

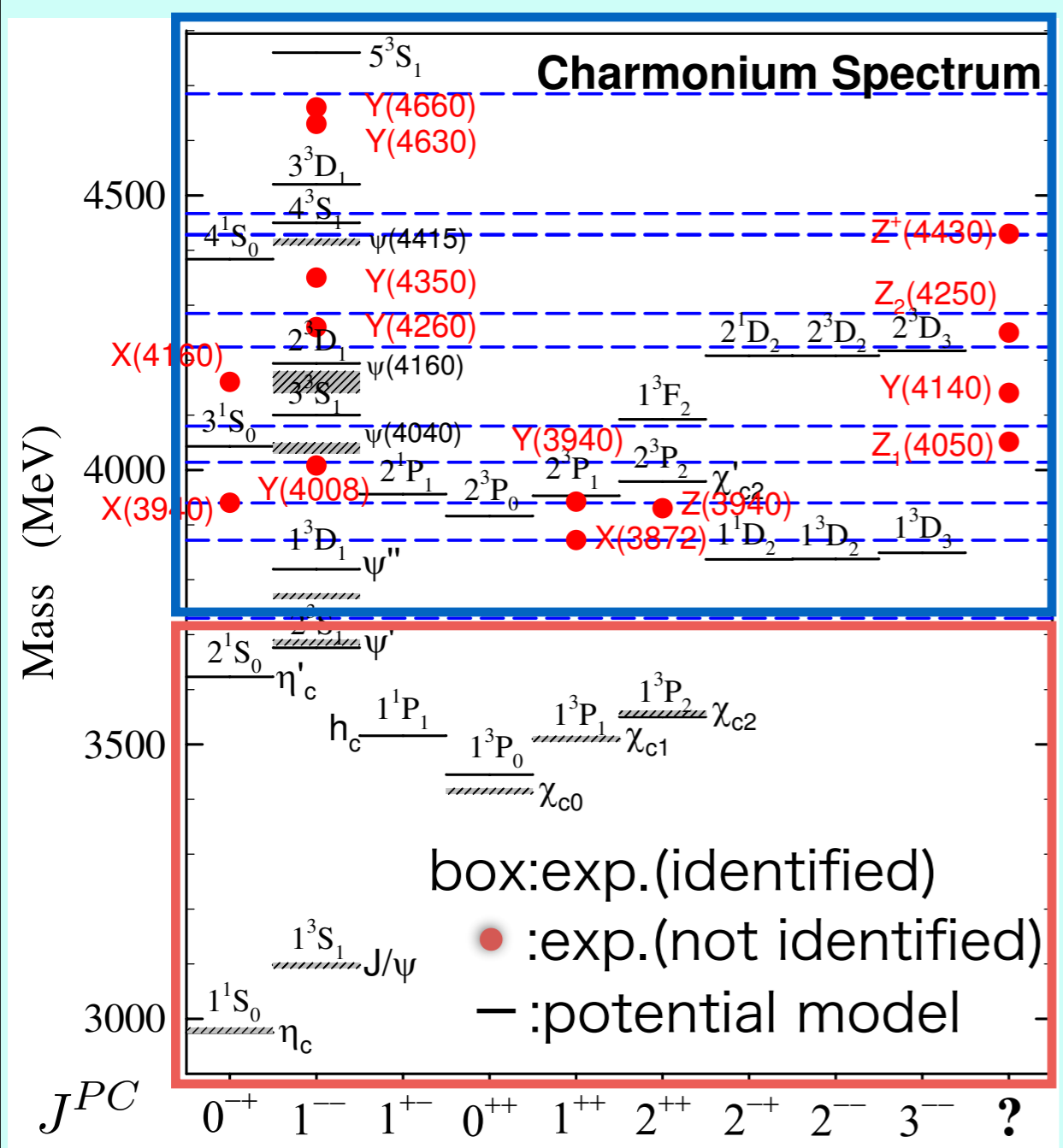
格子QCDを用いた
チャーモニウムの構造研究

Kazuki Nochi, Taichi Kawanai^A, Shoichi Sasaki

Tohoku Univ., Forschungszentrum Jülich^A

- ★ Introduction
- ★ Lattice QCD and variational method
- ★ Evaluation of potential
- ★ Lattice setup
- ★ Numerical results
- ★ Summary and Future work

✓ Spectrum of charmonium



potential model

有効質量を持つチャームクォーク

↓

open threshold以下で
良く成功している

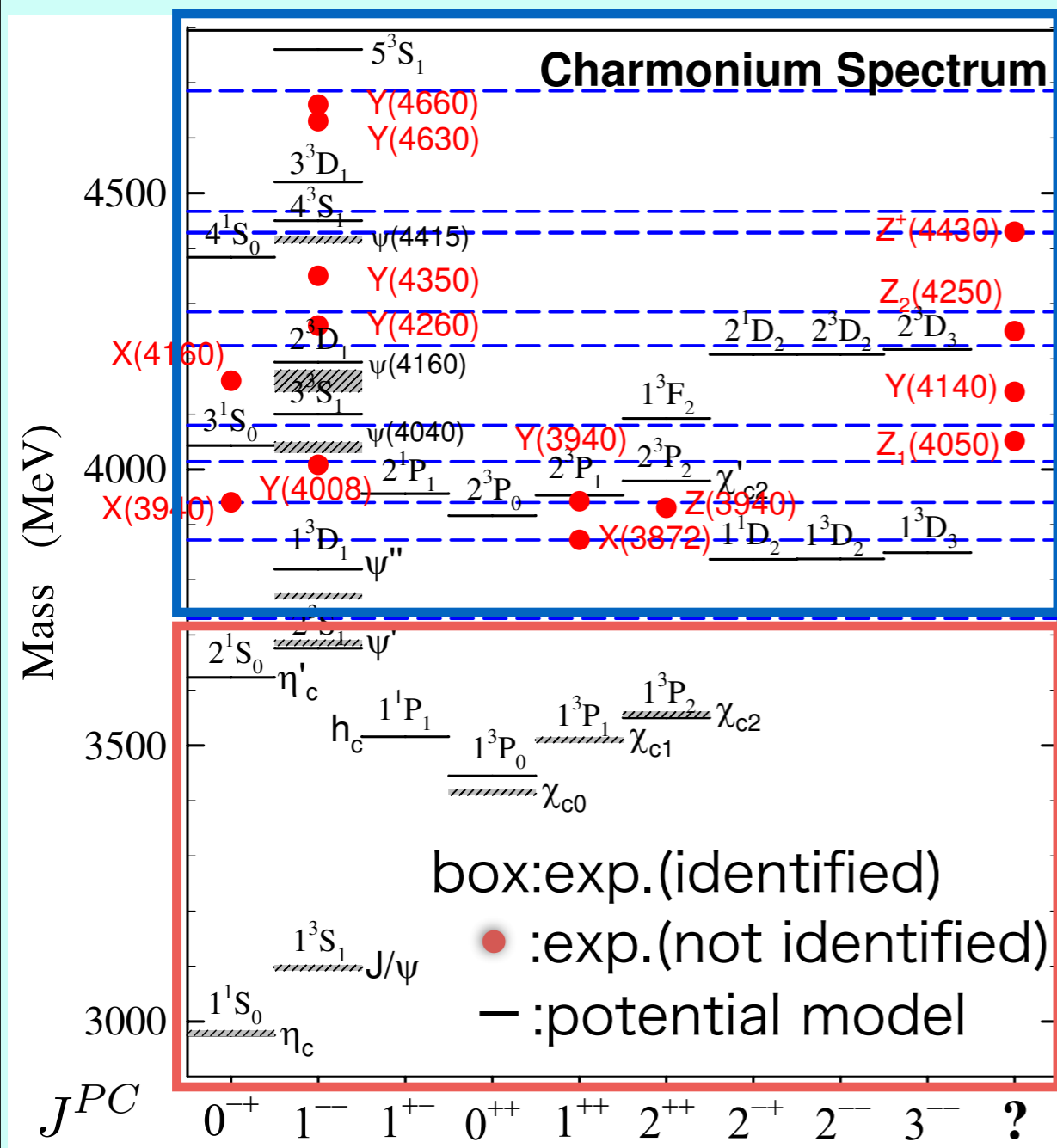
↓

有効ポテンシャル
(Coulomb+Linear)

open threshold
(軽いクォーク対生成)

