Z_3対称性と符号問題

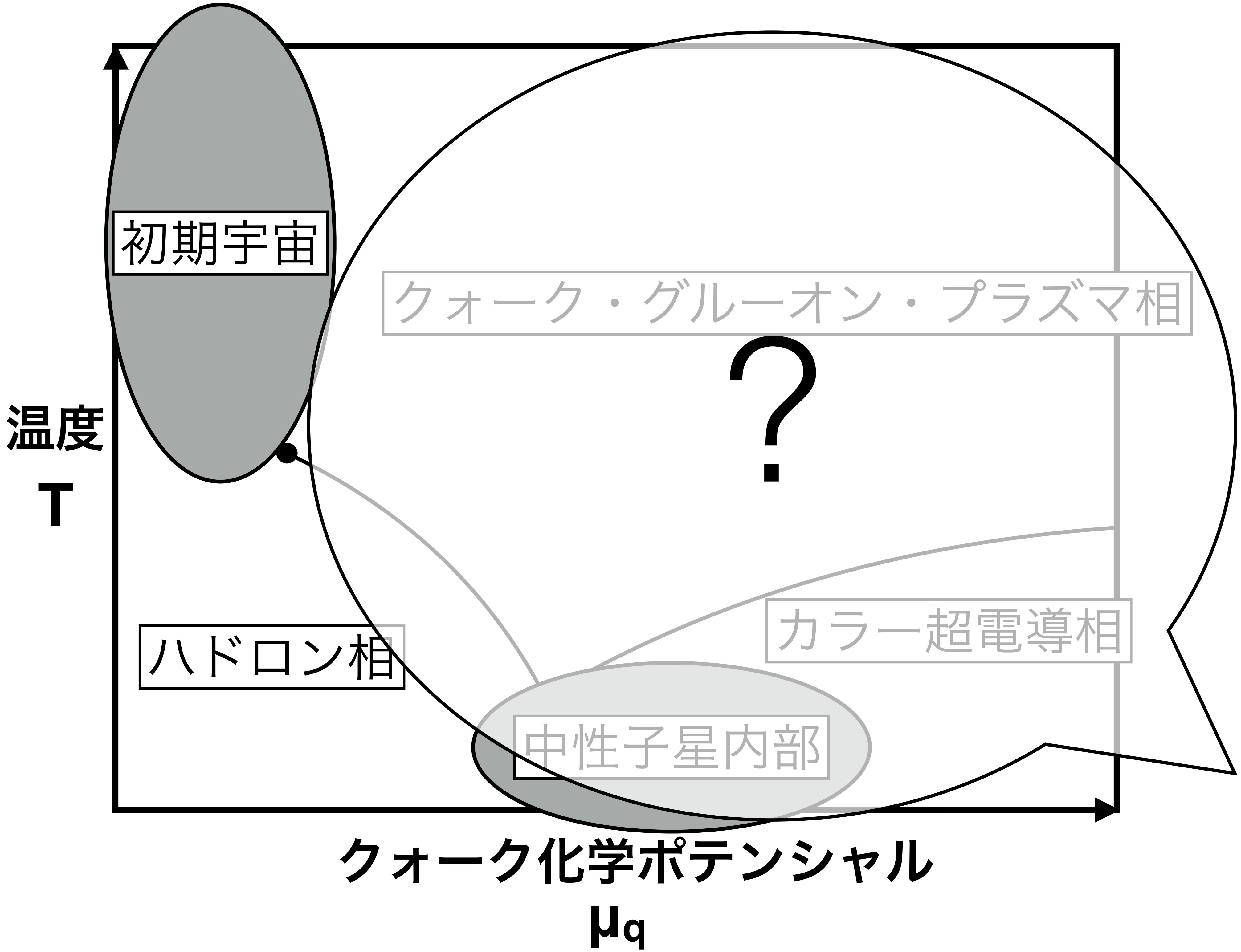
九州大学 理論核物理研究室

開田丈寛

共同研究：河野宏明(佐賀大)、高橋純一(JMA)、八尋正信

[Phys. Rev. D 94, 014011 (2016)]

1-1. QCD相図



初期宇宙
クォーク・グルーオン・プラズマ相
?
温度
T
カラー超電導相
ハドロン相
中性子星内部
クォーク化学ポテンシャル
μq

1-2. 符号問題

- ✓ フェルミオン行列：$M(A_\mu, \mu) = \gamma_\mu^{\mathrm{E}}(\partial_\mu - iA_\mu) + m + \mu\gamma_4^{\mathrm{E}}$

- ✓ $$\begin{aligned} \{\det[M(A_\mu,\mu)]\}^* &= \det[M(A_\mu,\mu)^\dagger] \\ &= \det[M(A_\mu^\dagger, -\mu^*)] \\ &\neq \det[M(A_\mu,\mu)] \end{aligned}$$

- ✓ フェルミオン行列式は複素数→

  Monte Carlo法による数値計算が困難になる

  ＝“符号問題”

- ✓ 対処法…Taylor展開法、再重み法、

  複素ランジュバン法、等々

1-3. Z_3-QCD

✓ 厳密な中心対称性(Z_3対称性)を持つQCD-likeな理論

[H. Kouno, et al., Phys. Rev. D 93, 056009(2016)]

