

原子核三者若手夏の学校2016, 8月1日,黒姫ライジングサンホテル

汎関数くりこみ群によるスペクトル関数の計算と QCD臨界点におけるソフトモードの解析

横田 猛 (京都大学理学研究科)

Collaborators

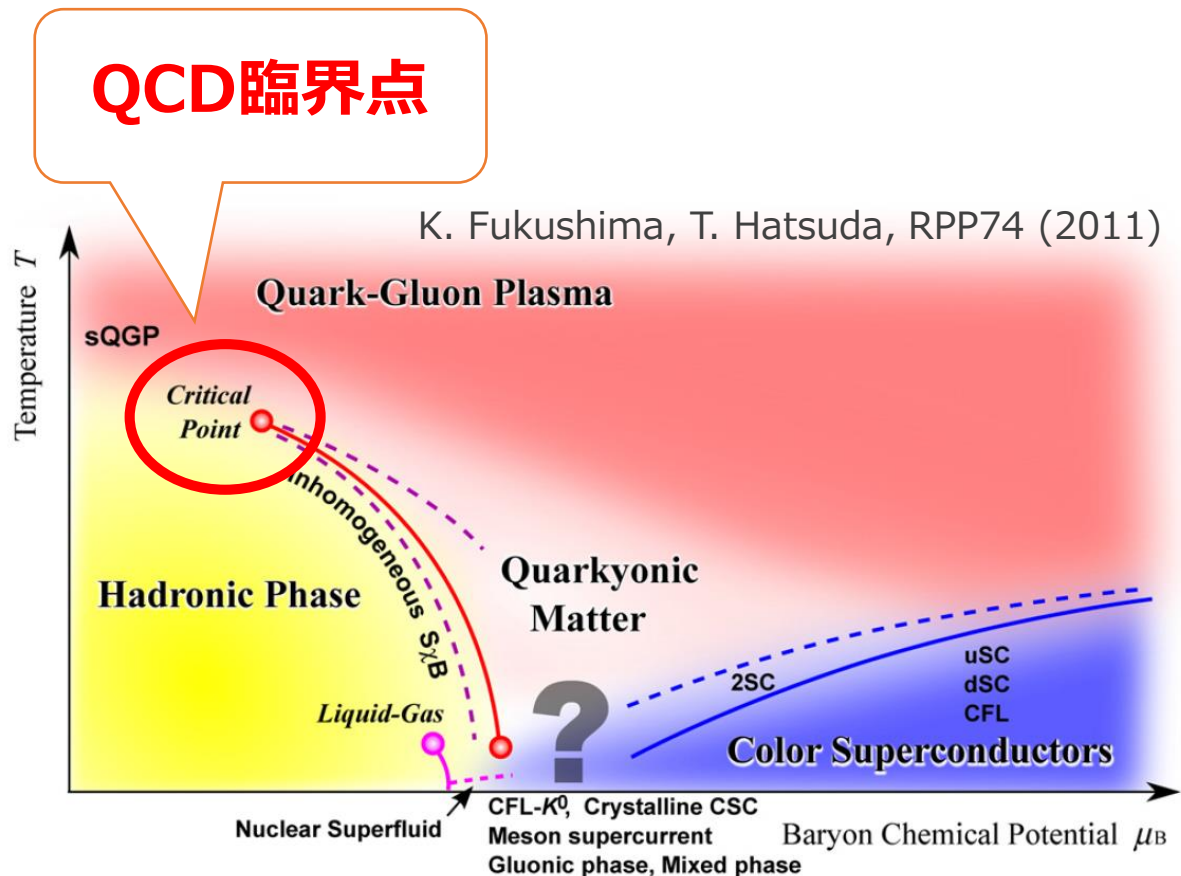
国広 悌二 (京都大学理学研究科)

森田 健司 (基礎物理学研究所)

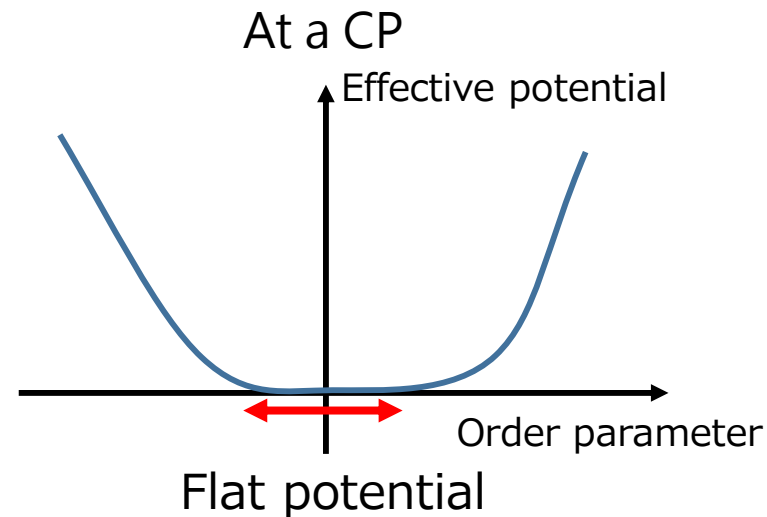
Reference: Prog. Theor. Exp. Phys. (2016) 073D01

1. 導入

臨界点とソフトモード



臨界点では・・・



揺らぎが発達、
ゆるい(ギャップレス、長寿命)モードが出現

→ ソフトモード

- QCD臨界点でのソフトモードは何か?

QCD臨界点でのソフトモード

先行研究の予想: **流体力学的モード (保存量密度揺らぎ)**

H. Fujii, M. Ohtani, PRD70 (2004)

TDGL and RPA for NJL model

D. T. Son, M. A. Stephanov, PRD70 (2004)

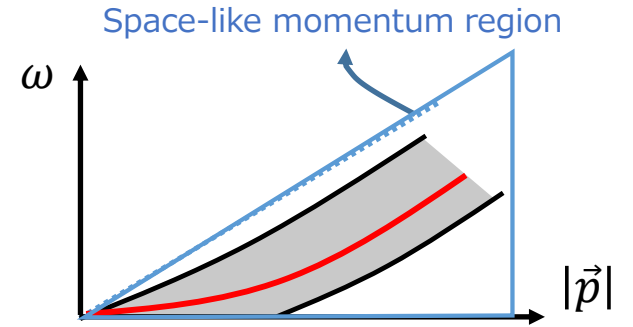
Langevin equation

Y. Hatta, T. Ikeda, PRD67 (2003)

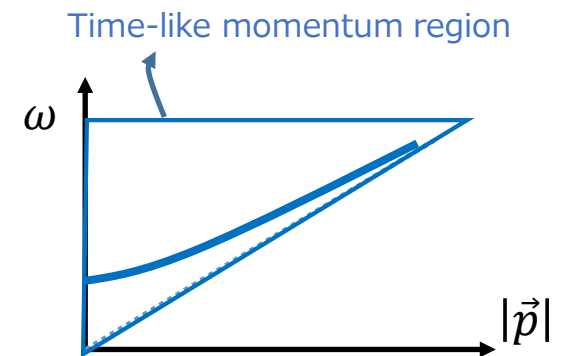
QCD effective potential

- カレントクォーク質量がゼロでない場合の話
- これらのモードは粒子-正孔励起と解釈され、分散関係は空間的な運動量領域 ($|\vec{p}| > \omega$) にサポートを持つ。

シグマ中間子モードはカレントクォーク質量がゼロの時はソフトモードになる。
だが、カレントクォーク質量がゼロでないときはソフトモードにならない。



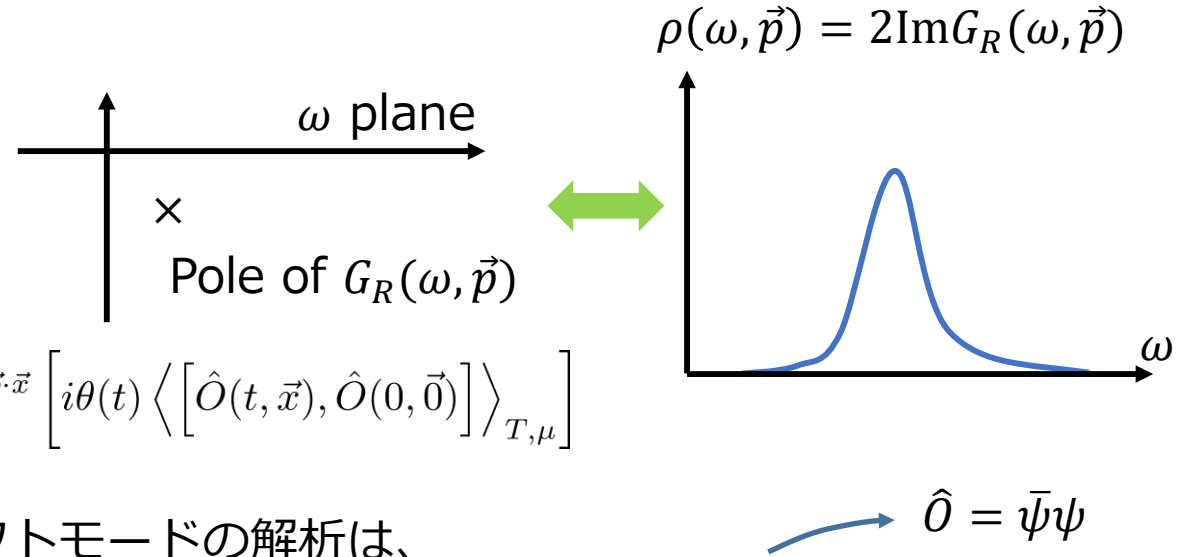
流体力学的モードの分散関係



シグマ中間子モードの分散関係

ソフトモードの調べ方

- スペクトル関数は、系に存在するモードを見るのに便利。



$$G_R(\omega, \vec{p}) = \int d^4x e^{i\omega t - i\vec{p}\cdot\vec{x}} \left[i\theta(t) \left\langle \left[\hat{O}(t, \vec{x}), \hat{O}(0, \vec{0}) \right] \right\rangle_{T, \mu} \right]$$