Stephen Godfrey, Proc. of the DPF-2009 Conference
 "Topics in Hadron Spectroscopy in 2009"

✓ Spectrum of charmonium



potential model

有効質量を持つチャームクォーク

open threshold以下で
良く成功している

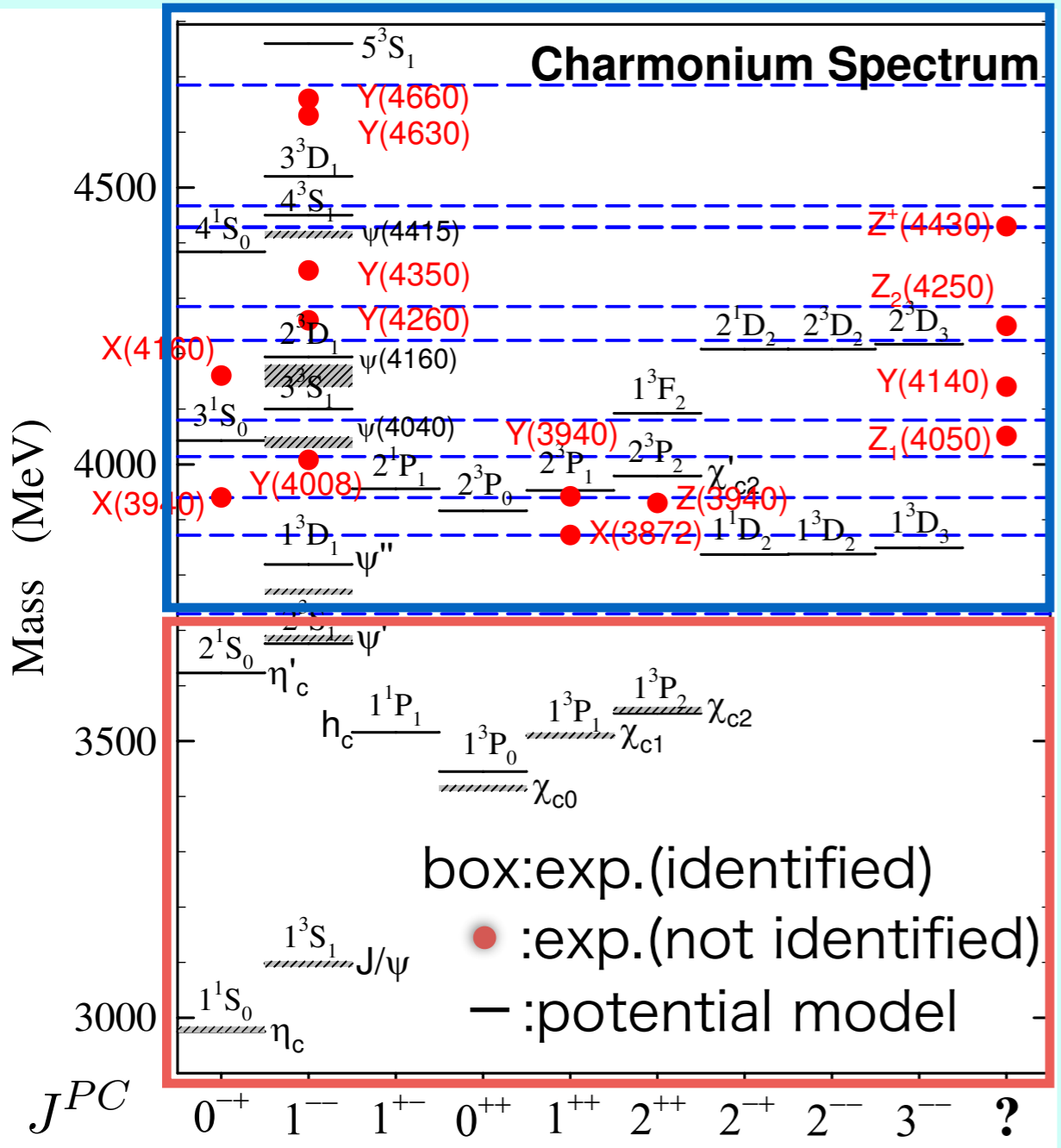
有効ポテンシャル
(Coulomb+Linear)

open threshold
(軽いクォーク対生成)

- ★励起状態まで単一のポテンシャルを用いる事は妥当か？
- ★D(cū) or D̄(cū)を含む可能性は？
- ★マルチクォークの可能性は？

Stephen Godfrey, Proc. of the DPF-2009 Conference
“Topics in Hadron Spectroscopy in 2009”

✓ Spectrum of charmonium



Stephen Godfrey, Proc. of the DPF-2009 Conference
 "Topics in Hadron Spectroscopy in 2009"

potential model

有効質量を持つチャームクォーク

↓

open threshold以下で
良く成功している

↓

有効ポテンシャル
 (Coulomb+Linear)

open threshold
 (軽いクォーク対生成)

- ★励起状態まで単一のポテンシャルを用いる事は妥当か？
- ★D(cū) or D̄(cū)を含む可能性は？
- ★マルチクォークの可能性は？

エネルギー依存性を含む、チャーモニウムポテンシャルを系統的に格子QCDで決定。

✓ Lattice QCD and physical value (e.g. Bethe-Salpeter 振幅)

$$\mathcal{L}_E(x) = \mathcal{L}_E^F(x) + \mathcal{L}_E^G(x) = \sum_f \bar{\psi}_f(x) (\not{D} + m_f) \psi_f(x) + \frac{1}{2} \text{tr} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}$$

↓ 経路積分+離散化

$$\langle \mathcal{O}(U_{m,\mu}) \rangle = \int [DU] \mathcal{O}(U_{m,\mu}) \frac{e^{-\sum_n \mathcal{L}_G(U_{n,\mu})}}{\mathcal{Z}}$$

$$U_{n,\mu} = e^{igaA_\mu(n)}$$



Physical value

$$\bar{\mathcal{O}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{O}[\{U_{n,\mu}\}_i] \quad N : \# \text{conf}$$

$$\delta \bar{\mathcal{O}} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathcal{O}_i - \bar{\mathcal{O}})^2 \right)}$$

✓ Lattice QCD and physical value (e.g. Bethe-Salpeter 振幅)

$$\mathcal{L}_E(x) = \mathcal{L}_E^F(x) + \mathcal{L}_E^G(x) = \sum_f \bar{\psi}_f(x) (\mathcal{D} + m_f) \psi_f(x) + \frac{1}{2} \text{tr} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}$$

↓ 経路積分+離散化

$$\langle \mathcal{O}(U_{m,\mu}) \rangle = \int [DU] \mathcal{O}(U_{m,\mu}) \frac{e^{-\sum_n \mathcal{L}_G(U_{n,\mu})}}{\mathcal{Z}}$$

$$U_{n,\mu} = e^{igaA_\mu(n)}$$



Physical value

N : #conf

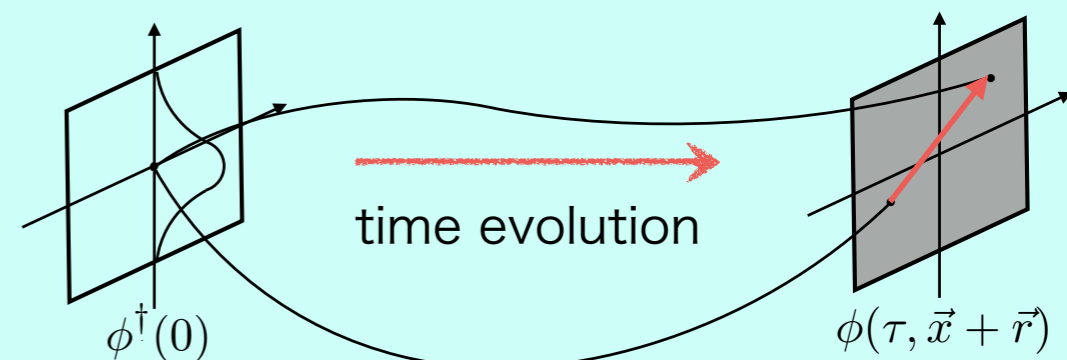
$$\bar{\mathcal{O}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{O}[\{U_{n,\mu}\}_i]$$

$$\delta\bar{\mathcal{O}} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathcal{O}_i - \bar{\mathcal{O}})^2 \right)}$$

$$\mathcal{O} = \phi(\tau, \vec{x} + \vec{r}) \phi^\dagger(0) \quad \phi(\tau, \vec{x}) = \bar{\psi}(\tau, \vec{x}) \Gamma \psi(\tau, \vec{x})$$

$$\sum_{\vec{x}} \langle \phi(\tau, \vec{x} + \vec{r}) \phi^\dagger(0) \rangle = \sum_{\alpha} \langle 0 | \phi(0, \vec{r}) | \alpha \rangle v_{\alpha}^* e^{-E_{\alpha} \tau}$$

