グラフェンにおける
カイラル対称性

東京大学　理学研究科　青木研究室
講義資料「グラフェンの物理」より

青木秀夫、初貝安弘

京都大学　M1　松田英史

参考

・ http://cms.phys.s.utokyo.ac.jp/pdf/HatsugaiAoki_SSP2010.pdf

初貝安弘、青木秀夫

• ABSENCE OF NEUTRINOS ON A LATTICE

(Ⅰ).Proof by homotopy theory

M.NIELSEN、M.NINOMIYA

motivation

グラフェンの物理では

$$\{H, \sigma_3\} = 0$$

がカイラル対称性と呼ばれている！

場の理論のカイラル対称性とどういったanalogyがあるのか？

Introduction

格子理論について
よく知られていること

カイラル対称性

→1stBrillouin Zoneから異なるchiralityのmassless fermion

（二宮・ニールセンの定理）

topologiacalに守られている！

同様に、カイラル対称性を持つグラフェンの理論においては1stBZから異なるchiralityのmassless fermionが2つ出てくることがtopologicalに守られているがそれを示す

＜setting＞

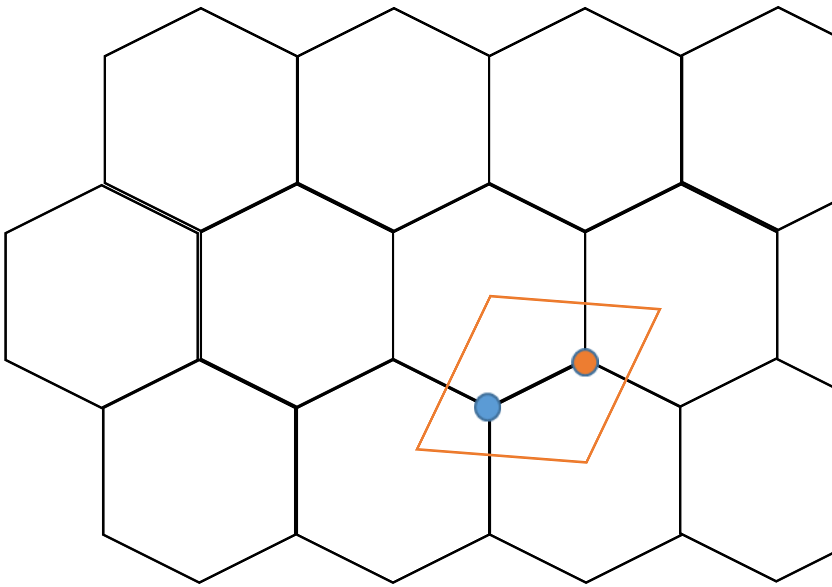
- ハニカム格子

六角形
単位胞あたり2電子
2+1次元

- tight-binding模型

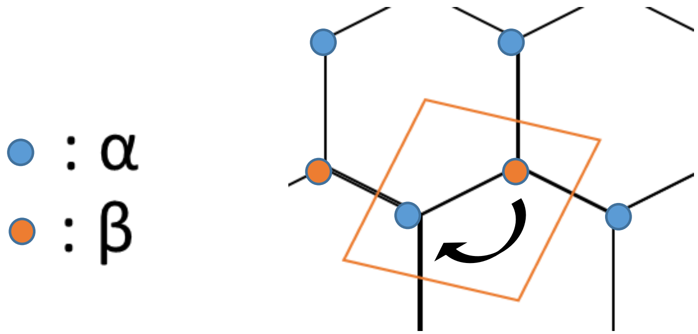
- 第一近接原子への飛び移りのみ考える

- spinは考慮しない



＜Hamiltonian＞

$$H = t\sum_{\overrightarrow{\mathrm{x}}}[\{c_\alpha^\dagger(\overrightarrow{\mathrm{x}})c_\beta(\overrightarrow{\mathrm{x}}) + c_\alpha^\dagger(\overrightarrow{\mathrm{x}}+\overrightarrow{\mathrm{e_1}})c_\beta(\overrightarrow{\mathrm{x}}) + c_\alpha^\dagger(\overrightarrow{\mathrm{x}}+\overrightarrow{\mathrm{e_2}})c_\beta(\overrightarrow{\mathrm{x}})\}$$
$$+\{\alpha \longleftrightarrow \beta\}]$$



