow 新しい場を導入するのと同じ

$$\ddot{\ddot{x}} + \ddot{\ddot{x}} + \ddot{\ddot{x}} + \dots = 0 \rightarrow \ddot{x} = y,$$
$$\ddot{y} + \dot{y} + \dots = 0$$

例: $f(R)$ 重力 \rightarrow スカラー・テンソル理論

スカラー・テンソル理論

- 多くの修正重力理論は、少なくともeffectiveにはスカラー・テンソル理論で記述される:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}[g_{\mu\nu}, \phi]$$

- テンソル自由度2 (重力波の+とx) + スカラー自由度1
- スカラー場が曲率ないしは物質と(重力と同じ $\mathcal{O}(G_N)$ で) 非最小結合することで重力が修正される:

$$f(\phi)R, \dots, \mathcal{L}_{\text{matter}}[\Omega^2(\phi)g_{\mu\nu}, \psi]$$

$$\rightarrow G_{\mu\nu} \sim \partial^2 g_{\mu\nu} \sim G_N T_{\mu\nu}, \quad \square\phi \sim G_N T_{\mu}^{\mu}$$

$T_{\mu\nu}$ があると、
 $g_{\mu\nu}$ だけでなく
 ϕ も励起される

$$\rightarrow \vec{F} \sim \vec{F}_{\text{grav}} - m\vec{\nabla}\phi \quad \text{Fifth force}$$

- なぜ修正重力？
- 重力を拡張(修正)するとは？
- “まとも”な重力理論に要請されること
- 近年の研究の動向 — Horndeski & beyond
- GW170817以降の修正重力
- まとめ

“まとも”な重力

Consistent, healthy, viable, ...

- (加速膨張を実現するとか、そういう目的にかなうことは当然として…)
- **然るべき極限で一般相対論/標準宇宙論を再現する**
 - ニュートン重力、太陽系実験 (post-Newtonian)、重力波
 - CMB etc.
- **Ostrogradskyゴーストがない**
(安定性、後述)
- **宇宙論解** (などこの世に安定に存在しているものを表す解)
が安定
- etc.

NEW



“まとも”な重力

Consistent, healthy, viable, ...

- (加速膨張を実現するとか、そういう目的にかなうことは当然として…)

- 然るべき極限で一般相対論/標準宇宙論を再現する

NEW

- ニュートン重力、太陽系実験 (post-Newtonian)、重力波
- 初期宇宙に適用するならどうしてもよい要請**
- CMB etc.

- Ostrogradskyゴーストがない

(安定性、後述)

初期宇宙でも重要な要請

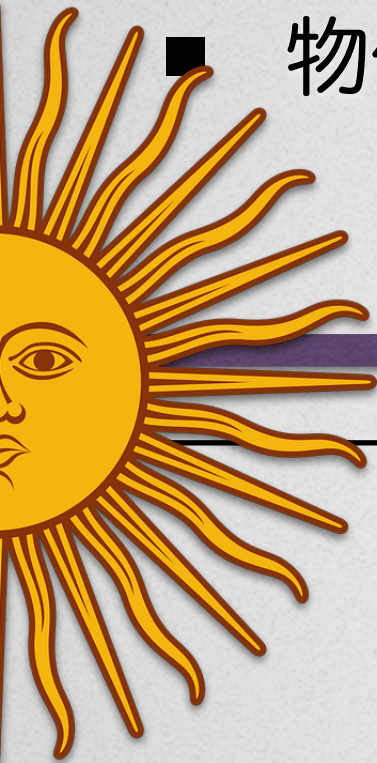
- 宇宙論解(などこの世に安定に存在しているものを表す解)
が安定

- etc.



スクリーニング機構

- スカラー自由度が励起されていると、光の曲がりなどに抵触
- 物体のまわりでスカラー自由度を“隠す”必要



$$|\vec{F}_\phi| \ll |\vec{F}_{\text{grav}}|$$

$$(\square - m_{\text{eff}}^2)\phi \sim G_N T_\mu^\mu$$

$$\rightarrow \phi \sim (G_N M/r) e^{-m_{\text{eff}} r}$$

$$|\vec{F}_{\text{grav}}|$$

- スクリーニングの2つのアイデア: 物体のまわりで...

- i. Effectively massive

- ii. Effectively weakly coupled

$$G_{\mu\nu} \sim G_N T_{\mu\nu}, \quad \square\phi \sim g_{\text{eff}} T_\mu^\mu$$

$$g_{\text{eff}} \ll G_N$$

スクリーニング機構 (i)

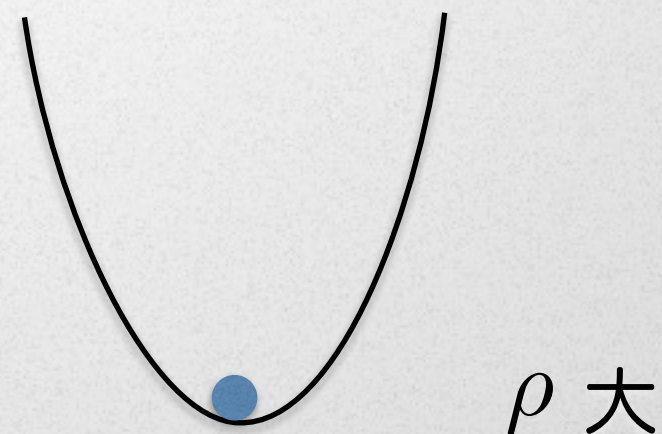
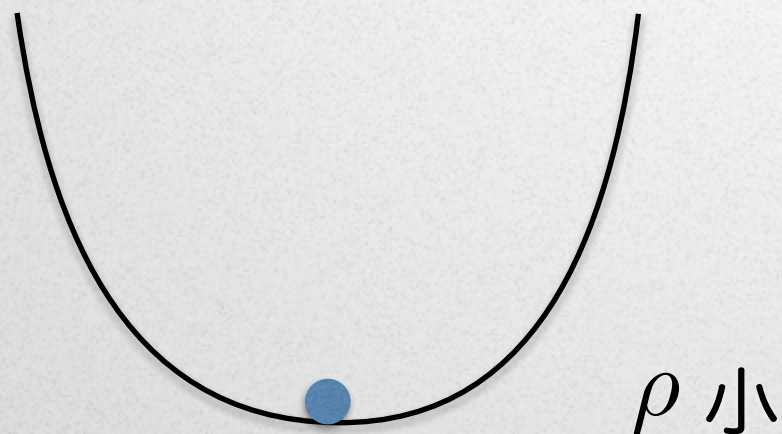
- カメレオン/シンメトロン機構 = “effectively massive”

$$\mathcal{L}_{\text{matter}}[\Omega^2(\phi)g_{\mu\nu}, \psi] \rightarrow V_{\text{eff}} = V_{\text{eff}}(\phi, \rho) \rightarrow m_{\text{eff}}^2 = V_{\text{eff}}''(\phi, \rho)$$