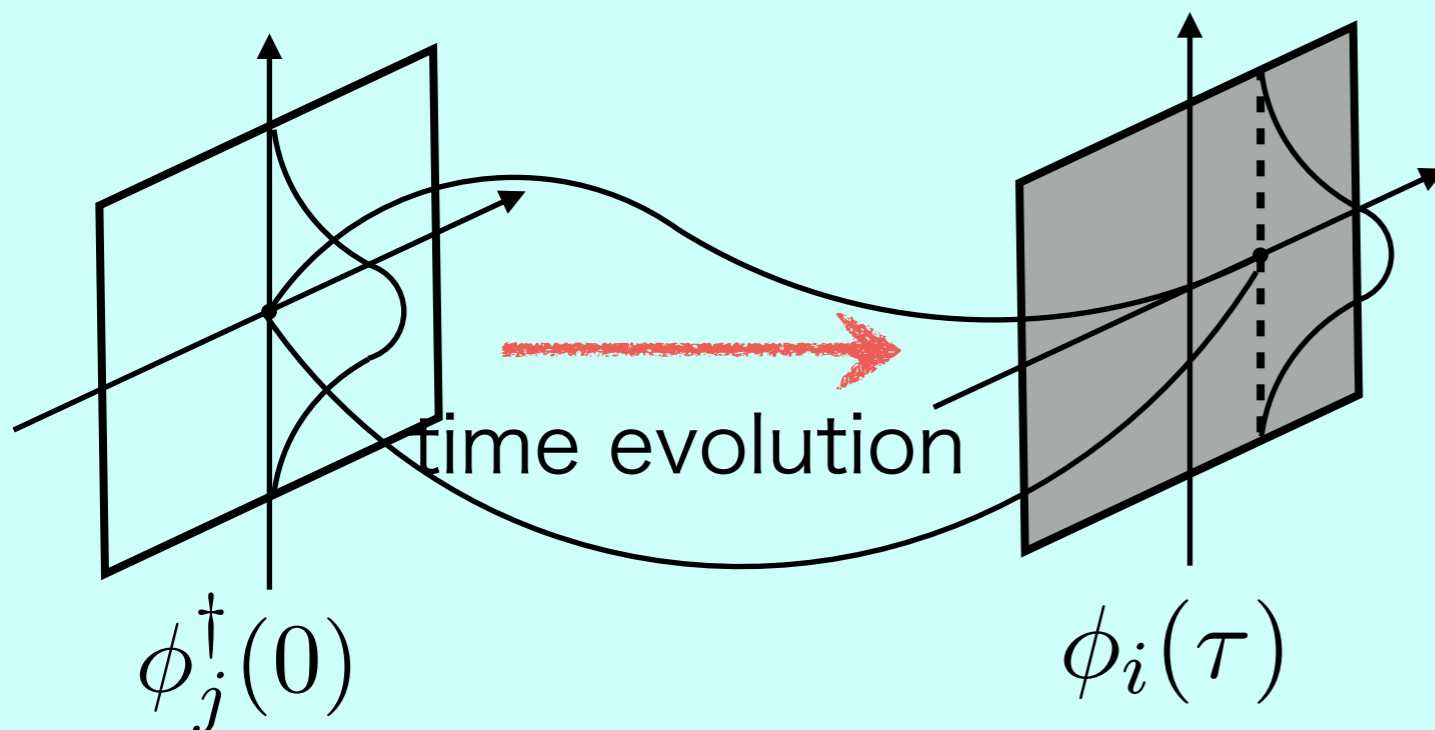
$$\rightarrow \langle 0 | \phi(0, \vec{r}) | 1 \rangle v_1^* e^{-E_1 \tau} \quad (\tau \rightarrow \infty)$$



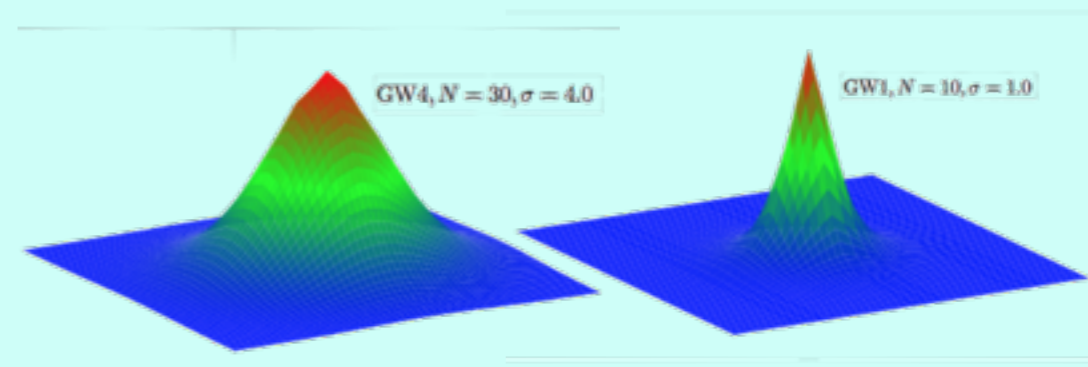
✓ Variational method

M. Lüscher and U. Wolff, Nucl. Phys. B339, 222 (1990)

C. Michael, Nucl. Phys. B259, 58 (1985)



演算子に“空間分布”という自由度を与える。



$$\begin{aligned}
 (G(\tau))_{ij} &= \sum_{\vec{x}} \langle \phi_i(\tau, \vec{x}) \phi_j^\dagger(0) \rangle = \sum_{\alpha} \langle 0 | \phi_i(0) | \alpha \rangle \langle \alpha | \phi_j^\dagger(0) | 0 \rangle e^{-E_{\alpha}\tau} \\
 &\equiv \sum_{\alpha} v_{\alpha i} v_{\alpha j}^* e^{-E_{\alpha}\tau} \rightarrow \sum_i v_{\alpha i}^* v_{\beta i} = \delta_{\alpha\beta}
 \end{aligned}$$

↓ 転送行列を構築。

$T(\tau, \tau_0) = G(\tau)G^{-1}(\tau_0)$: 転送行列

$$T(\tau, \tau_0)\vec{v}_{\alpha} = \lambda_{\alpha}(\tau, \tau_0)\vec{v}_{\alpha} \quad \lambda_{\alpha}(\tau, \tau_0) = e^{-E_{\alpha}(\tau-\tau_0)}(1 + O(e^{-\Delta E_{\alpha}(\tau-\tau_0)}))$$

✓ To Potential from BS amplitude (time dependent HAL's method)

HALの方法

S. Aoki, T. Hatsuda and N. Ishii, Prog. Theor. Phys. 123 (2010) 89

$$(k^2/2m_c - H_0)\phi_\beta(\vec{r}) = \int d^3r' U(\vec{r}, \vec{r}')\phi_\beta(\vec{r}') \longrightarrow V_C(|\vec{r}|) = \frac{k^2}{2m_c} - \frac{\Delta\phi_\beta(\vec{r})}{2m_c\phi_\beta(\vec{r})}$$