- シグマチャンネルスペクトル関数 ρ_σ によるソフトモードの解析は、NJLモデルでのRPA計算でなされている。

H. Fujii, M. Ohtani, PRD70 (2004)

- 近年、汎関数くりこみ群法 (FRG) という非摂動的手法でスペクトル関数を計算する手法が発達している。

R. Tripolt, N. Strodthoff, L. Smekal, J. Wambach, PRD89 (2014); R. Tripolt, L. Smekal, J. Wambach, PRD90 (2014)

K. Kamikado, N. Strodthoff, L. Smekal, J. Wambach, EPJ C74 (2014)

本研究:

QCD臨界点周りで、FRGを用いてメソンチャンネルのスペクトル関数を非摂動的に計算。
ソフトモードを解析

2. 手法

汎関数くりこみ群

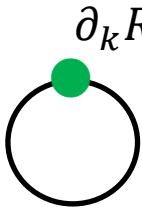
- 有効作用に対する非摂動的な計算手法。

C. Wetterich, PLB 301 (1993)

有効平均作用 (EAA)

レギュレータ (適当な関数)

Wetterich equation: $\partial_k \Gamma_k[\phi] = \frac{1}{2} \text{STr} \left[\frac{\partial_k R_k}{\Gamma_k^{(2)}[\phi] + R_k} \right] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{\partial_k R_k}{[\Gamma_k^{(2)} + R_k]^{-1}} \right]$



UV scale

$$\Gamma_{k=\Lambda}[\phi] = S_\Lambda[\phi]$$

裸の作用

粗視化 (scale parameter $k \rightarrow 0$)

$$\Gamma_{k=0}[\phi] = \Gamma[\phi]$$

有効作用

クォーク中間子模型と局所ポテンシャル近似

- 模型は2-フレーバークォーク中間子模型を用いた。また、局所ポテンシャル近似を適用した。

- 2-フレーバークォーク中間子模型 (in imaginary-time formalism) D. U. Jungnickel, C. Wetterich, PRD53 (1996)

$$S_\Lambda [\bar{\psi}, \psi, \phi = (\sigma, \vec{\pi})] = \int_0^{\frac{1}{T}} d\tau \int d^3\vec{x} \left\{ \bar{\psi} (\not{\partial} + g_s(\sigma + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}\gamma_5) - \mu\gamma_0) \psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + V_\Lambda(\phi^2) - \underline{c\sigma} \right\}$$

Effect of the current quark mass

- 局所ポテンシャル近似: 平均有効作用の形を近似。

$$\Gamma_k [\bar{\psi}, \psi, \phi = (\sigma, \vec{\pi})] = \int_0^{\frac{1}{T}} d\tau \int d^3\vec{x} \left\{ \bar{\psi} (\not{\partial} + g_s(\sigma + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}\gamma_5) - \mu\gamma_0) \psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\pi^a)^2 + \underline{U_k(\phi^2)} - c\sigma \right\}$$

k dependence

U_k は微分展開の最低次の項。つまり波動関数くりこみの影響などは入っていない。

低運動量モードに興味があるので、微分項の簡単化はスタート地点としてはまともな近似だろう。

スペクトル関数の計算

- 有効作用の場による二階微分 → 二点関数

$$\left. \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \sigma(p) \delta \sigma(q)} \right|_{\sigma=\sigma_0} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+q) \underline{G_{\sigma,k}^{-1}(p)}$$

→ σ の平均値(カイラル凝縮)

$$\left. \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \pi^a(p) \delta \pi^a(q)} \right|_{\sigma=\sigma_0} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+q) \underline{G_{\pi,k}^{-1}(p)}$$

- 遅延グリーン関数 (実時間グリーン関数) を得るには松原周波数の解析接続が必要

→ 今はフロー方程式の段階で簡単に可能

R. Tripolt, N. Strodthoff, L. Smekal, J. Wambach, PRD89 (2014)

- 遅延グリーン関数の虚部=スペクトル関数

$$\rho_\sigma(\omega, \vec{p}) = 2\text{Im}G_\sigma^R(\omega, \vec{p})$$

$$\rho_\pi(\omega, \vec{p}) = 2\text{Im}G_\pi^R(\omega, \vec{p})$$

- U_k と二点関数に対するフロー方程式

$$\partial_k U_k(\sigma^2) = \frac{1}{2} \text{diagram}_\sigma + \frac{1}{2} \text{diagram}_\pi + \frac{1}{2} \text{diagram}_\psi$$

Diagram description: Three circular diagrams representing the flow of $U_k(\sigma^2)$. The first is a blue dashed circle with a green dot and label σ . The second is a red dashed circle with a green dot and label π . The third is a solid black circle with a red dot and label ψ .

$$\partial_k G_{\sigma,k}^{-1}(p) = \text{diagram}_\sigma^{(3)} + \text{diagram}_\pi^{(3)} - \frac{1}{2} \text{diagram}_\sigma^{(4)} - \frac{1}{2} \text{diagram}_\pi^{(4)} + \text{diagram}_\psi^{(3)}$$

Diagram description: Five diagrams representing the flow of $G_{\sigma,k}^{-1}(p)$. The first two are $\Gamma_{k,\sigma\sigma\sigma}^{(3)}$ (blue dashed) and $\Gamma_{k,\sigma\pi\pi}^{(3)}$ (red dashed). The next two are $\Gamma_{k,\sigma\sigma\sigma\sigma}^{(4)}$ (blue dashed) and $\Gamma_{k,\sigma\sigma\pi\pi}^{(4)}$ (red dashed). The last is $\Gamma_{k,\sigma\bar{\psi}\psi}^{(3)}$ (solid black).

$$\partial_k G_{\pi,k}^{-1}(p) = \text{diagram}_\pi^{(3)} + \text{diagram}_\sigma^{(3)} - \frac{1}{2} \text{diagram}_\sigma^{(4)} - \frac{1}{2} \text{diagram}_\pi^{(4)} + \text{diagram}_\psi^{(3)}$$

Diagram description: Five diagrams representing the flow of $G_{\pi,k}^{-1}(p)$. The first two are $\Gamma_{k,\sigma\pi\pi}^{(3)}$ (blue dashed) and $\Gamma_{k,\sigma\pi\pi}^{(3)}$ (red dashed). The next two are $\Gamma_{k,\sigma\sigma\pi\pi}^{(4)}$ (blue dashed) and $\Gamma_{k,\pi\pi\pi\pi}^{(4)}$ (red dashed). The last is $\Gamma_{k,\pi\bar{\psi}\psi}^{(3)}$ (solid black).

初期条件・パラメータ

- 真空での物理量を再現するように決定

$$S_\Lambda [\bar{\psi}, \psi, \phi = (\sigma, \vec{\pi})] = \int_0^{\frac{1}{T}} d\tau \int d^3\vec{x} \left\{ \bar{\psi} (\not{\partial} + g_s(\sigma + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}\gamma_5) - \mu\gamma_0) \psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + V_\Lambda(\phi^2) - c\sigma \right\}$$

$$V_\Lambda(\phi^2) = \frac{1}{2}m_\Lambda^2\phi^2 + \frac{1}{4!}\lambda(\phi^2)^2$$

Λ	m_Λ/Λ	λ_Λ	c/Λ^3	g_s
1000MeV	0.794	2.00	0.00175	3.2



M_q	M_π	M_σ	σ_0
286MeV	137MeV	496MeV	93MeV

R. Tripolt, L. Smekal, J. Wambach, PRD90 (2014)

M_q : 構成子クォーク質量

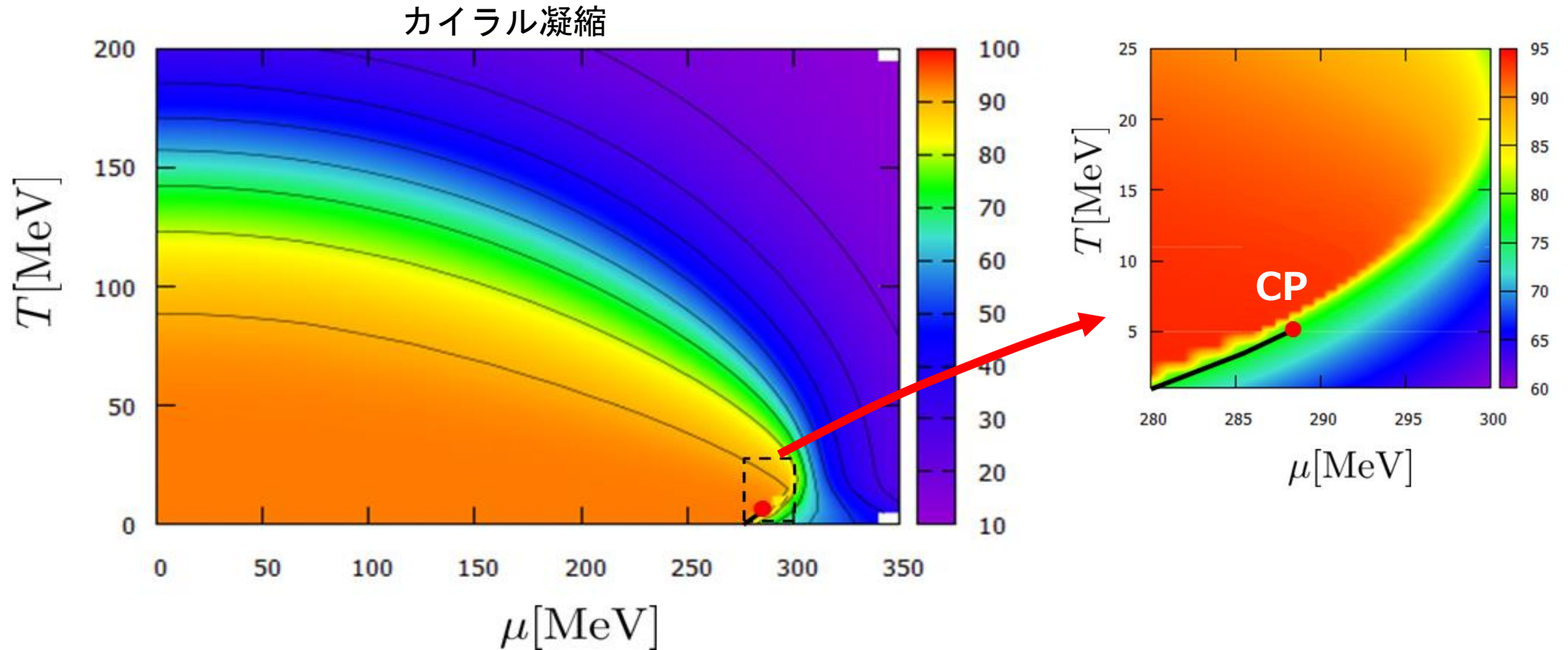
$$M_q = g_s\sigma_0$$

M_π, M_σ : 中間子スクリーニング質量

$$M_\pi = \frac{1}{\sigma_0} \frac{\partial U_0}{\partial \sigma}(\sigma_0) \quad M_\sigma = \frac{\partial^2 U_0}{\partial \sigma^2}(\sigma_0)$$