- スカラーのeffective massがエネルギー密度に依存
- 高密度環境下ほど $m_{\text{eff}} \nearrow$ となるポテンシャルならOK
- $f(R)$ 重力はこのタイプ:

$f(R)$ の関数の形 $\Leftrightarrow V_{\text{eff}}(\phi, \rho)$ の関数の形

$V_{\text{eff}}(\phi, \rho)$

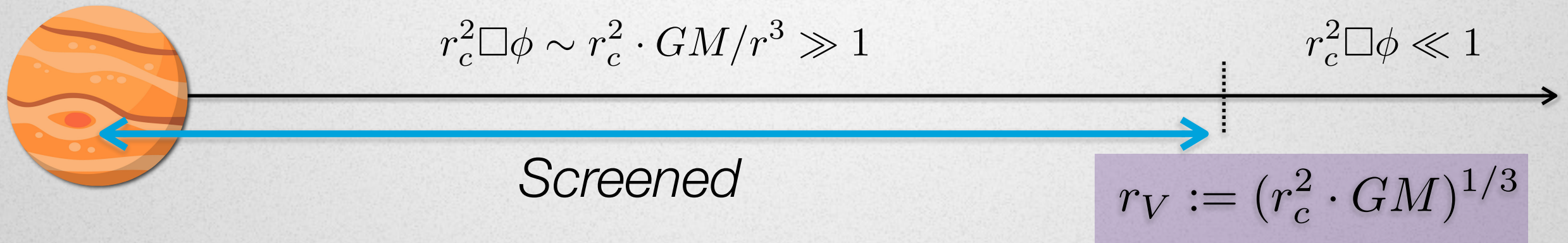


スクリーニング機構 (ii)

- Vainshtein機構 = “effectively weakly coupled”
- スカラーの非線形微分相互作用 (“ガリレオン”タイプの理論)
- 典型的な例: $\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi G} [(\partial\phi)^2 + r_c^2(\partial\phi)^2\Box\phi] + \phi T_\mu^\mu$

$$\begin{array}{ccc} \rightarrow \Box\phi \sim G\rho & \xrightarrow{r_c^2\Box\phi \gg 1} & g_{\text{eff}} \sim G/(r_c^2\Box\phi) \ll G \end{array}$$

- Vainshtein半径



$$r_c \sim H_0^{-1}, M \sim M_\odot \Rightarrow r_V \sim 100 \text{ pc}$$

Ostrogradskyの定理

- 古典力学

$$L = L(\dot{q}, q)$$

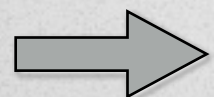
→ 運動方程式は2階 (2個の初期条件): 1自由度

$$L = L(\ddot{q}, \dot{q}, q)$$

→ 運動方程式は4階 (4個の初期条件): 1+1自由度

- 「高階EOMを与えるラグランジアンにより記述される系には、一般にゴースト(不安定な自由度)が現れる」

Ostrogradsky (1850); Woodard 1506.02210



ラグランジアンの形を制限する指針



解析力学の例

- $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - U(q) \iff L = \chi\ddot{q} - \frac{1}{2}\chi^2 - U(q)$
 $= -\dot{\chi}\dot{q} - V(q, \chi)$

- 変数変換: $q = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_2), \quad \chi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 - \psi_2)$

→ $L = -\frac{1}{2}\dot{\psi}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{\psi}_2^2 - V(\psi_1, \psi_2) \quad (2\text{自由度})$



運動エネルギーが負の自由度 (= ゴースト)

宇宙論解の安定性

- Ostrogradsky不安定性がないように理論を作ったとしても、宇宙論解など安定であってほしい解が安定とは限らない
- 摂動の2次の作用から判定できる:

$$g_{ij} = a^2(t) \{ [1 + 2\zeta(t, \vec{x})] \delta_{ij} + h_{ij}(t, \vec{x}) \}$$

曲率揺らぎ(スカラー摂動)


重力波(テンソル摂動)

→ $\mathcal{L}^{(2)} = a^3 \left[\underset{\uparrow}{A(t)} \dot{\zeta}^2 - a^{-2} \underset{\uparrow}{B(t)} (\partial\zeta)^2 \right]$ (重力波も同様)

理論が与えられれば計算できる係数(時間依存)

$$\text{ゴーストがない} \Leftrightarrow A(t) > 0$$

$$\text{伝搬速度が実数} \Leftrightarrow c_s^2(t) := B/A > 0$$

- 
- なぜ修正重力？
 - 重力を拡張(修正)するとは？
 - “まとも”な重力理論に要請されること
 - 近年の研究の動向 — Horndeski & beyond
 - GW170817以降の修正重力
 - まとめ

スカラー・テンソル理論の統一的な枠組

- 計量とスカラー場からなり、運動方程式が2階になる最も一般的なラグランジアンは？

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}[g_{\mu\nu}, \partial g_{\mu\nu}, \partial^2 g_{\mu\nu}, \dots, \phi, \partial\phi, \partial^2\phi, \dots]$$

- 実は、1974年にHorndeskiにより作られていた
- Horndeskiは、その後ゴッホの絵に感銘を受けて物理をやめ、画家に転身したため、論文は忘れられていた
- 検索技術(Google)の進展により、2011年に発掘された

Horndeski, Int. J. Theor. Phys. 10, 363 (1974)



Horndeski理論

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & G_2(\phi, X) - G_3(\phi, X)\square\phi \\ & + G_4(\phi, X)R + G_{4X} [(\square\phi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2] \\ & + G_5(\phi, X)G^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - \frac{1}{6}G_{5X} [(\square\phi)^3 - 3\square\phi(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2 + 2(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^3]\end{aligned}$$