時間に依存するHALの方法

$$R(t, \vec{r}) = \sum_\alpha \phi_\alpha(\vec{r}) a_\alpha \exp(-t\Delta E_\alpha) \quad \text{... } \Delta E_\alpha = E_\alpha - 2m_c$$

$$\left\{ \frac{1}{4m_c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} - H_0 \right\} R(t, \vec{r}) = \int d^3r' U(\vec{r}, \vec{r}') R(t, \vec{r}') \quad \text{... } H_0 = -\Delta/2m_c$$

$$\begin{aligned} \Downarrow \quad U(\vec{r}, \vec{r}') &= V(\vec{r}, \vec{\nabla}) \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \\ &= \{V_C(|\vec{r}|) + O(\nabla^2)\} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') : \text{velocity expansion} \end{aligned}$$

$$V_C(r) = -\frac{H_0 R(t, \vec{r})}{R(t, \vec{r})} - \frac{(\partial/\partial t)R(t, \vec{r})}{R(t, \vec{r})} + \frac{1}{4m_c} \frac{(\partial/\partial t)^2 R(t, \vec{r})}{R(t, \vec{r})}$$

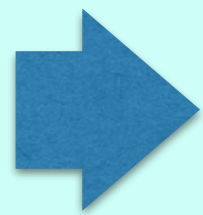
★ポテンシャルUは非局所的(r, r')かつopen threshold以下ではエネルギーに依存しない。

★この方法は"ground state saturation"を必要としない。

✓ Central and spin-spin potential.

T. Kawanai, S. Sasaki, Phys. Rev. D **85**,091513(R) (2012).

☞ $U(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \{ V_C(r) + V_S(r) \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + V_T(r) S_{12} + V_{LS}(r) \vec{L} \cdot \vec{S} + O(\nabla^2) \}$



$$V_C(r) = E_{ave} + \frac{1}{m_Q} \left(\frac{3}{4} \frac{\nabla^2 \phi_V}{\phi_V} + \frac{1}{4} \frac{\nabla^2 \phi_{PS}}{\phi_{PS}} \right) \quad \begin{array}{l} \phi_V, \phi_{PS} \\ = \bar{\psi} \gamma_i \psi, \bar{\psi} \gamma_5 \psi \end{array}$$

$$V_S(r) = E_{hyp} + \frac{1}{m_Q} \left(\frac{\nabla^2 \phi_V}{\phi_V} - \frac{\nabla^2 \phi_{PS}}{\phi_{PS}} \right) \quad = \psi, \eta_c(1S, 2S)$$

$$E_{ave} = \frac{1}{4} M_{PS} + \frac{3}{4} M_V - 2m_Q = M_{ave} - 2m_Q$$

$$E_{hyp} = M_V - M_{PS}$$

クォーク質量はどうでしょうか？

☞ スピン-スピンポテンシャルが短距離力である事を仮定すると…

$$m_Q = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{-1}{E_{hyp}} \left\{ \frac{\nabla^2 \phi_V}{\phi_V} - \frac{\nabla^2 \phi_{PS}}{\phi_{PS}} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{☞ } r \text{ が大きい領域で右辺の} \\ \text{振る舞いを見れば良い！} \end{array}$$

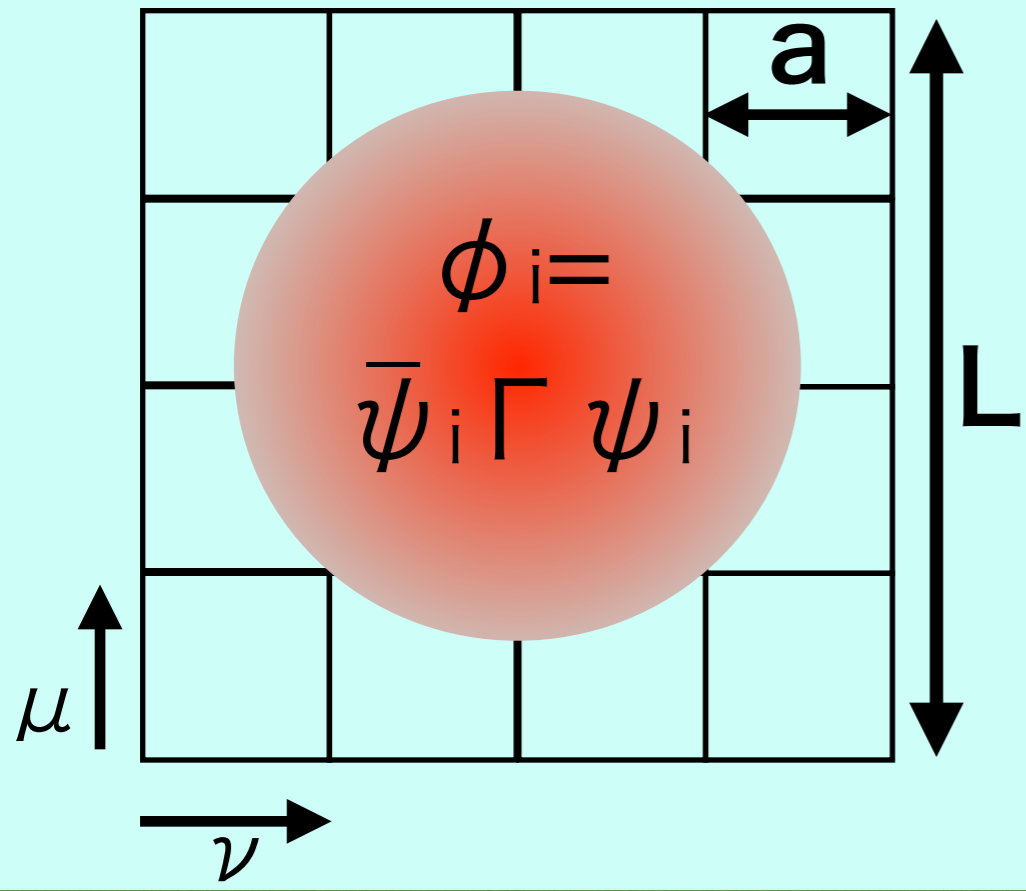
✓ Lattice setup

PACS-CS Collaboration.

S.Aoki et al. [PACS-CS Collaboration], Phys. Rev. D79, 034503 (2009)

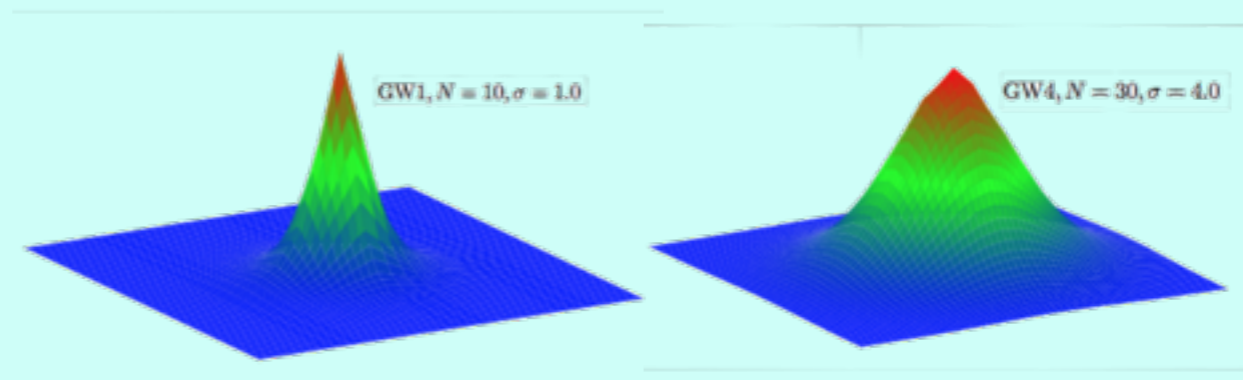
☰ Lattice simulation including dynamical u, d and s quarks.

a[fm]	a ⁻¹ [GeV]	Lattice size(L)	pion mass[MeV]	kaon mass[MeV]	#conf
0.0907(13)	2.176(31)	32 ³ ×64 (~2.9[fm])	~156	~554	198
			136(expt.)	498(expt.)	