$\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$:単位胞の位置を指定するための単位ベクトル

$\vec{x}$:単位胞の位置ベクトル

波数表示すると

$$H=\sum_{\overrightarrow{\mathrm{k}}}^{1stBZ}[c_\alpha^\dagger(\overrightarrow{\mathrm{k}})c_\beta(\overrightarrow{\mathrm{k}})+c_\beta^\dagger(\overrightarrow{\mathrm{k}})c_\alpha(\overrightarrow{\mathrm{k}})]\cdot[1+e^{-i\overrightarrow{\mathrm{k}_1}}+e^{-i\overrightarrow{\mathrm{k}_2}}]$$

$$=\sum_{\overrightarrow{\mathrm{k}}}^{1stBZ}\left[\begin{array}{cc} c_\alpha^\dagger(\overrightarrow{\mathrm{k}}) & c_\beta^\dagger(\overrightarrow{\mathrm{k}})\end{array}\right]\underbrace{\left[\begin{array}{cc} 0 & D(\overrightarrow{\mathrm{k}}) \\ D^*(\overrightarrow{\mathrm{k}}) & 0\end{array}\right]}_{=H(\overrightarrow{\mathrm{k}})}\left[\begin{array}{c} c_\alpha(\overrightarrow{\mathrm{k}}) \\ c_\beta(\overrightarrow{\mathrm{k}})\end{array}\right]$$

$$D(\overrightarrow{\mathrm{k}})=t(1+e^{-i\overrightarrow{\mathrm{k}_1}}+e^{-i\overrightarrow{\mathrm{k}_2}})$$

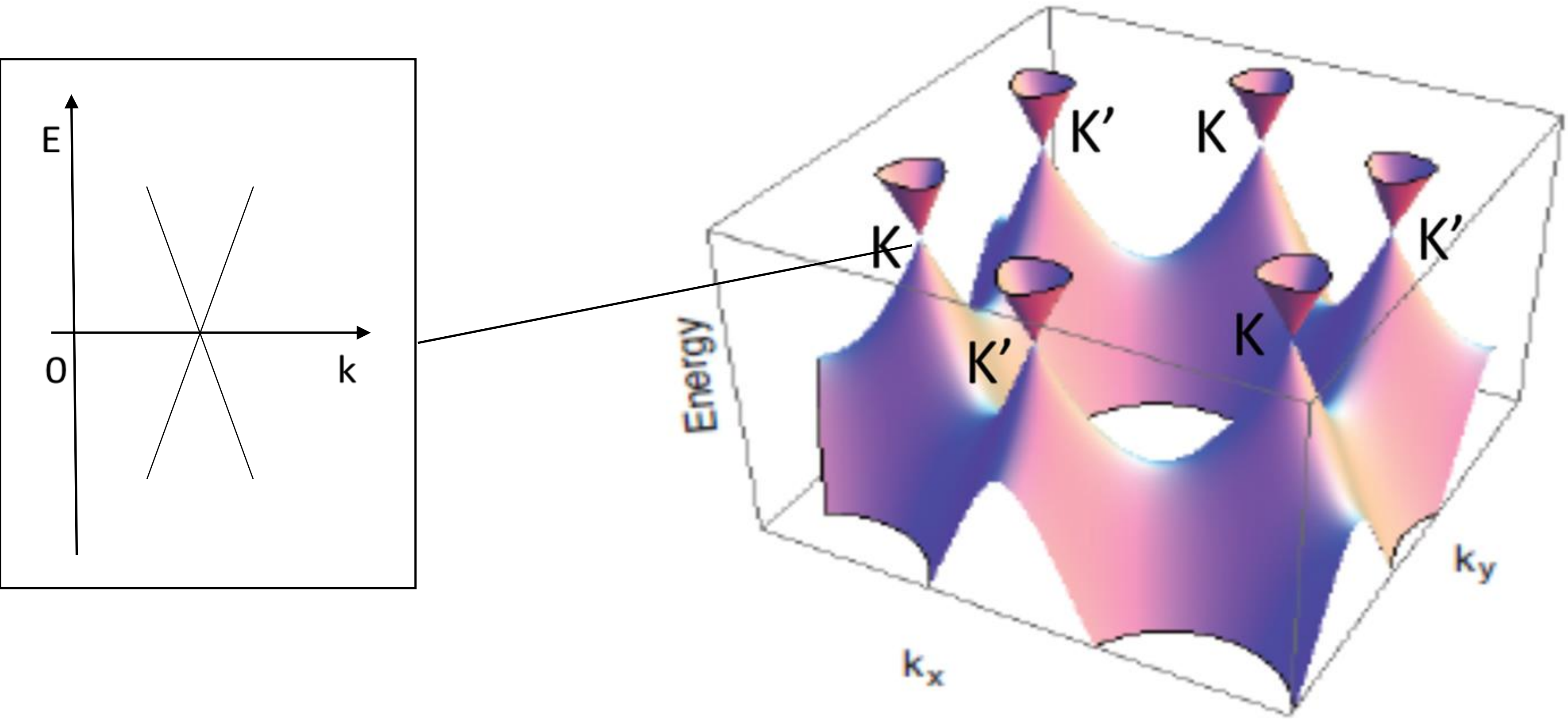
$H(\vec{k})$はtracelessかつσ_3と反可換（カイラル対称性）