- ϕ と $X := -g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi/2$ の4つの任意関数
- すべてのスカラー・テンソル理論を統一的に記述することができる
- それまではモデルごとにやっていた計算(例: 密度揺らぎの発展方程式の導出など)を効率化
- モデルに依らない一般的性質を見つけ出すのに有用



$$R_{ij} = 0$$

Everything that can be conserved

is

$$\vec{p}_i =$$

Horndeski

(2階の運動方程式)

一般相対論 (2自由度) → •

高階の運動方程式 → Ostrogradskyゴースト

応用1: 宇宙論的摂動と安定性

- 作用を摂動について2次まで展開
→ 例えば重力波(テンソル摂動)の場合...

$$\mathcal{L} = \frac{a^3}{4} \left[A(t) \dot{h}_{ij}^2 - \frac{B(t)}{a^2} (\partial_k h_{ij})^2 \right]$$

$$A := G_4 - 2XG_{4X} - X \left(H\dot{\phi}G_{5X} - G_{5\phi} \right)$$

$$B := G_4 - X \left(\ddot{\phi}G_{5X} + G_{5\phi} \right)$$

重力波の伝搬速度

$$c_{\text{GW}}^2 = \frac{B}{A}$$

どういう理論で $c_{\text{GW}}^2 \neq 1$ なのか
系統的に理解できる

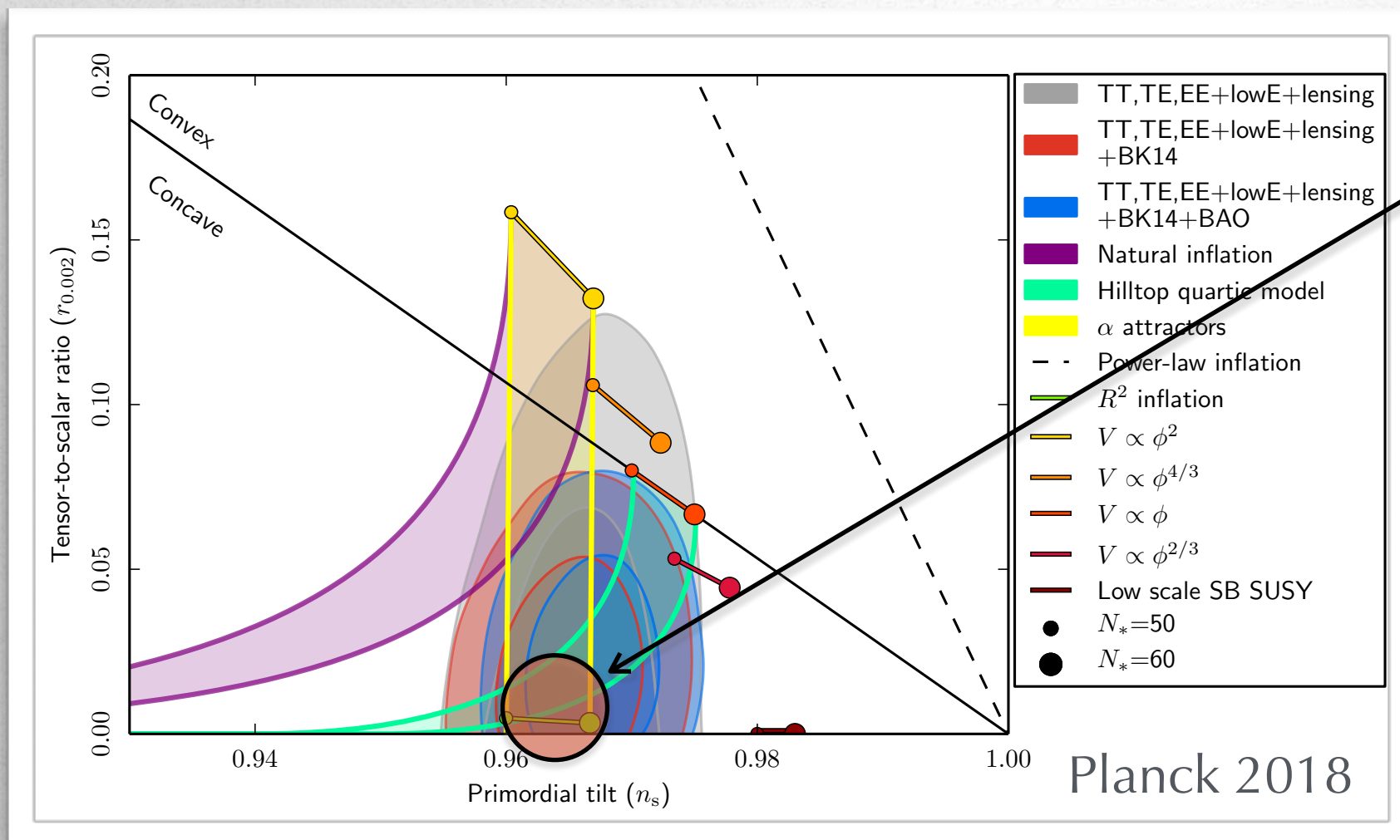
安定性の判定

$$A > 0, c_{\text{GW}}^2 > 0$$

便利な公式集みたいなもの

応用2: インフレーション

- (single-field)インフレーション = 計量とスカラー場で記述される系 = Horndeski理論 TK, M. Yamaguchi, J. Yokoyama (2011)
- “修正重力”インフレーションは今や当たり前