3. 結果

臨界点の位置



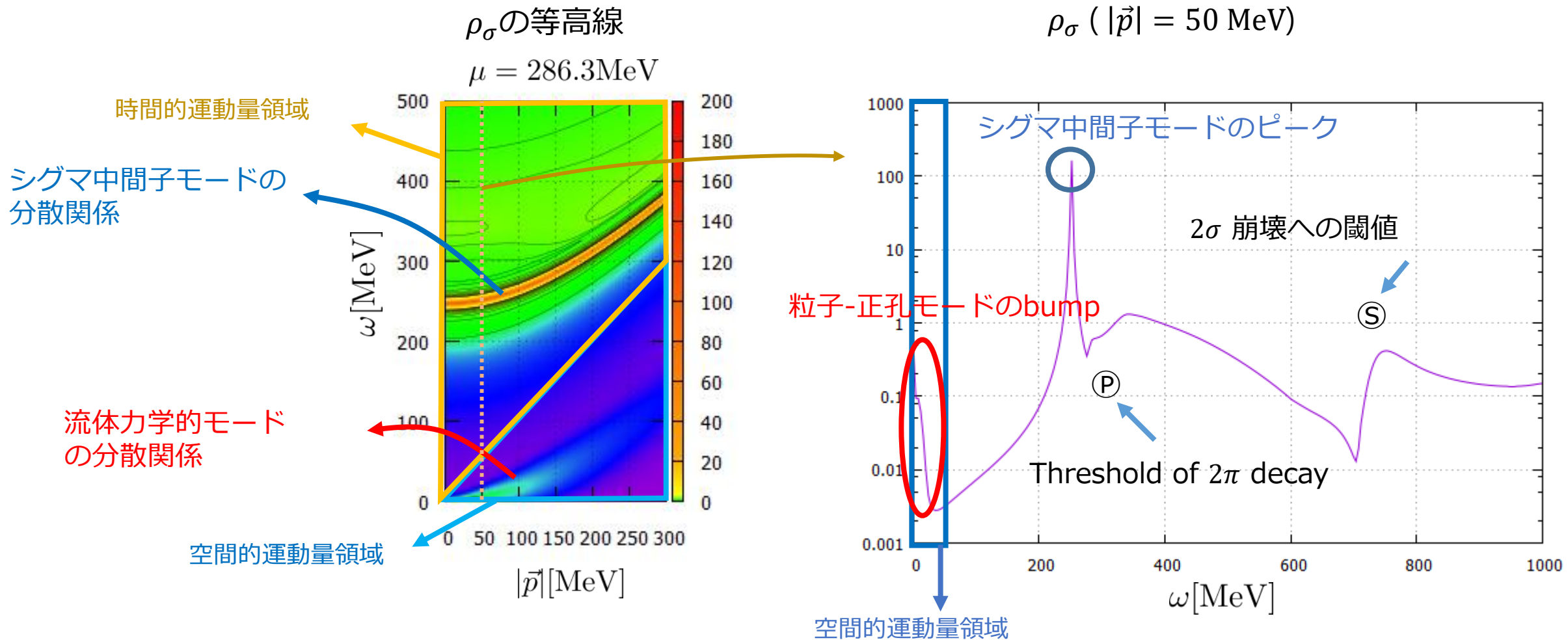
- M_σ の最小点より決定
(M_σ の二乗はカイラル感受率の逆)



$$(T_c, \mu_c) = (5.1 \pm 0.1 \text{ MeV}, 286.7 \pm 0.2 \text{ MeV})$$

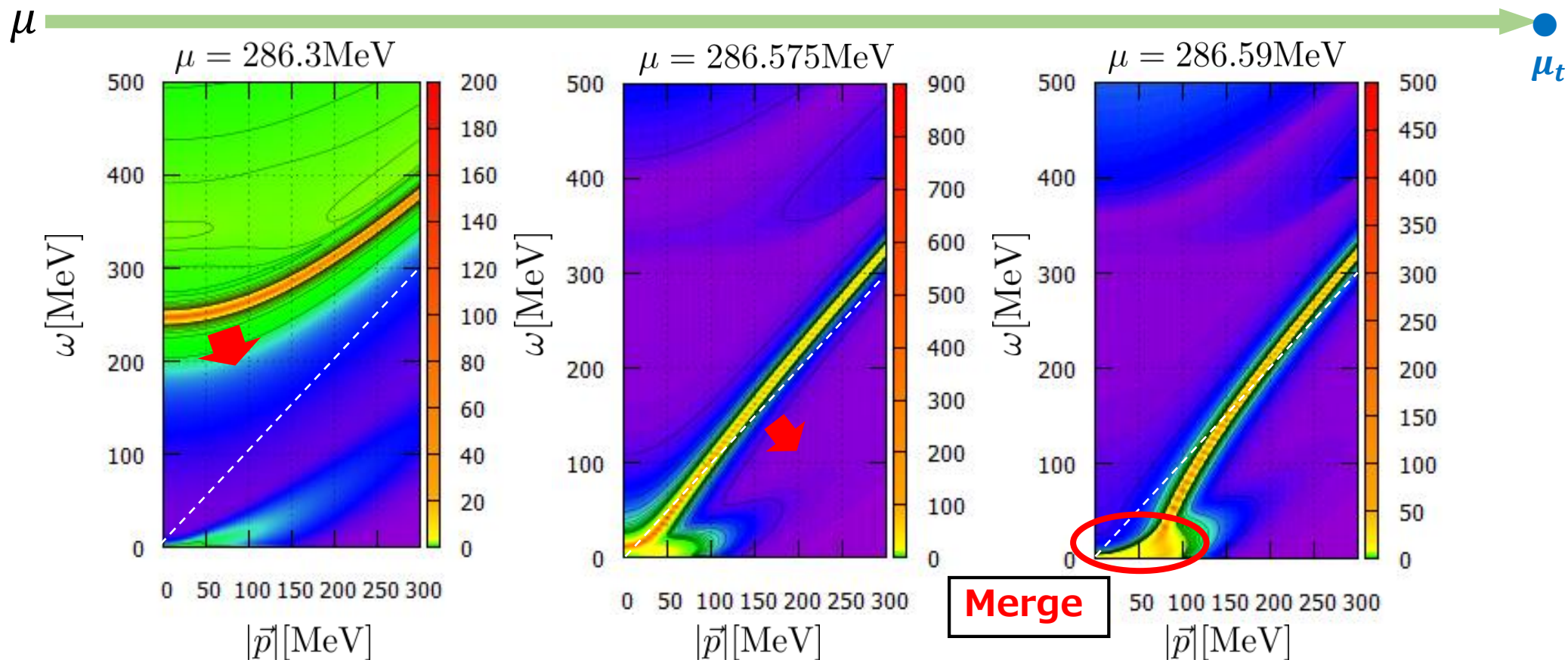
臨界点付近でのシグマチャンネルスペクトル関数 ρ_σ の計算例

- $T = 5.1 \text{ MeV}$ に固定 (このとき、転移化学ポテンシャルは $\mu_t = 286.69 \text{ MeV}$)



臨界点付近でのシグマチャンネルスペクトル関数 ρ_σ の等高線図

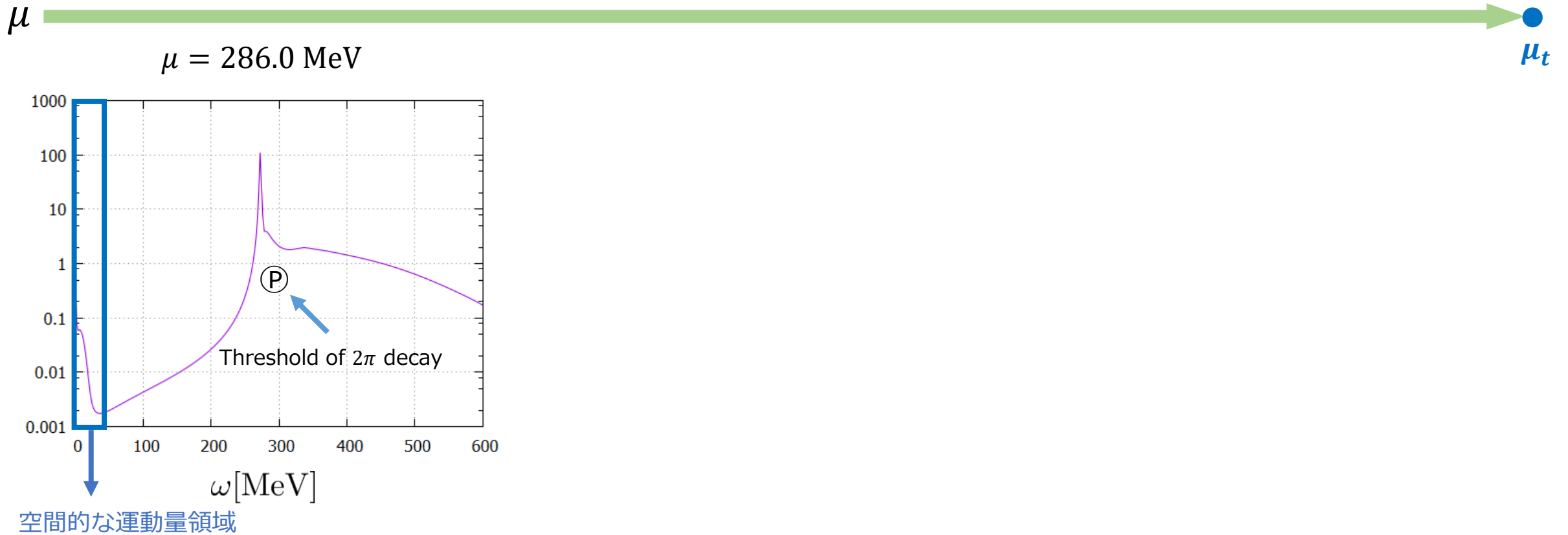
- $T = 5.1 \text{ MeV}$ に固定 (このとき、転移化学ポテンシャルは $\mu_t = 286.69 \text{ MeV}$)