Gaussian smearing

$$\psi_{\text{smear}}(\tau, \vec{x}) = \left(1 - \frac{\sigma^2 \nabla^2}{4N} \right)^N \psi(\tau, \vec{x})$$

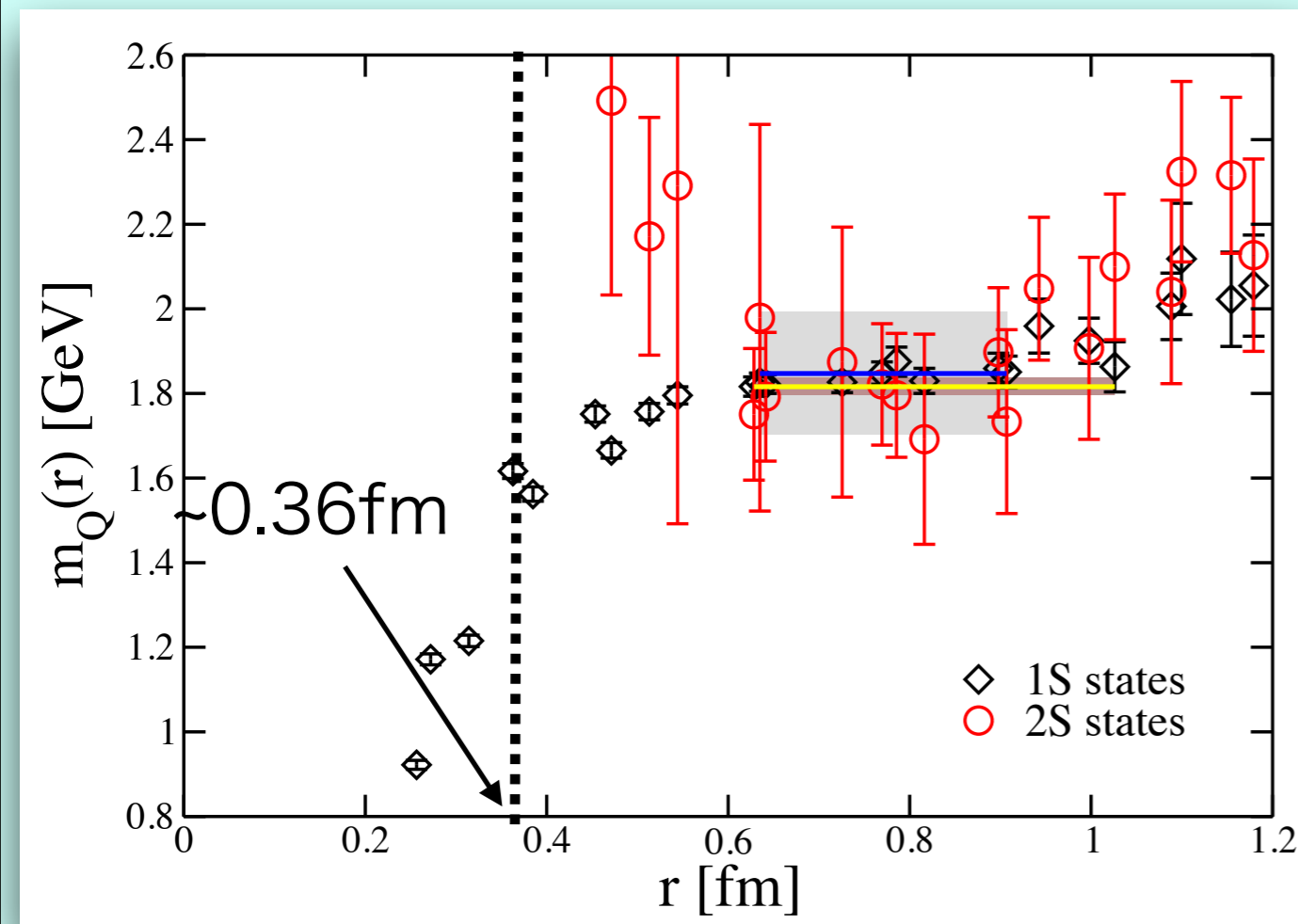


N	\sigma
10	1.0
15	2.0
20	3.0
30	4.0

S. Gusken, Nucl. Phys. Proc. Suppl. 17 (1990) 361.

Numerical results

✓ Charm quark mass



$$m_Q = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{-1}{E_{hyp}} \left\{ \frac{\nabla^2 \phi_V}{\phi_V} - \frac{\nabla^2 \phi_{PS}}{\phi_{PS}} \right\}$$

† T. Kawanai and S. Sasaki, Phys. Rev. D 92, no. 9, 094503 (2015).

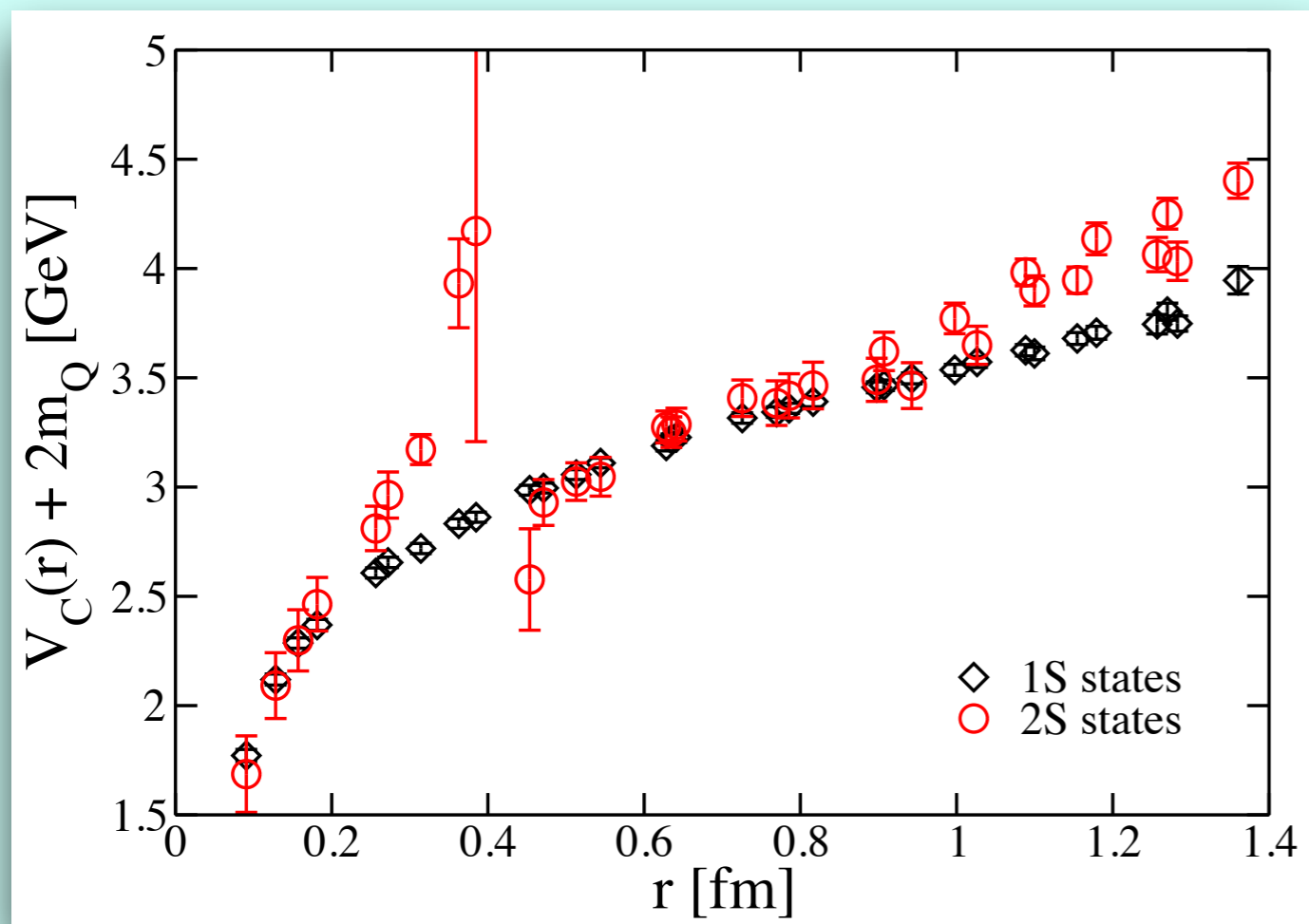
method	Previous work [†]		Variational method	
type of source	Wall source		Gauss-smearred sources	
state	1S	1S	1S	2S
m_Q [GeV]	1.784(23)	1.816(21)	1.816(21)	1.847(145)
fit range	[6 : 7√3]	[4√3 : 8√2]	[4√3 : 8√2]	[7 : 10]