・traceless：band gap中央にエネルギーの原点をとった

・σ_3と反可換（カイラル対称性）：最近接格子間の飛び移り積分しか考慮していない

＜グラフェンのエネルギー分散＞

1stBZ 内の点K、K’ においてBand gapは閉じている



http://cms.phys.s.utokyo.ac.jp/pdf/HatsugaiAoki_SSP2010.pdf

＜　band gapの閉じている点（K、K'） 近傍の電子は

massless fermionの分散を持つ＞

ハミルトニアンを点K、K'のまわりで運動量の1次まで展開する

$$H \sim \sum_{i=1,2} [(X_i \sigma_i)\delta k_x + (Y_i \sigma_i)\delta k_y]$$

座標変換を行う　$\kappa_i = V_{ij}\delta k_j$,　$V = \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{bmatrix}$

$$H = \sum_{i=1,2} \kappa_i \sigma_i$$

運動量(κ_1, κ_2)を持つmassless fermionの分散とみなすことができる。

カイラル対称性が存在する

⬇

・縮退点があるならば必ず2つ存在する（点K、K’）

・それぞれの縮退点から出てくるmassless fermionは異なるchiralityを持つ

以下では、この関係がtopologicalに守られていることを示す

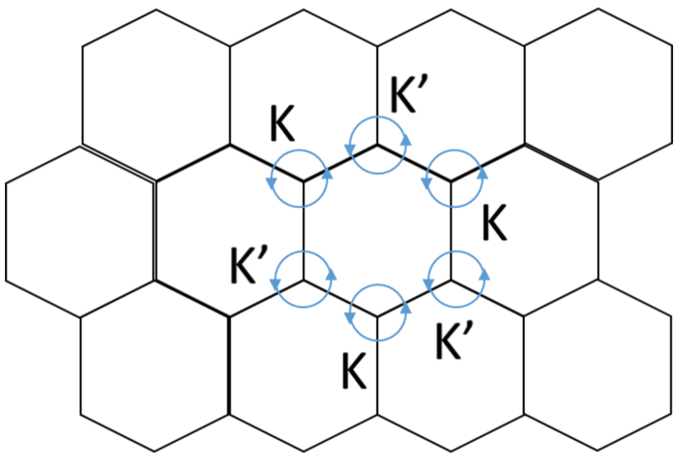
＜chirality＞

基底変換の行列Vの行列式が正負の時をそれぞれchirality $+1, -1$と定義する
（変換前の座標系の向きと同じ、逆に対応）

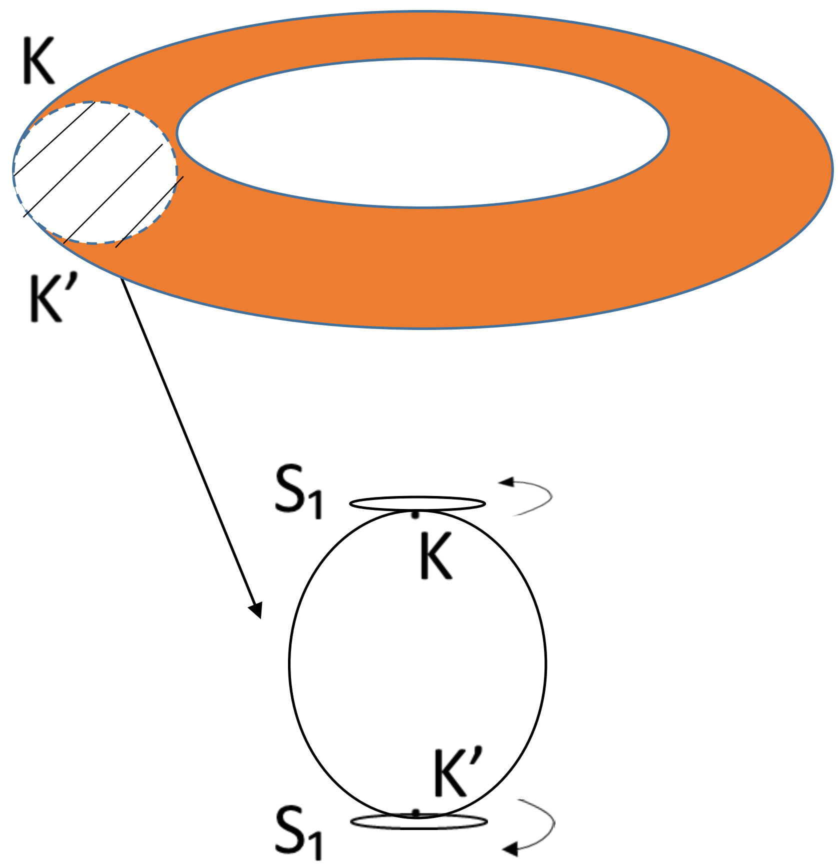
$$\mathrm{det}V = X_1Y_2 - Y_1X_2 \quad \left[\begin{array}{ll} > 0 & \text{(chirality+1)} \\ < 0 & \text{(chirality-1)} \end{array} \right.$$