このあたりのモデル

$$\mathcal{L} = R + \alpha R^2$$

$$\mathcal{L} \supset \xi \phi^2 R$$

こういうモデルを統一的に議論できる

応用3: 特異点のない宇宙は不安定

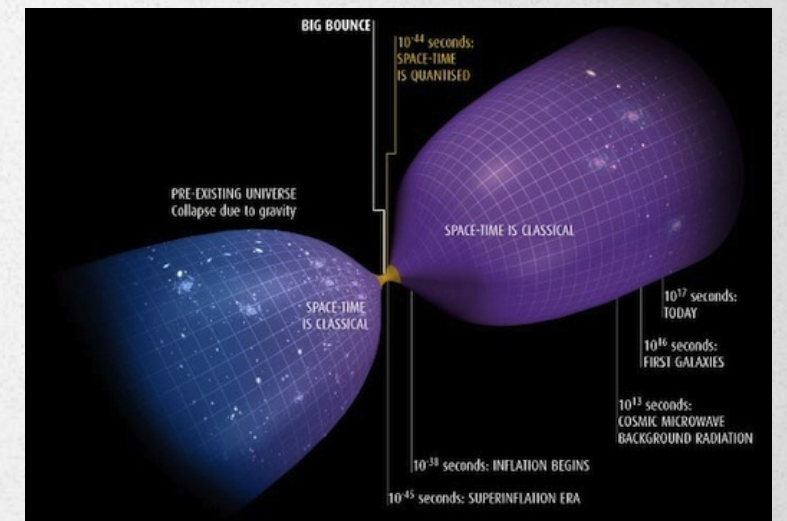
- インフレーションの代替として初期特異点のないシナリオ (バウンス、サイクリック、etc.)が提案されているが…
- Horndeski: 計量 + スカラー場の系、運動方程式が2階



- 特異点のない宇宙論解は必ず不安定
- [証明] 「摂動の安定性の条件:

$$A(t) > 0, c_s^2(t) > 0, \dots$$

は、特異点のない宇宙では $-\infty < t < \infty$ のどこかで必ず破れてしまう」ということを示せる



その他、応用いろいろ

- 線形密度揺らぎの進化

計量摂動の空間成分 時間成分

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} = 4\pi G_{\text{eff}}(t; k)\delta\rho, \quad \Psi = \gamma(t; k)\Phi$$

- どういう変更が現れ得るのか/便利な公式集みたいなもの

A. De Felice, TK, S. Tsujikawa (2011)

- ブラックホール摂動

- 重力波とスカラー波

- 球対称時空の安定性

- etc.

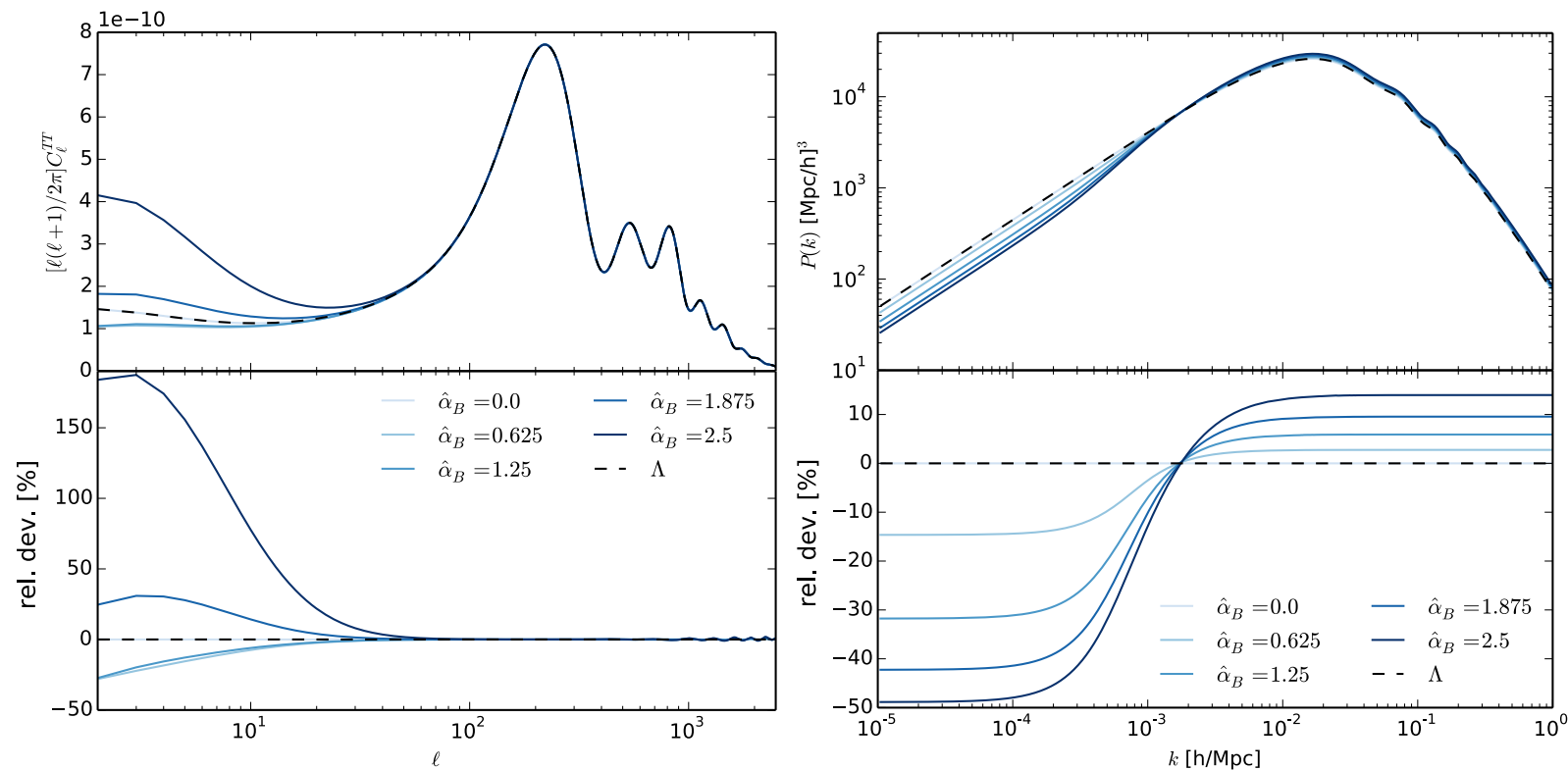


TK, H. Motohashi, T. Suyama (2012, 2014)

Horndeski対応ボルツマンコード

hi_class: Horndeski in the Cosmic Linear Anisotropy Solving System

Miguel Zumalacárregui,^{a,b,c} Emilio Bellini,^{d,e} Ignacy Sawicki,^f
 Julien Lesgourgues^g and Pedro G. Ferreira^e



スカラー・テンソル理論の空間

Horndeski

(2階の運動方程式)

一般相対論 (2自由度) → •

高階の運動方程式 → Ostrogradskyゴースト

本当...?!