★2S状態と1S状態それぞれでrが大きい領域に平坦な部分がある。

★1S状態と2S状態を**独立に評価**し、コンシステントなクォーク質量が導出された。

★このクォーク質量は、先行研究と比べてもコンシステントである。

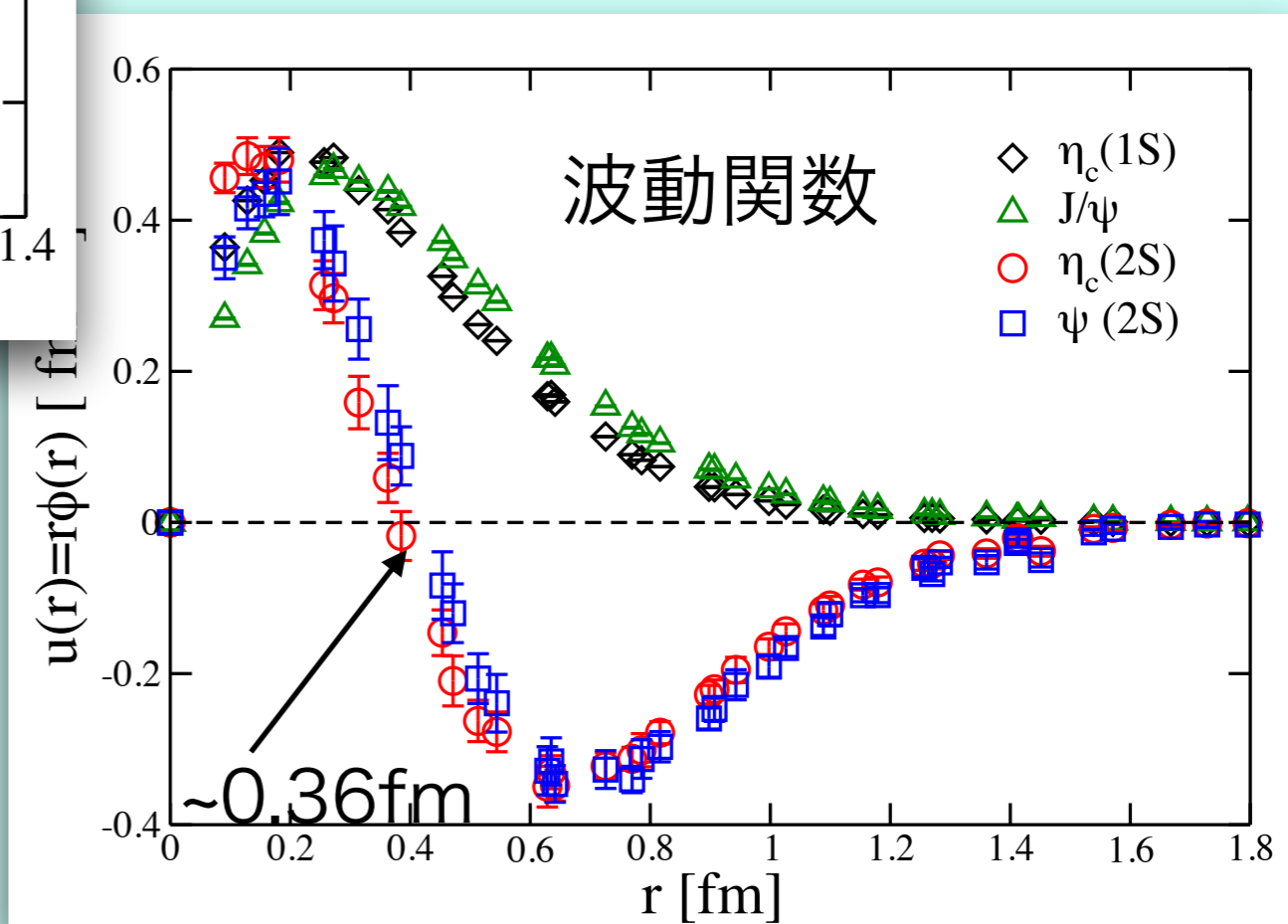
✓ Central potential



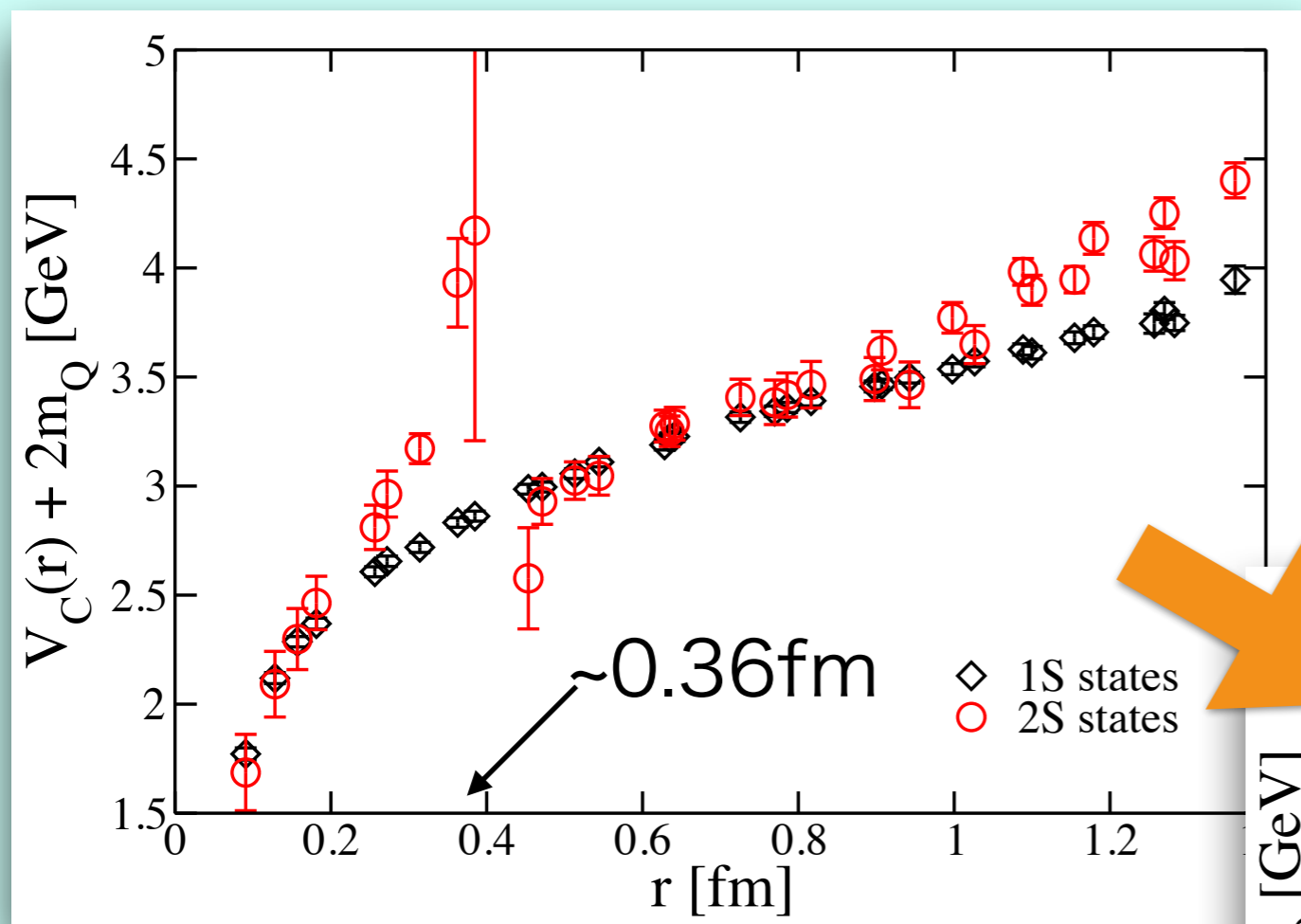
★2Sのポテンシャルは定性的に1Sのものと同じ。

★ $r \sim 0.36$ fmで値が発散する。

★ $r > 1$ fm程度で傾きが少し大きい。



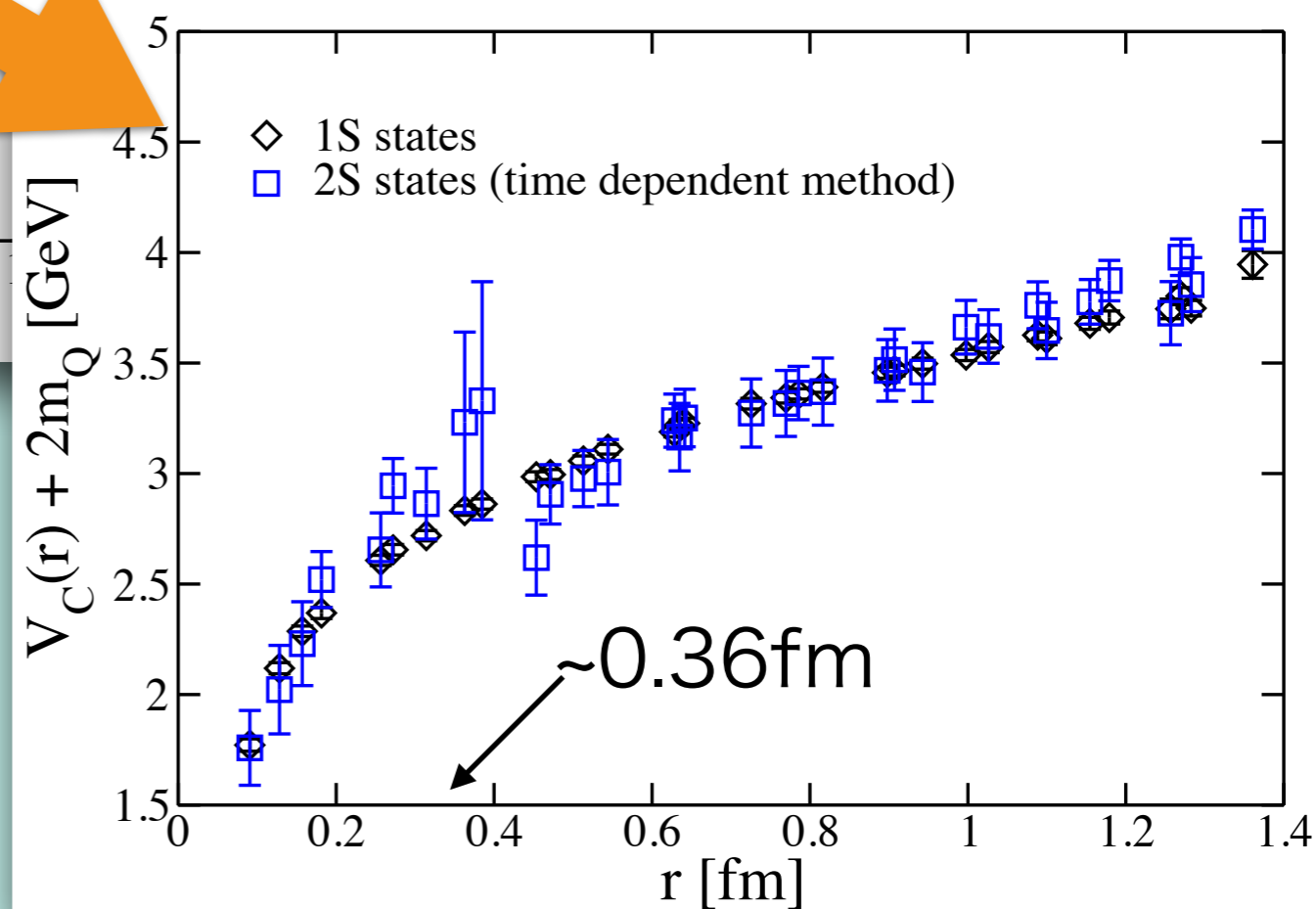
✓ Central potential



★2Sのポテンシャルは定性的に1Sのものと同じ。

★ $r \sim 0.36$ fmで値が発散する。

★ $r > 1$ fm程度で傾きが少し大きい。

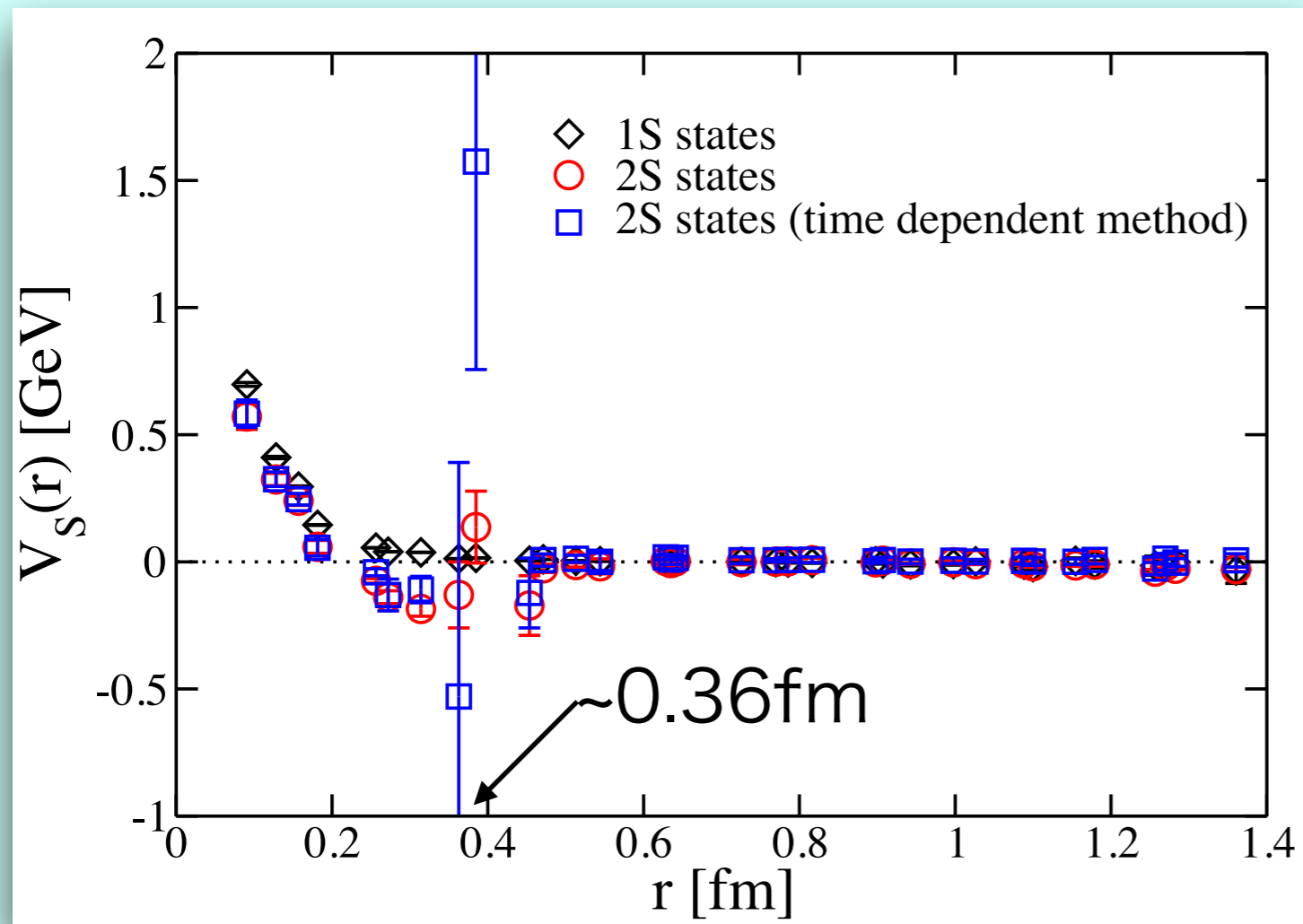


★今回の精度で、2 σ 程度的一致をしている。

★ $r \sim 0.36$ fmにおける発散は残る。

★Time dependent methodはポテンシャル解析に有効である。

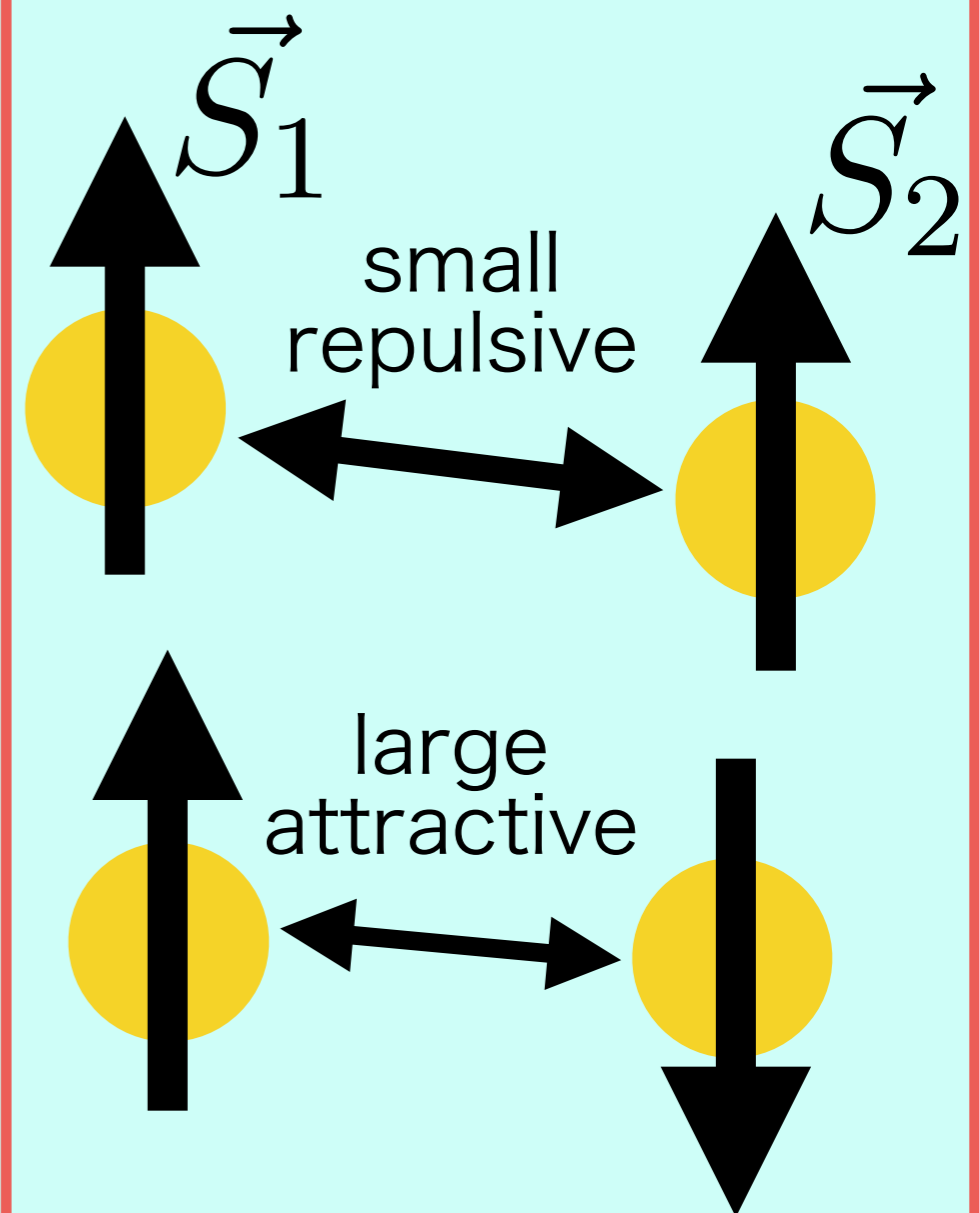
✓ Spin-spin potential