- 系がQCD臨界点に近づくにつれシグマ中間子モードが空間的な運動量領域に突入し、**粒子-正孔モードの寄与と混合**つまりシグマ中間子モードも同時にソフト化。

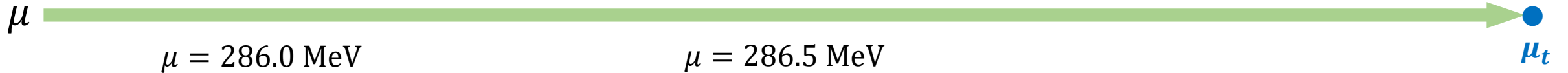
ρ_σ におけるピークや隆起の位置・強さ

- $T = 5.1 \text{ MeV}$, $|\vec{p}| = 50 \text{ MeV}$ に固定 (このとき、転移化学ポテンシャルは $\mu_t = 286.69 \text{ MeV}$)

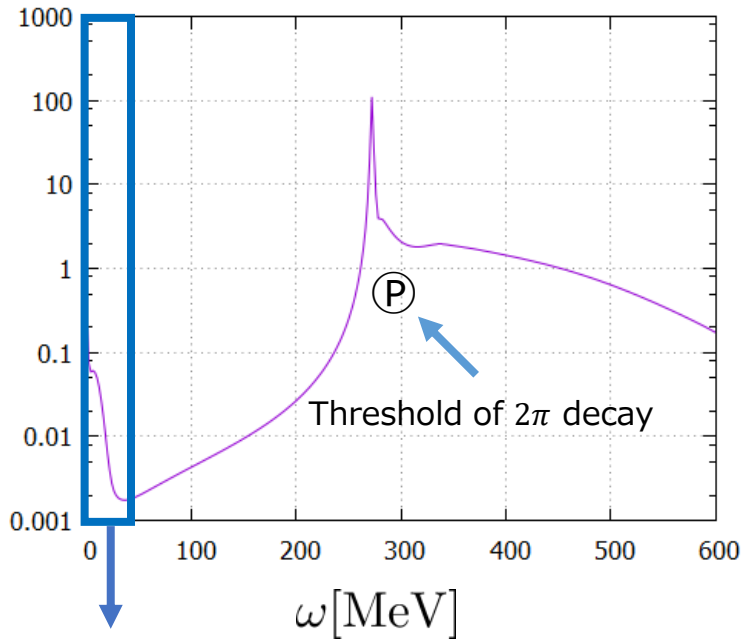


ρ_σ におけるピークや隆起の位置・強さ

- $T = 5.1 \text{ MeV}$, $|\vec{p}| = 50 \text{ MeV}$ に固定 (このとき、転移化学ポテンシャルは $\mu_t = 286.69 \text{ MeV}$)

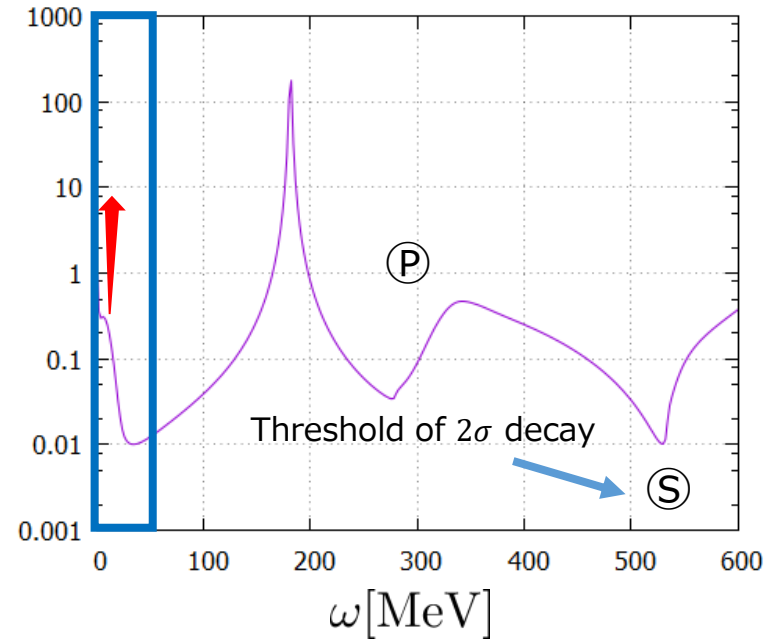


$\mu = 286.0 \text{ MeV}$



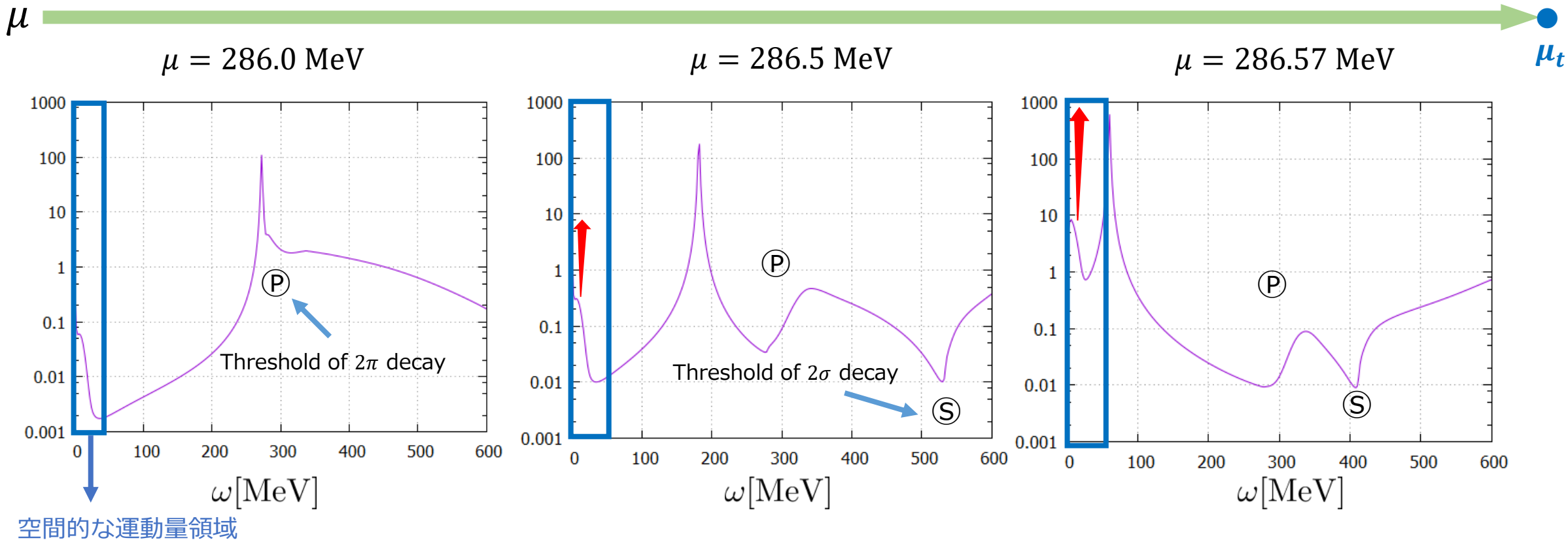
空間的な運動量領域

$\mu = 286.5 \text{ MeV}$



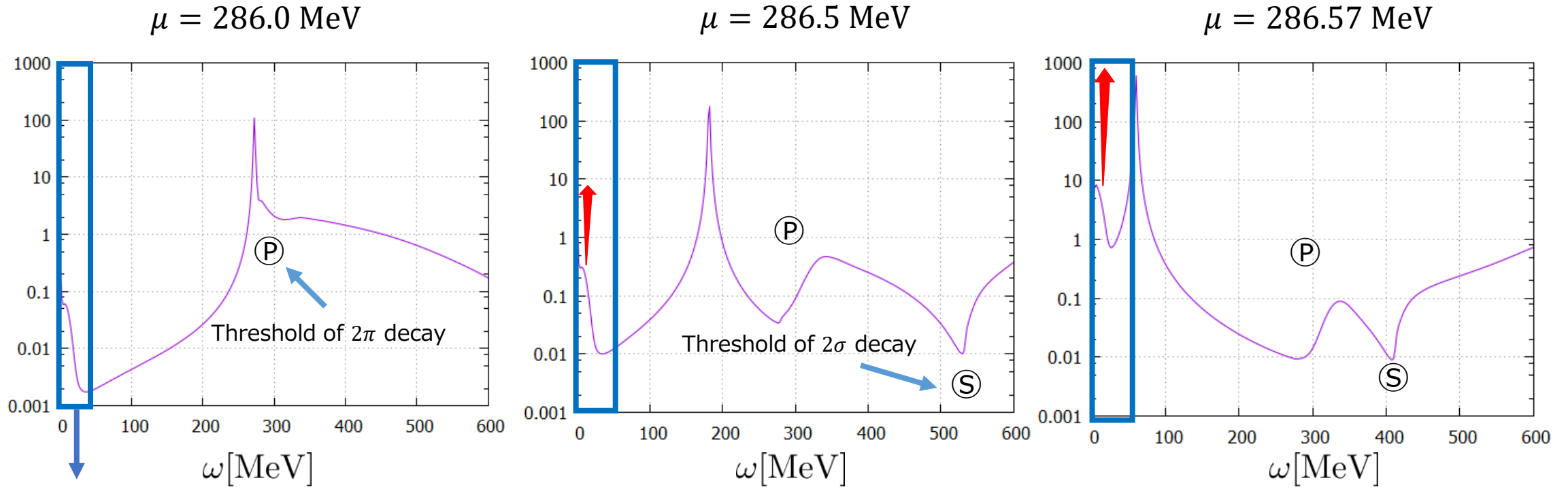
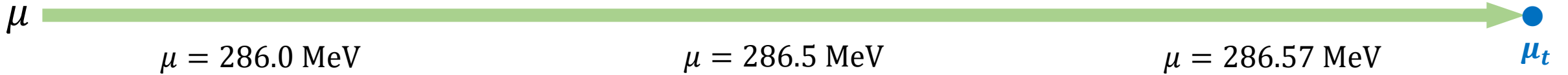
ρ_σ におけるピークや隆起の位置・強さ