K,K’点のまわりを囲む微小なS_1を考える $\mathrm{S}_1 = \{\overrightarrow{\delta \mathrm{k}} \mid |\overrightarrow{\delta \mathrm{k}}| = \epsilon\}$

周期性より1stBZはトーラスと同相である



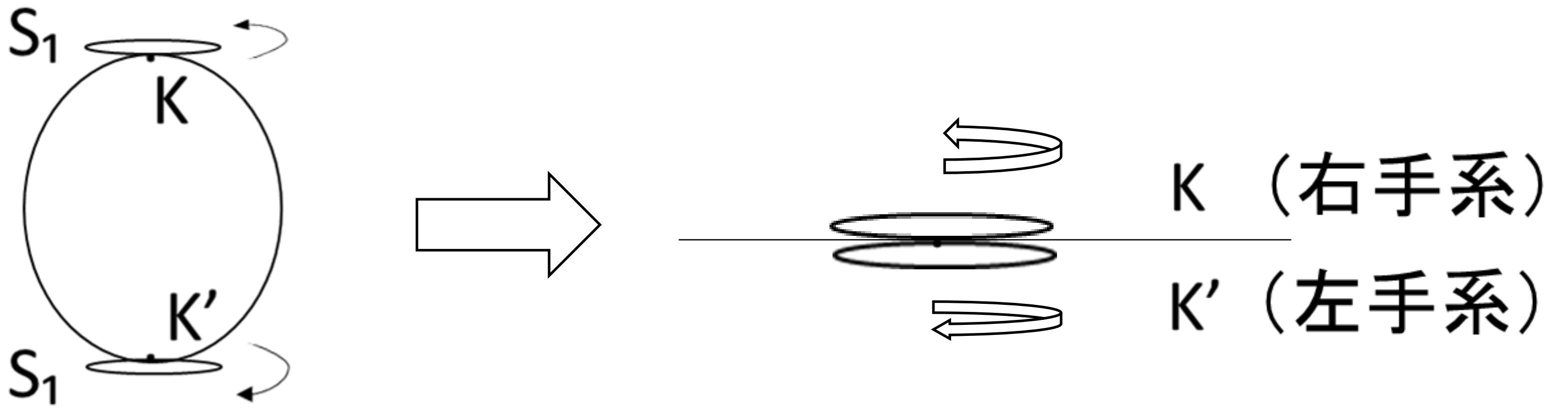
$\simeq$



トーラスの断面

1stBZ（トーラス）は写像$a_1(\vec{k})$ 、$a_2(\vec{k})$で**二次元平面**に射影される

（ $H(\overrightarrow{\mathrm{k}}) = \sum_{i=1,2} a_i(\overrightarrow{\mathrm{k}})\sigma_i$ とかけることを思い出す）



2次元空間におけるS_1の写像は異なる向きを持つ座標系を成す

→点K,K'から出てくるmassless fermionは異なるchiralityを持つ

Conclusion

グラフェンにおいてカイラル対称性（ $\{H, \sigma_3\} = 0$ ）
があるならばBZから異なるchiralityを持ったmassless fermionが
一つずつ出てくることはtopologicalに守られている

この関係は格子上の場の理論におけるカイラル対称性とmassless ferimionの関係と同様である