- ★ スピン-スピンポテンシャルは有限の領域に広がっている。
- ★ Time dependent methodでさえ、スピン-スピンポテンシャルはゼロコンシステント。
- ★ $r \sim 0.3\text{fm}$ で僅かにゼロを下回る。

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = 1/4 \quad : \text{spin 1}$$

$$= -3/4 \quad : \text{spin 0}$$



✓ M1 transition

★非相対論極限

★BS波動関数は、非摂動効果をフルに含んでいる。

赤文字は格子上で評価可能。

$$\Gamma_{\{n_i, S=1\} \rightarrow \{n_f, S=0\} \gamma}^{M1} = \frac{16}{27} \alpha \frac{k_\gamma^3}{m_c^2} (\text{int})^2$$

$$\text{int} \equiv \int dr r^2 \bar{\phi}_{n_i}(r) \bar{\phi}_{n_f}(r) j_0\left(\frac{k_\gamma r}{2}\right) \quad k_\gamma = \frac{M_{n_i}^2 - M_{n_f}^2}{2M_{n_i}}$$

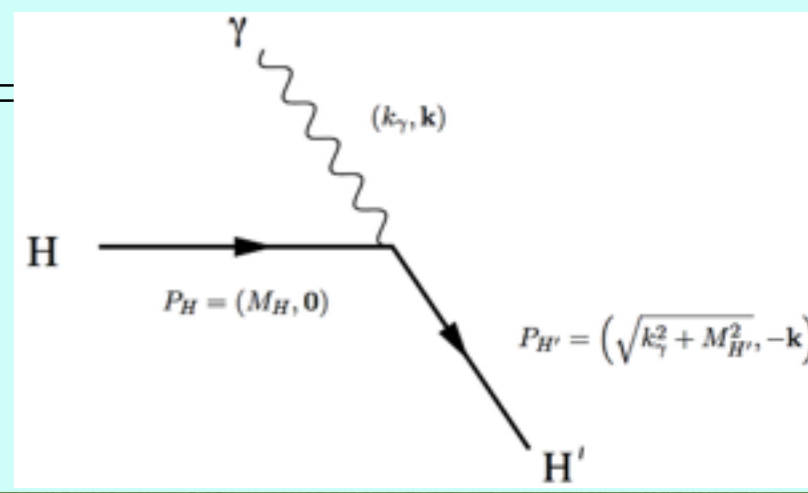