- $T = 5.1 \text{ MeV}$, $|\vec{p}| = 50 \text{ MeV}$ に固定 (このとき、転移化学ポテンシャルは $\mu_t = 286.69 \text{ MeV}$)



ρ_σ におけるピークや隆起の位置・強さ

- $T = 5.1 \text{ MeV}$, $|\vec{p}| = 50 \text{ MeV}$ に固定 (このとき、転移化学ポテンシャルは $\mu_t = 286.69 \text{ MeV}$)

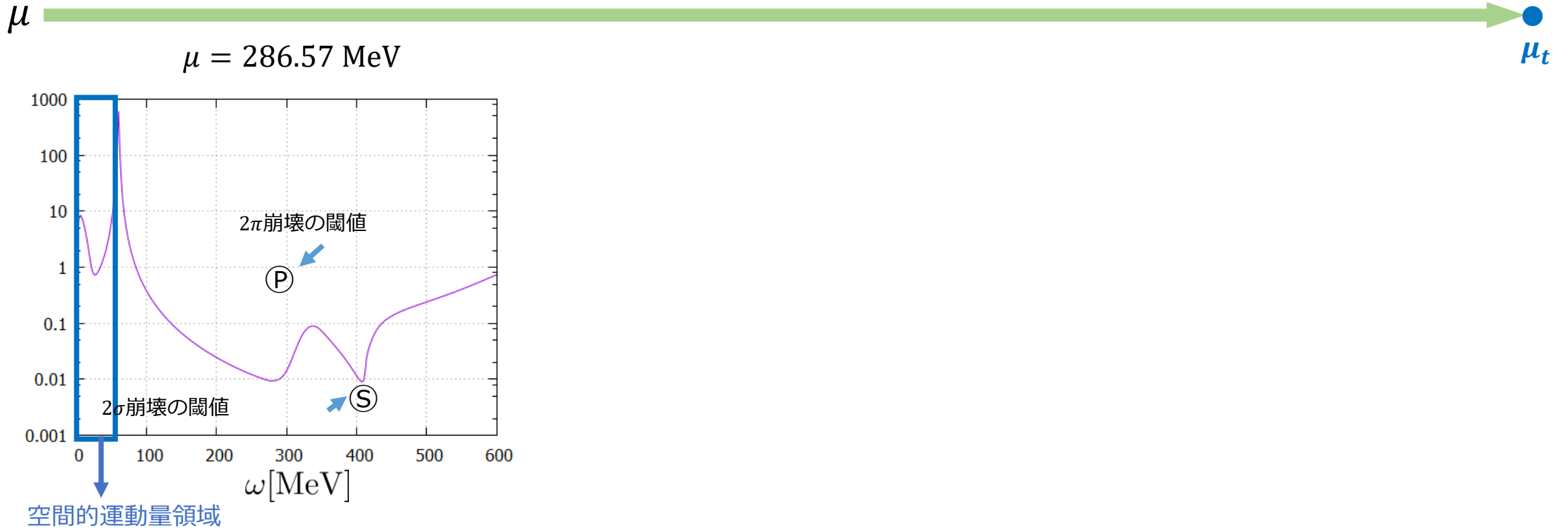


空間的な運動量領域

- 粒子-正孔モードがソフト化

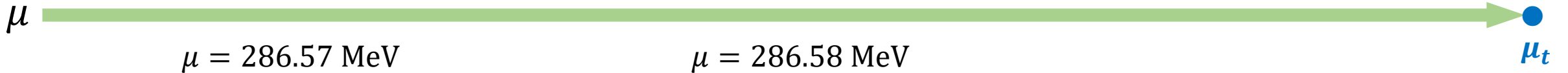
ρ_σ におけるピークや隆起の位置・強さ -より臨界点に近い場合-

- $T = 5.1 \text{ MeV}$, $|\vec{p}| = 50 \text{ MeV}$ に固定 (このとき、転移化学ポテンシャルは $\mu_t = 286.69 \text{ MeV}$)

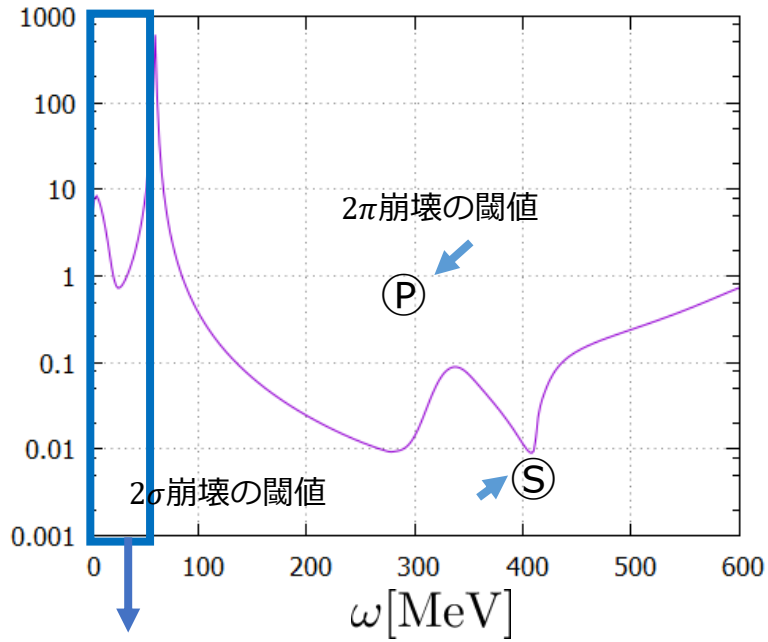


ρ_σ におけるピークや隆起の位置・強さ -より臨界点に近い場合-

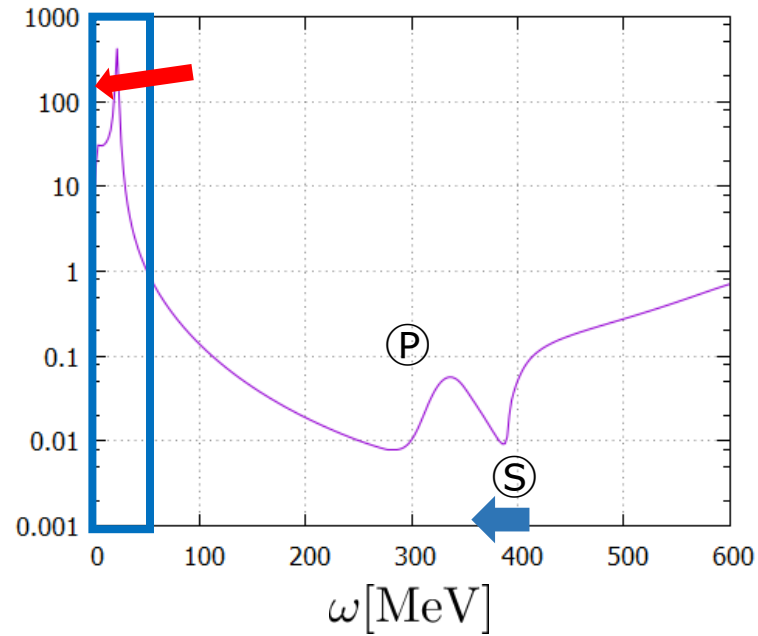
- $T = 5.1 \text{ MeV}$, $|\vec{p}| = 50 \text{ MeV}$ に固定 (このとき、転移化学ポテンシャルは $\mu_t = 286.69 \text{ MeV}$)