縮退理論: beyond Horndeski

- 「運動方程式が2階」は「Ostrogradskyゴーストがない」ための十分条件

- ループホール: **縮退理論**

= 運動方程式は高階だが、組み合わせると2階に落ちる

- 解析力学の例: $L = \frac{\ddot{x}^2}{2} + \sqrt{2}\ddot{x}\dot{y} + \dot{x}^2 + \frac{\dot{y}^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$

運動方程式は高階だが...

$$\ddot{\ddot{x}} + \sqrt{2}\ddot{\ddot{y}} - \ddot{x} - x = 0 \dots (1)$$

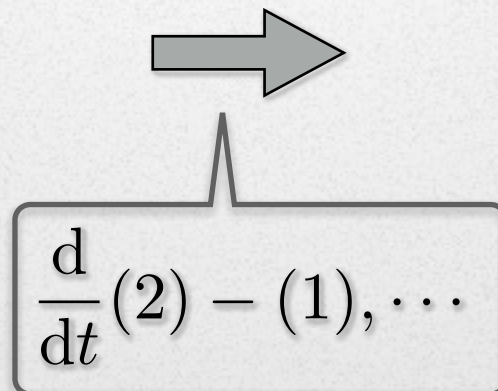
$$\ddot{\ddot{x}} + \sqrt{2}\ddot{\ddot{y}} + y/\sqrt{2} = 0 \dots (2)$$

係数がそろっている

2階の系に落ちる

$$\ddot{x} + \dot{y}/\sqrt{2} + x = 0$$

$$\ddot{y} - \sqrt{2}\dot{x} + y = 0$$



縮退理論: beyond Horndeski

- Degenerate Higher-Order Scalar-Tensor Theory
(DHOST) Langlois & Noui (2015); Crisostomi, et al. (2016)

- $\nabla_\mu \nabla_\nu \phi$ の多項式であることを仮定 $\phi_\mu := \nabla_\mu \phi$

$$\mathcal{L} = \dots + f(\phi, X)R + A_1(\phi, X)\phi_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu} + \dots + A_5(\phi, X)(\phi^\mu\phi^\nu\phi_{\mu\nu})^2 + \dots$$

- 縮退 \Leftrightarrow 係数の関数の間にいくつかの関係式
- 完全な一般形はわかっていない

2+1自由度の縮退理論

$\sim (\nabla\nabla\phi)^4?, (\nabla\nabla\phi)^5?, \dots$

Horndeski

(2階の運動方程式)

一般相対論(2自由度) \longrightarrow •

Quadratic & cubic DHOST

(高階の運動方程式)

Ostrogradskyゴーストのある理論

= Horndeskiとdisformal変換でつながる理論

安定な宇宙論解は の内部にのみ存在

Horndeski

(2階の運動方程式)

一般相対論(2自由度) → •

Quadratic & cubic DHOST

(高階の運動方程式)

* disformal変換

$g_{\mu\nu}$

↓

場の再定義

$$A(\phi, X)g_{\mu\nu} + B(\phi, X)\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$$



= 宇宙論解が必ず不安定

さらに一般的な理論を
systematicに作って調
べたが、かなり普遍的
に不安定なようだ…

K. Takahashi & TK (2017)

K. Takahashi = 高橋一史 (学振PD@立教)

Extended mimetic gravity

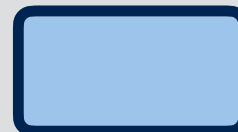
(高階の運動方程式)

Horndeski

(2階の運動方程式)

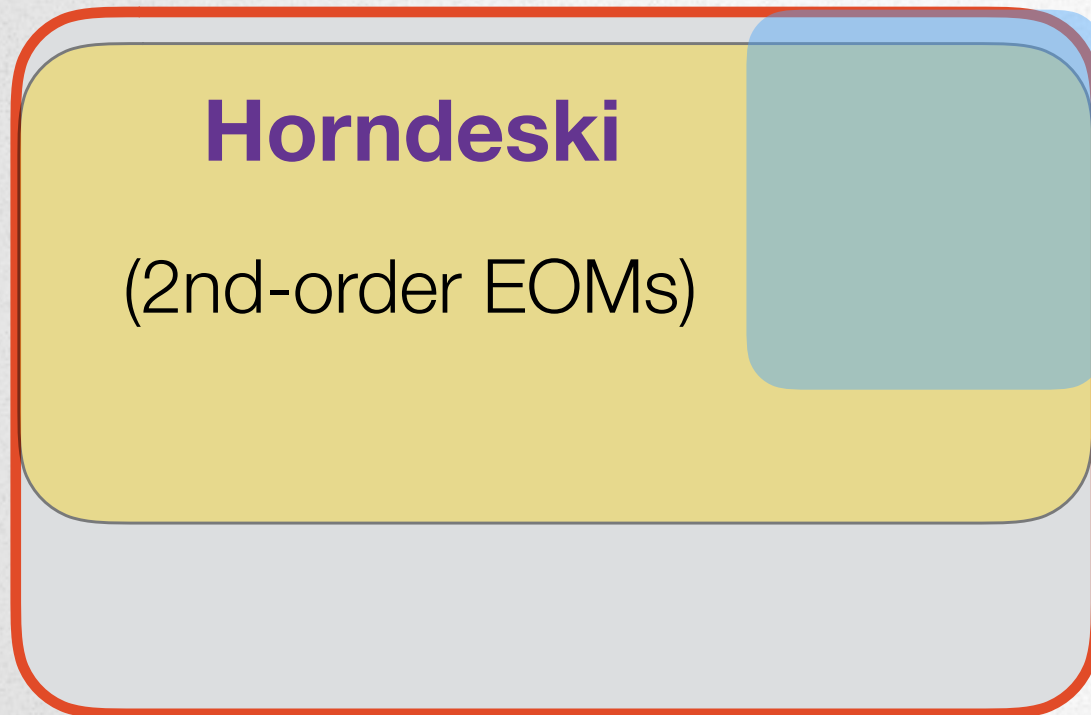
Quadratic & cubic DHOST

(高階の運動方程式)