N.Brambilla, Y.Jia, A.Vairo, Phys.Rev. D73 (2006) 054005

T.Barnes, S.Godfrey and E.S. Swanson, Phys. Rev. D72 054026 (2005)

	[keV]	1986年	2009年	2014年	
		Crystal	CLEO	KEDR	模型計算
$1S \rightarrow 1S$	1.72(9)	1.14	1.85	2.98	2.9
$2S \rightarrow 2S$	0.33(14)		0.21(PDG)		0.21

★BS波動関数を用いて崩壊振幅を計算可能。

★実験値と近い値を取っている。



✓ Summary

- ★ 2S状態と1S状態が従うポテンシャルを独立に評価し、それらが定性的に一致する事を確認した。
- ★ ポテンシャルには2カ所の違いがあり、それぞれ
 1. 波動関数の節構造を反映している、もしくは 3S_1 - 3D_1 mixingの効果が見えている。(0.3~0.4fm)
 2. rが大きい領域では波動関数が小さく、系統的な不定性が大きい。(1.0fm <)
- ★ 強い相互作用をフルに含むBS波動関数を用いてM1遷移振幅を評価した。

✓ future work

- ★ D波、P波の解析 → テンソル力、スピン-軌道相互作用……
- ★ 相対論的効果の解析 → time dependent methodから見られるかも