$\mu = 286.57 \text{ MeV}$



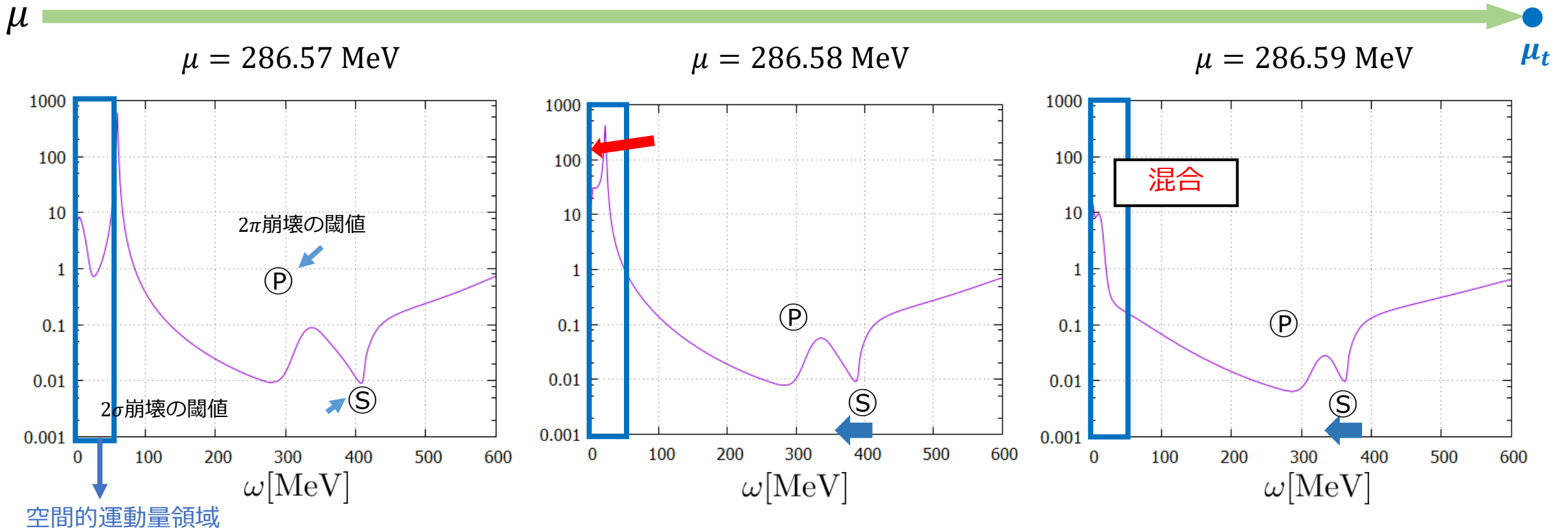
$\mu = 286.58 \text{ MeV}$



空間的運動量領域

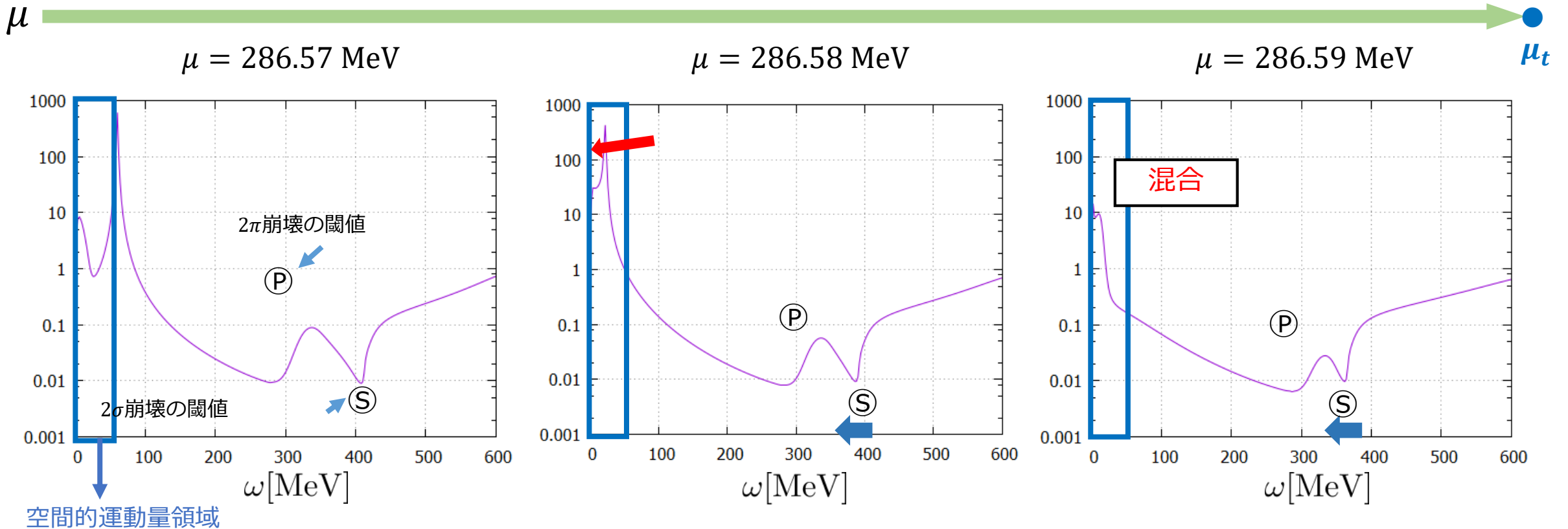
ρ_σ におけるピークや隆起の位置・強さ -より臨界点に近い場合-

- $T = 5.1 \text{ MeV}$, $|\vec{p}| = 50 \text{ MeV}$ に固定 (このとき、転移化学ポテンシャルは $\mu_t = 286.69 \text{ MeV}$)



ρ_σ におけるピークや隆起の位置・強さ -より臨界点に近い場合-

- $T = 5.1 \text{ MeV}$, $|\vec{p}| = 50 \text{ MeV}$ に固定 (このとき、転移化学ポテンシャルは $\mu_t = 286.69 \text{ MeV}$)



- シグマ中間子モードが空間的運動量領域突入し、粒子-正孔モードと混合
→ シグマ中間子モードのソフト化
- 2シグマモードの閾値がわずかに変化

レベル反発による解釈

- シグマ中間子モードと2シグマモードの間のレベル反発がソフト化を生み出しているのではないかと?

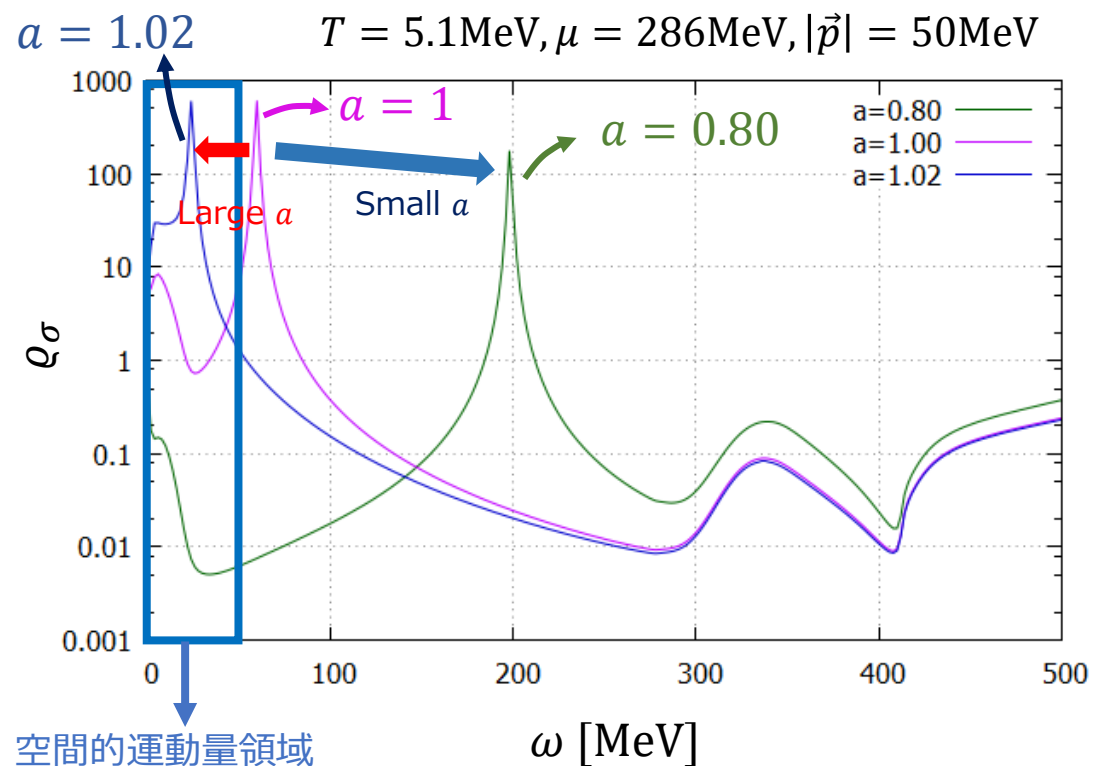
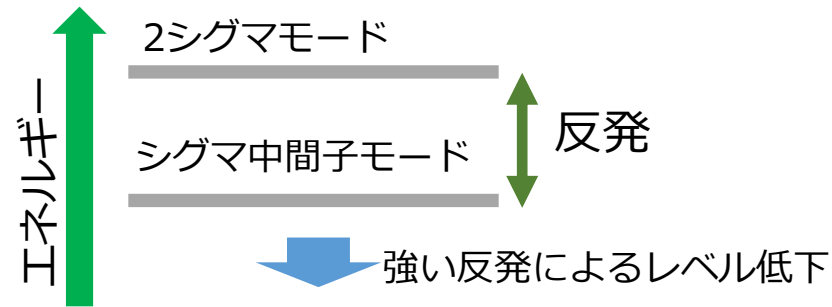


- 三点関数 $\Gamma_{\sigma\sigma\sigma}^{(3)}$ がシグマモードと2シグマモードの間の相互作用に大きく寄与しているだろう。

➡ $\Gamma_{\sigma\sigma\sigma}^{(3)}$ の強さをフロー方程式の中で $a\Gamma_{\sigma\sigma\sigma}^{(3)}$ のように手を変えた場合の ρ_σ の振る舞いを調べた。

$$\partial_k G_{\sigma,k}^{-1}(\omega, \vec{p}) = \Gamma_{\sigma\sigma\sigma}^{(3)} \rightarrow a\Gamma_{\sigma\sigma\sigma}^{(3)} + \dots$$

The equation shows the derivative of the inverse sigma meson propagator with respect to the momentum k . The right-hand side consists of several terms: a term with a red arrow pointing to a diagram where a sigma meson line is connected to a loop of two sigma mesons via a three-point vertex $\Gamma_{\sigma\sigma\sigma}^{(3)}$, followed by $\rightarrow a\Gamma_{\sigma\sigma\sigma}^{(3)}$; a diagram with a red dashed loop; two diagrams with blue dashed loops and a factor of $-\frac{1}{2}$; and a diagram with a black loop and a red dot on the sigma meson line.