= 宇宙論解が必ず不安定

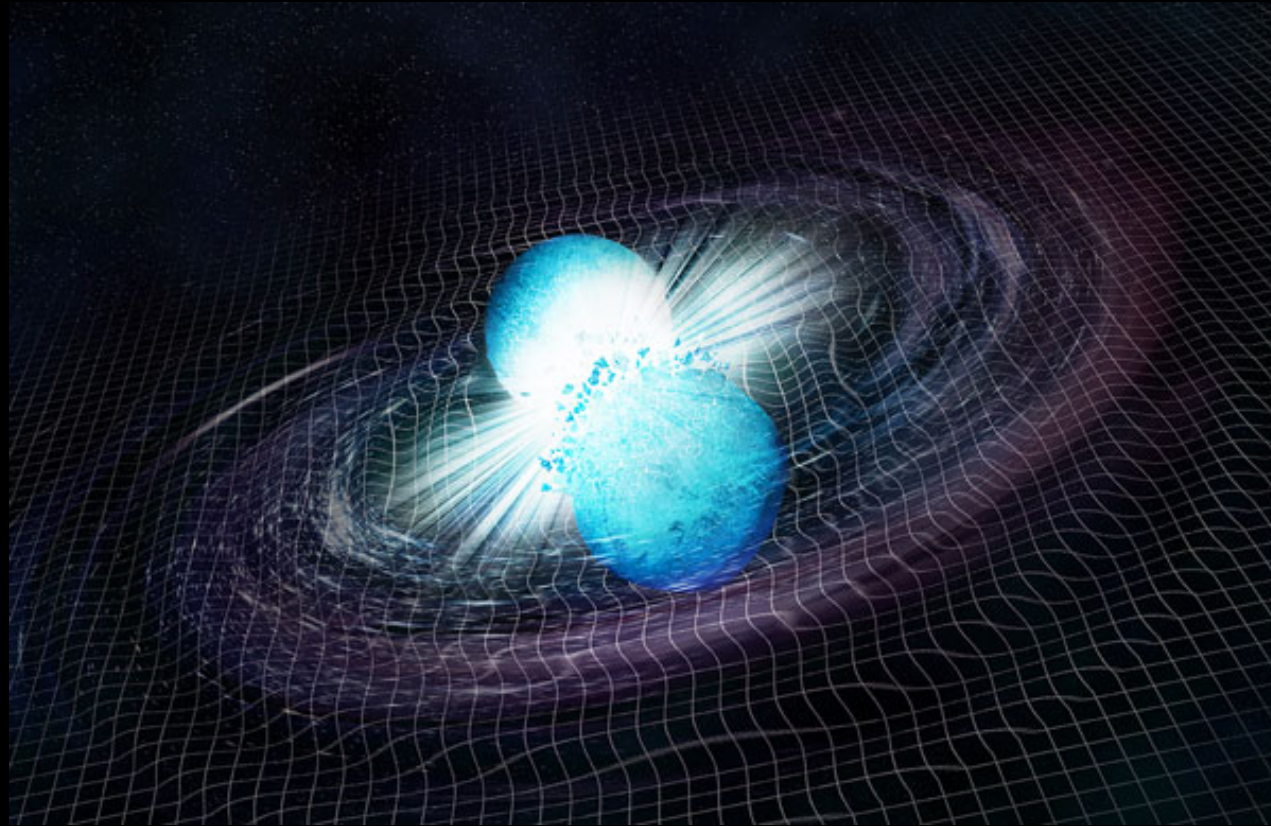
Horndeski理論、およびそれと(可逆)disformal変換でつながっている理論以外、宇宙論解が不安定 (状況証拠)



 –  の中の理論だけ調べれば十分(?)

- 
- なぜ修正重力？
 - 重力を拡張(修正)するとは？
 - “まとも”な重力理論に要請されること
 - 近年の研究の動向 — Horndeski & beyond
 - **GW170817以降の修正重力**
 - まとめ

GW170817



$$|c_{\text{GW}}^2 - 1| < \mathcal{O}(10^{-15})$$

任意関数のいくつかに非常に強い制限

GW170817以降

Horndeski

(2nd-order EOMs)

GR (2 dofs) → •

$c_{GW} = c$ in



GW170817とHorndeski

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & G_2(\phi, X) - G_3(\phi, X)\square\phi \\ & + G_4(\phi, X)R + G_{4X} [(\square\phi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2] \\ & + G_5(\phi, X)G^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - \frac{1}{6}G_{5X} [(\square\phi)^3 - 3\square\phi(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2 + 2(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^3] \end{aligned}$$

→ $c_{\text{GW}}^2 = \frac{G_4 - X(\ddot{\phi}G_{5X} + G_{5\phi})}{G_4 - 2XG_{4X} - X(H\dot{\phi}G_{5X} - G_{5\phi})}$

0

↗

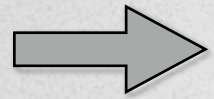
Creminelli & Vernizzi;
Sakstein & Jain;
Ezquiaga & Zumalacarregui;
Baker, et al. (2017)

→ $\mathcal{L} = G_4(\phi)R + G_2(\phi, X) - G_3(\phi, X)\square\phi$

注1: 「スカラー・テンソル理論の虐殺が起こった」などとTwitterに書かれていたが、殺されたのは目新しい理論ばかりで、昔からあるような理論は無傷だった

注2: $z \sim 0.01$ の話なので、初期宇宙における重力への制限にはならない

GW170817とDHOST



$$\mathcal{L} = f(\phi, X)R + G_2(\phi, X) - G_3(\phi, X)\square\phi + A_3(\phi, X)\square\phi\phi^\mu\phi^\nu\phi_{\mu\nu} + \dots$$

(ϕ, X) の任意関数4つまで追い詰めた

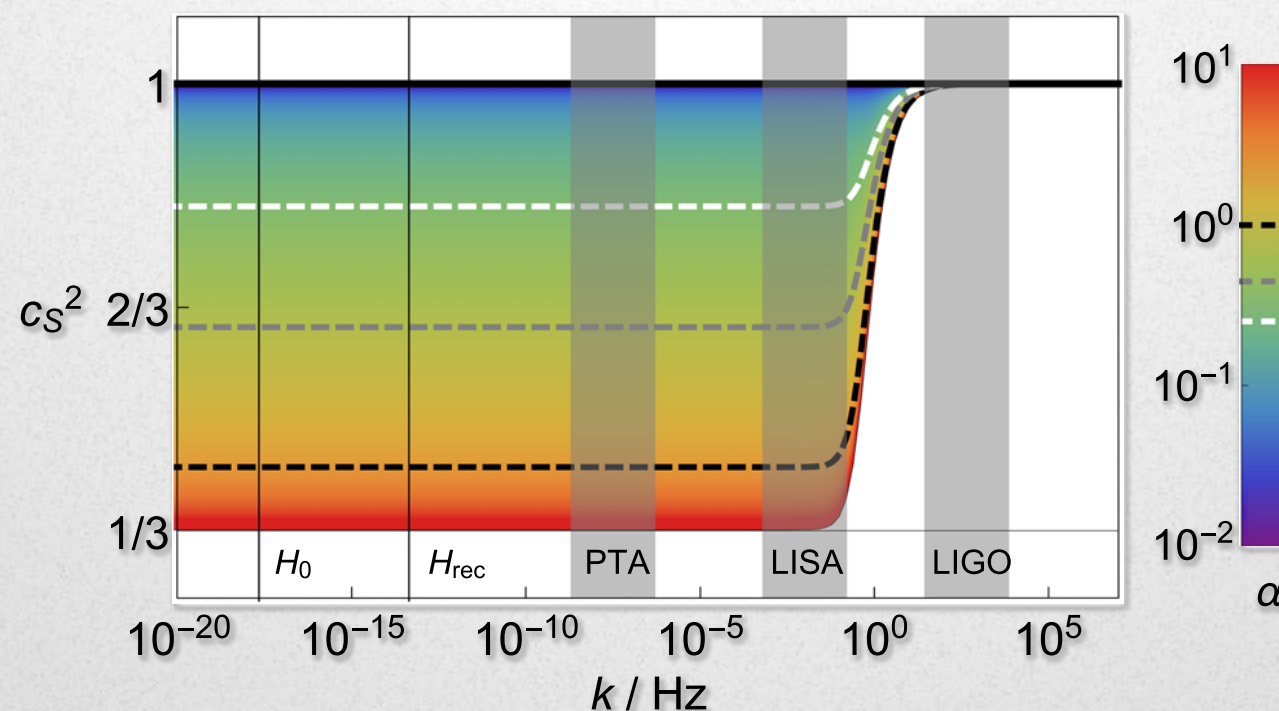


しかし、微妙な点もある

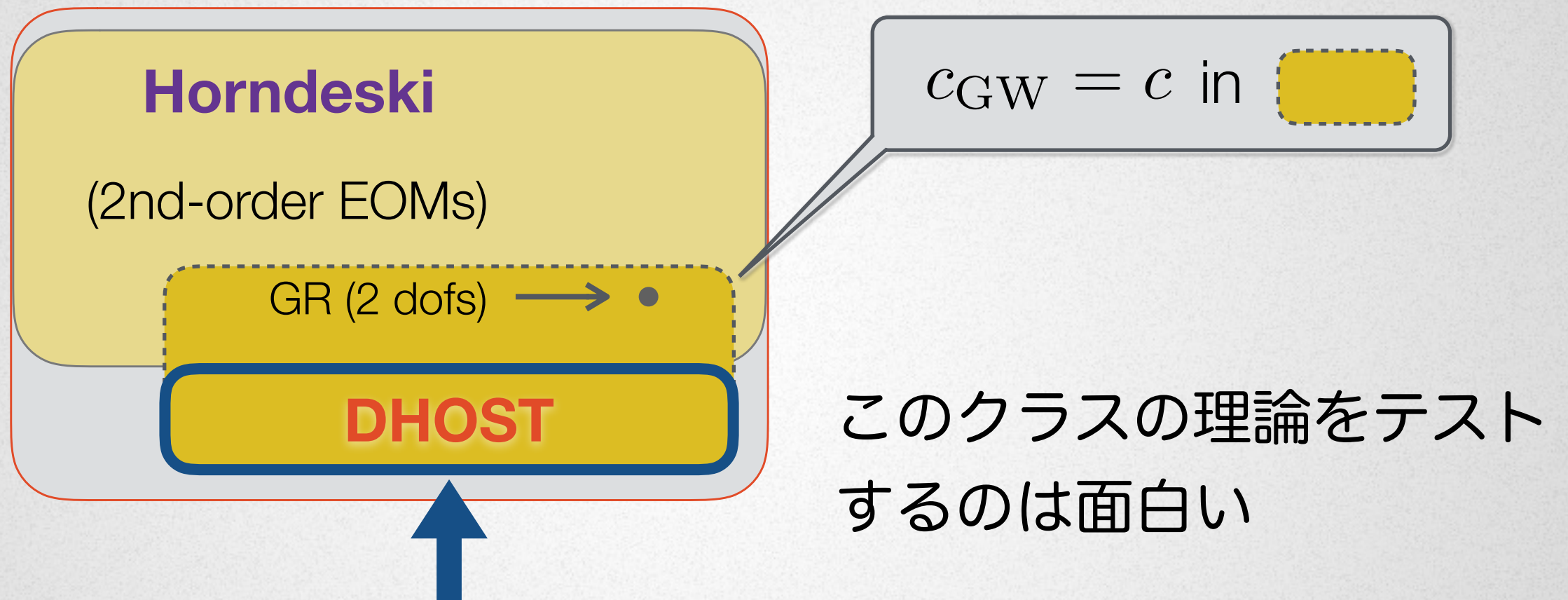
- この手の理論の典型的なカットオフスケール

$$\Lambda \sim (M_{\text{Pl}} H_0^2)^{1/3} \sim 100 \text{ Hz}$$

- LIGOの観測は、ダークエネルギー/修正重力の低エネルギー有効理論の記述が微妙になってくるあたりを見ているのかもしれない (= 制限にならない)



GW170817以降



重力が物質内部でのみ変更される
(星の内部などでスクリーニングが不完全)

TK, Y. Watanabe, D. Yamauchi (2015)

DHOSTのテスト

- Newtonian極限 – 内部でのみ重力変更

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{GM}{r^2} + \Upsilon \frac{G}{4} \frac{d^2 M}{dr^2}$$

- 外はスクリーンされていて変更なし
(光の曲がりなどではテスト不可能)