- $\Gamma_{\sigma\sigma\sigma}^{(3)}$ は確かにシグマのピーク位置に大きく影響している

まとめ

- QCD臨界点でのソフトモードを調べるために、汎関数くりこみ群法を用いてシグマチャンネルスペクトル関数を計算した。

- 系がQCD臨界点に近づくにつれ, 空間的運動量領域の ρ_σ が発達

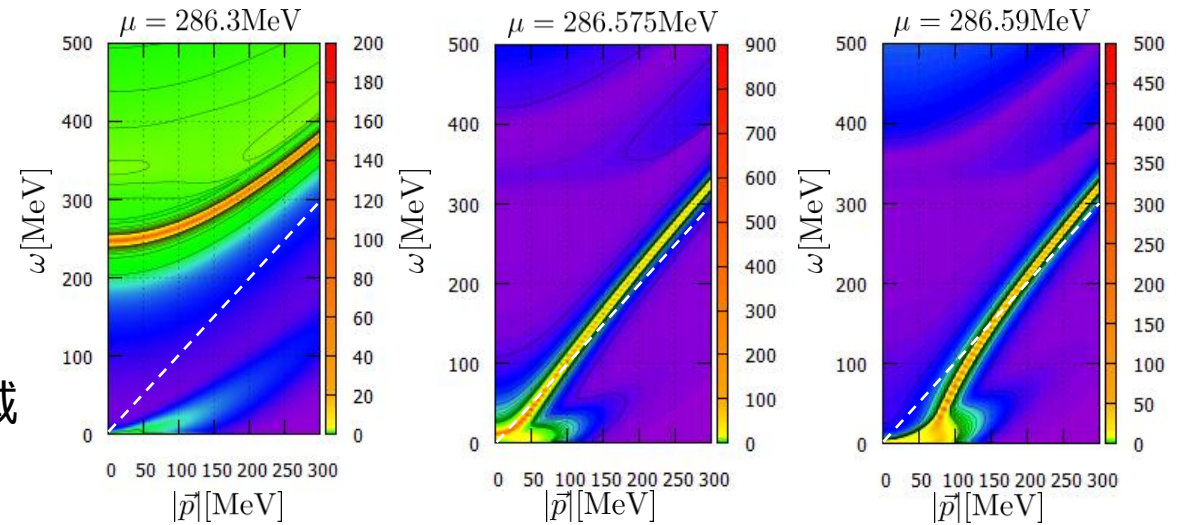
→ 流体力学的モード (粒子-正孔モード)のソフト化

- さらに近づくと、シグマ中間子モードが空間的運動量領域に突入し、粒子-正孔励起による隆起と混合

→ シグマ中間子モードもソフト化することを示唆

● Future work

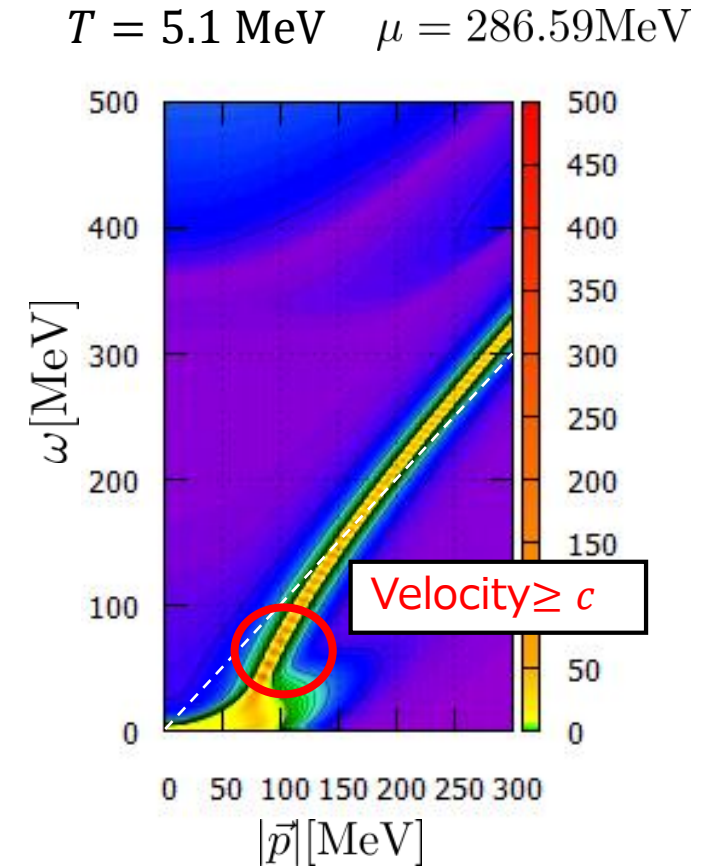
- ・カイラル極限の結果と比較して、カレントクォーク質量の役割をより鮮明にすること。
- ・局所ポテンシャル近似からの発展として、波動関数くりこみの影響を取り入れた場合に同じ描像となるか？



Back up

Problem about the group velocity of the sigma mesonic mode

- There is a region where the group velocity of the sigma mesonic mode exceeds the speed of light.
 - One of the possibility of the causes is the employment of LPA.
 - Improvement of the approximation, such as the inclusion of wave-function renormalizations might cure the problem.
 - One of the future works



スペクトル関数の計算

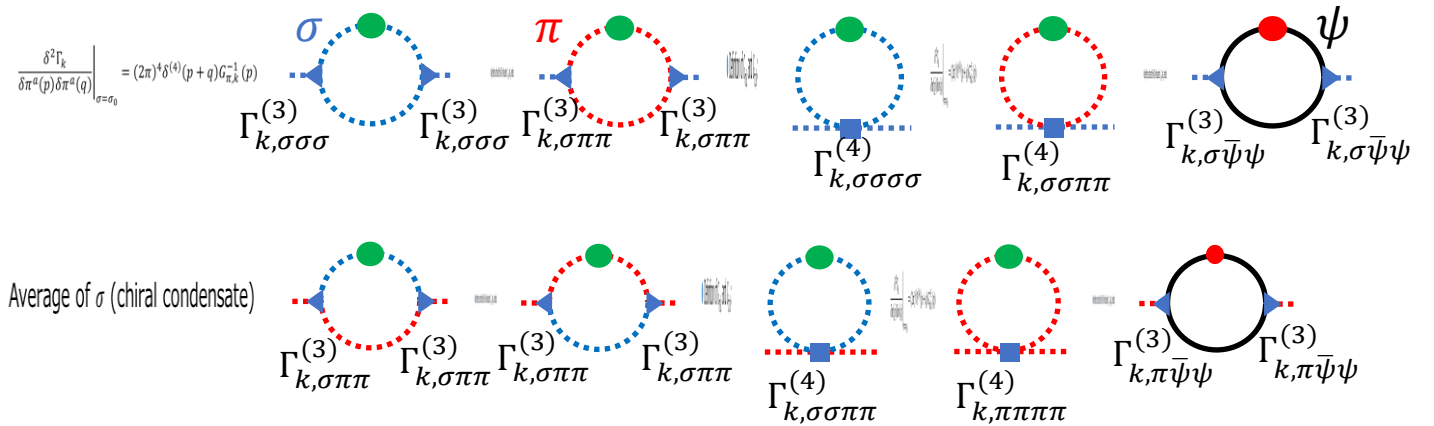
- Definition of $G_{\sigma,k}$ and $G_{\pi,k}$:

$$\left. \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \sigma(p) \delta \sigma(q)} \right|_{\sigma=\sigma_0} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+q) G_{\sigma,k}^{-1}(p) \quad \left. \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \pi^a(p) \delta \pi^a(q)} \right|_{\sigma=\sigma_0} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+q) G_{\pi,k}^{-1}(p)$$

Average of σ (chiral condensate)

- $G_{\sigma,k}$ and $G_{\pi,k}$ become meson two-point Green's functions at $k \rightarrow 0$.
- Using Wetterich eq. and the ansatz for EAA in LPA, the flow equations for U_k , $G_{\sigma,k}$ and $G_{\pi,k}$ are obtained.

$$\partial_k U_k(\sigma^2) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\partial_k R_k^B \right] + \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\partial_k R_k^F \right]$$



Quark propagator	---	$= [\gamma_\mu p^\mu - \mu \gamma_0 + m_q(\sigma) + R_k^F(p)]^{-1}$	$m_q(\sigma) = g_s \sigma_0$
Sigma propagator	---	$= [p^2 + m_{\sigma,k}^2(\sigma) + R_k^B(p)]^{-1}$	$m_{\sigma,k}^2(\sigma) = \frac{\partial^2 U_k}{\partial \sigma^2}(\sigma)$
Pion propagator	---	$= [p^2 + m_{\pi,k}^2(\sigma) + R_k^B(p)]^{-1}$	$m_{\pi,k}^2(\sigma) = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial U_k}{\partial \sigma}(\sigma)$

Calculation of the mesonic spectral functions

① Solve the flow equation for U_k .

$$\partial_k U_k(\sigma^2) = \frac{1}{2} \text{diag}(\sigma) + \frac{1}{2} \text{diag}(\pi) + \frac{1}{2} \text{diag}(\psi)$$

- Effective potential $F[\sigma]/V = U_0(\sigma^2) - c\sigma$ gives the chiral condensate σ_0 and thermal quantities.

② Evaluate the RHSs of the flow equations for $G_{\sigma,k}$ and $G_{\pi,k}$ using U_k , and integrate them with respect to k . The retarded Green's functions G_{σ}^R and G_{π}^R are obtained by analytic continuation for Matsubara frequencies.

$$\begin{aligned} \partial_k G_{\sigma,k}^{-1}(p) &= \text{diag}(\sigma) + \text{diag}(\pi) - \frac{1}{2} \text{diag}(\sigma) - \frac{1}{2} \text{diag}(\pi) + \text{diag}(\psi) \\ \partial_k G_{\pi,k}^{-1}(p) &= \text{diag}(\pi) + \text{diag}(\sigma) - \frac{1}{2} \text{diag}(\sigma) - \frac{1}{2} \text{diag}(\pi) + \text{diag}(\psi) \end{aligned}$$

- Since we employ the imaginary-time formalism, analytic continuation from Matsubara frequencies to real frequencies is needed to calculate the retarded Green's functions.

➔ In our case, it is known that the analytic continuation can be done easily in the flow equations.