- 星の構造からの制限

$$-2/3 < \Upsilon < 1.6$$

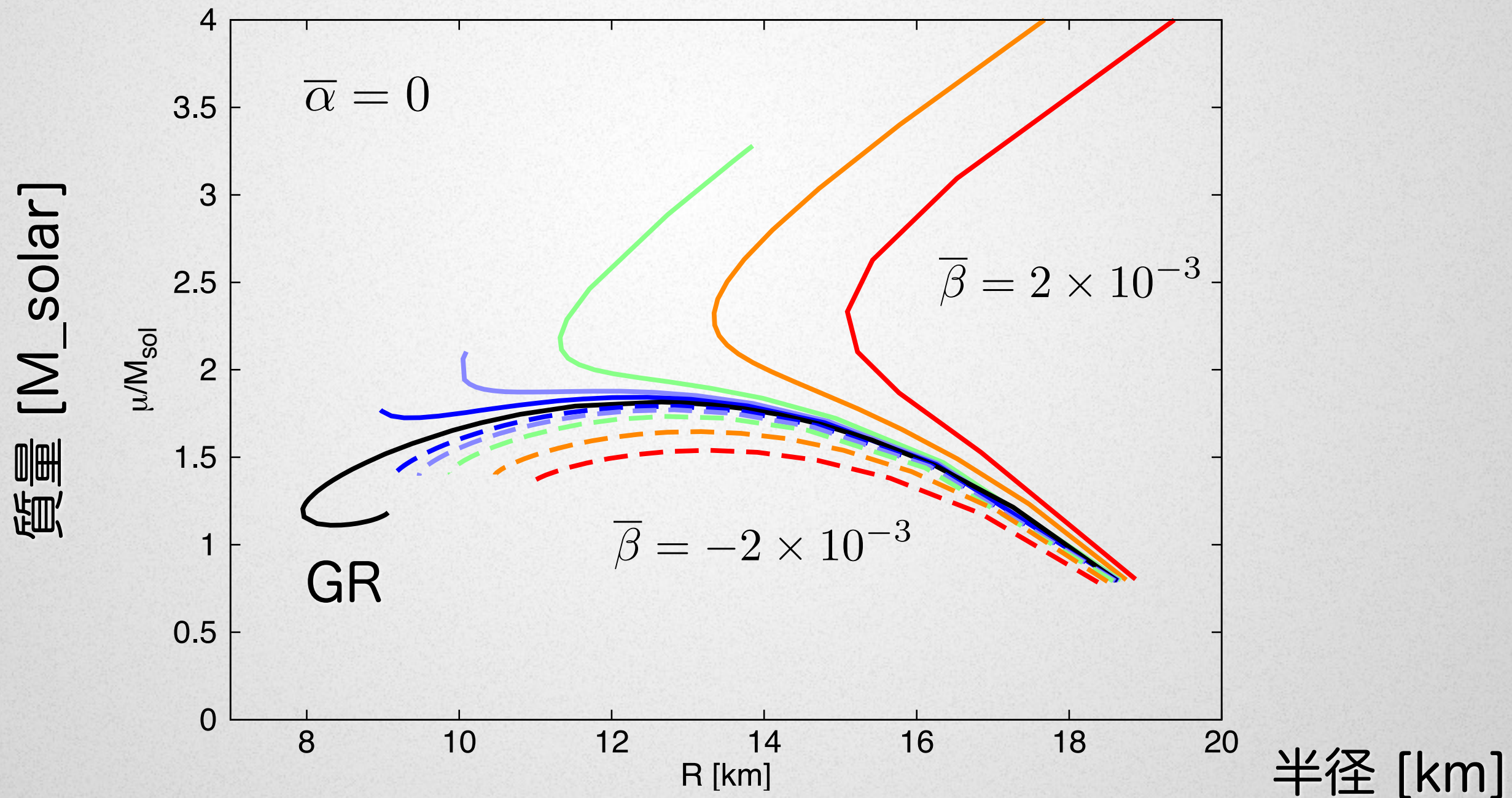
星の中心で重力が
引力であるべし

水素燃焼が起こる最小質量
< 観測されているred dwarfの最小質量



DHOSTと相対論的天体

Newtonianではほとんど違いが出ないようなパラメータでも大きく変わる (ただし、モデル依存性はある)

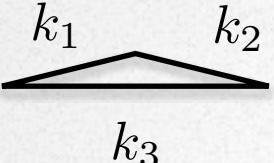


DHOSTの宇宙論的テスト

- DHOST対応ボルツマンコードを平松君が開発中

T. Hiramatsu, *in preparation*

- 大規模構造

– folded ()でバイスペクトルを変更

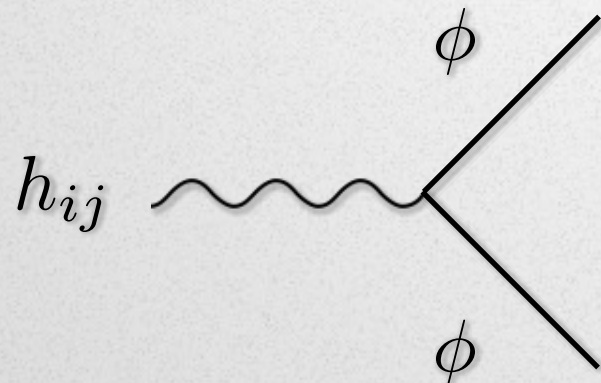
S. Hirano, TK, H. Tashiro, S. Yokoyama (2018)

S. Hirano, TK, D. Yamauchi, S. Yokoyama, *in preparation*


S. Hirano = 平野進一 (立教大D2)

- 重力波がスカラーに崩壊 (したら届かないということから制限)

P. Creminelli *et al.* 1809.03484



生き残っていた4つの関数のうちの1つ = 0

- 
- なぜ修正重力？
 - 重力を拡張(修正)するとは？
 - “まとも”な重力理論に要請されること
 - 近年の研究の動向 — Horndeski & beyond
 - GW170817以降の修正重力
 - まとめ

まとめ

- 現状、一般相対論でよいが、拡張する動機は十分にある
- 一般的・統一的な理論の枠組(Horndeski/beyond Horndeski)
 - * 有効理論の適用範囲なのかは要注意
- [現在の宇宙] GW170817以降、viableな理論はある程度絞られたが、まだ面白い理論が生き残っている
- [初期宇宙] “修正重力”インフレーションは今や当たり前