R. Tripolt, N. Strodthoff, L. Smekal, J. Wambach, PRD89 (2014); R. Tripolt, L. Smekal, J. Wambach, PRD90 (2014)

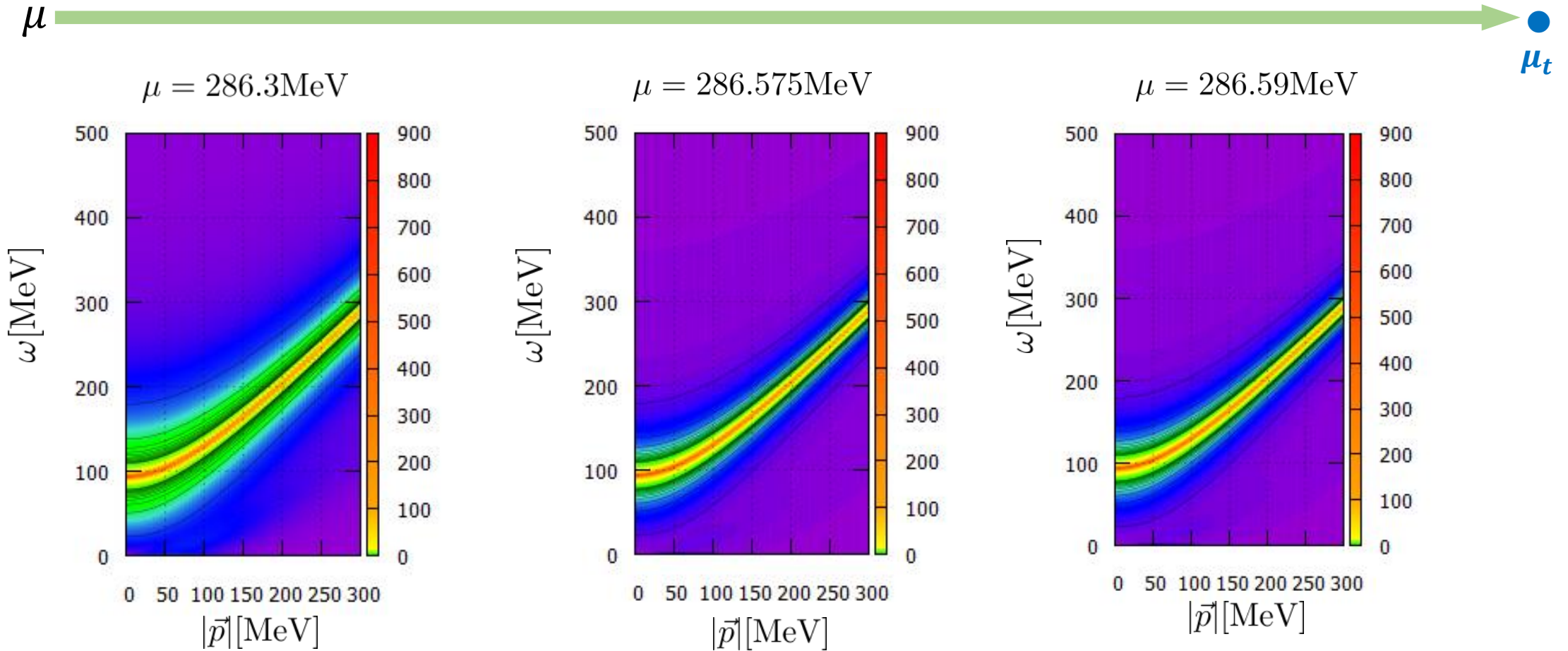
③ Obtain the spectral functions from the imaginary parts of G_{σ}^R and G_{π}^R .

$$\rho_{\sigma}(\omega, \vec{p}) = 2\text{Im}G_{\sigma}^R(\omega, \vec{p})$$

$$\rho_{\pi}(\omega, \vec{p}) = 2\text{Im}G_{\pi}^R(\omega, \vec{p})$$

Contour maps of the pion channel spectral function ρ_π near the QCD CP

- We fix $T = 5.1$ MeV below. (At this temperature, the transition chemical potential is $\mu_t = 286.69$ MeV)



Analytical continuation

R. Tripolt, N. Strodthoff, L. Smekal, J. Wambach, PRD89 (2014); R. Tripolt, L. Smekal, J. Wambach, PRD90 (2014)
K. Kamikado, N. Strodthoff, L. Smekal, J. Wambach, EPJ C74 (2014)

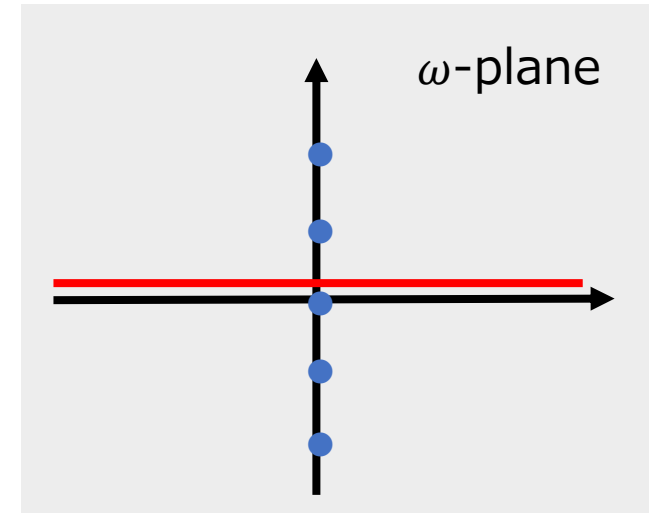
- In our case, analytic continuation can be realized easily in the flow eq. after Matsubara sum.

- This is possible when frequency independent regulator are used.
- The replacement $n_{B,F}(E + i\omega_n) \rightarrow n_{B,F}(E)$ ($\omega_n = 2\pi nT$) before $i\omega_n \rightarrow \omega + i\varepsilon$ is needed to realize the analyticity in the upper-half plane.

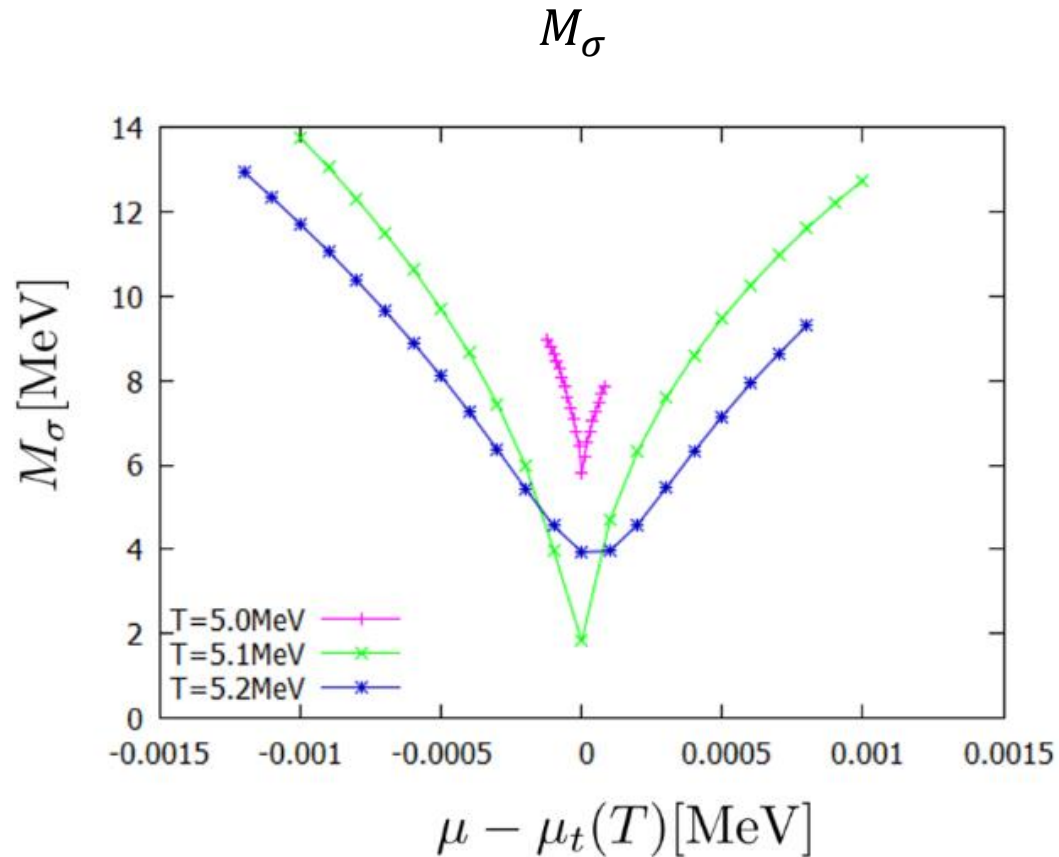
- Spectral function

$$\rho_{ab}(\omega, \vec{p}) = 2\text{Im}G_R^{ab}(\omega, \vec{p}) = 2\text{Im}\frac{1}{\Gamma_{ab}^{(2)}(\omega, \vec{p})}$$

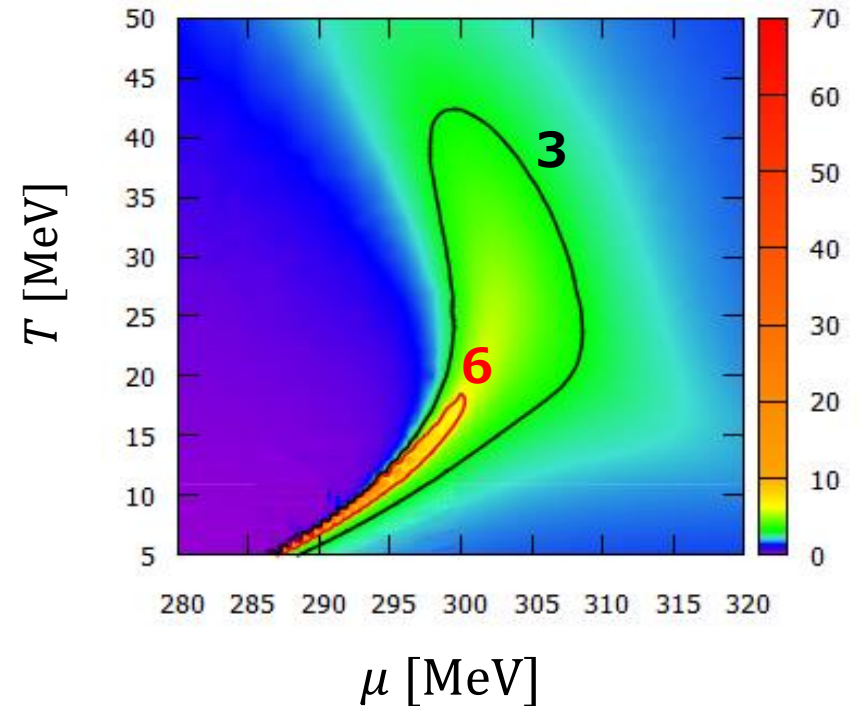
$$\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\phi_a(p)\delta\phi_b(p')} = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p+p')\Gamma_{ab}^{(2)}(p)$$



The location of the QCD CP



Quark number susceptibility
(normalized by those of a free quark gas)



- Quark number susceptibility enhances near the QCD CP as well as the chiral susceptibility M_σ^{-2} .