✓ Lagrangian密度…

$$\mathcal{L}_{Z_3-\mathrm{QCD}} = \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}_f(\gamma_\nu D_\nu^\theta + m)\psi_f + \frac{1}{4g^2} {F_{\mu\nu}^a}^2$$

$$D_\nu^\theta = \partial_\nu - i(A_\nu + \hat{\theta}\delta_{\nu,4}T),\ \hat{\theta} = \mathrm{diag}(0, 2\pi/3, 4\pi/3)$$

✓ ゼロ温度極限において、QCDに一致

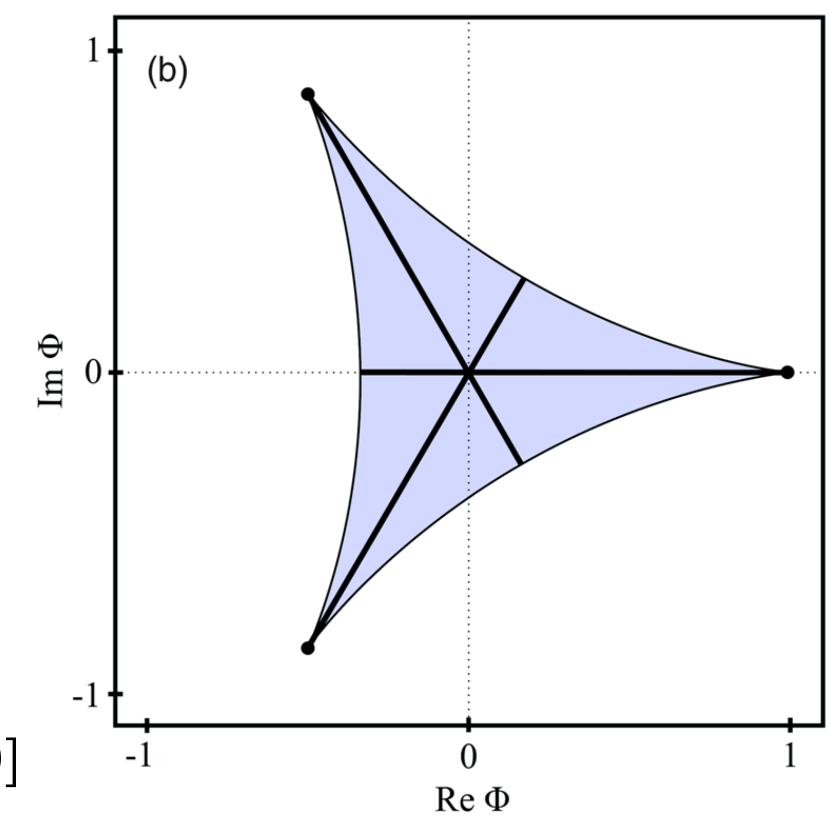
✓ 符号問題

…緩やかにすると期待される

✓ μ = 0 … Z_3-QCDの格子計算

→有効理論による予測と一致

[T. Iritani, et al., JHEP11(2015)159]



Polyakov loop Φ

1-4. 研究目的

- ✓ QCDにおいて、Z_3対称性と符号問題についての関係性を調べる
- ✓ 格子QCDによる数値計算では、

  計算コストが大きくなる
- ✓ QCDから導かれるとされる

  “3状態Potts模型(スピン模型)”を用いて計算
- ✓ 模型のZ_3対称化前と後で、符号問題の深刻さを比較

2-1. Potts模型

✓ QCD + 高温・強結合極限 → 3状態Potts模型

[T. A. DeGrand, and C. E. DeTar, Nucl. Phys. B225 (1983) 590-620]

$$Z_{\text{Potts}} = \int \mathcal{D}\phi \ \ \exp\left[\kappa \sum_{<i,j>} \delta(\phi_i, \phi_j)\right] \qquad \{\phi\} = \{1, e^{\pm i2\pi/3}\}$$

“κ大 → 高温, κ小 → 低温”に対応

✓ QCDのstatic quark極限 …

[S. Chandrasekharan, Nucl. Phys. (Proc. Suppl.) 94 (2001) 71-78]

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}U \ \ \exp\left[-S_G[U] + e^{-(M-\mu)/T}\Phi + e^{-(M+\mu)/T}\Phi^*\right] \\ \Phi &= \int d^3x \mathrm{tr}\left\{\mathcal{P}\exp\left[-\int_0^\beta dt \ \ A_4(\boldsymbol{x}, t)\right]\right\} \end{aligned}$$

2-2. Z$_3$対称化したPotts模型

✓ Potts模型をZ$_3$対称化 …

[J. Greensite, Phys. Rev. D 90, 114507(2014)]

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \; e^{-S}$$

$$S = -\kappa \sum_{\langle i,j \rangle} \delta(\phi_i, \phi_j) - \sum_i \Big\{ g_1 e^{-2M/T} |\phi_i|^2 + g_2 e^{-3(M-\mu)/T} (\phi_i)^3 + g_3 e^{-3(M+\mu)/T} (\phi_i^*)^3 \Big\}$$

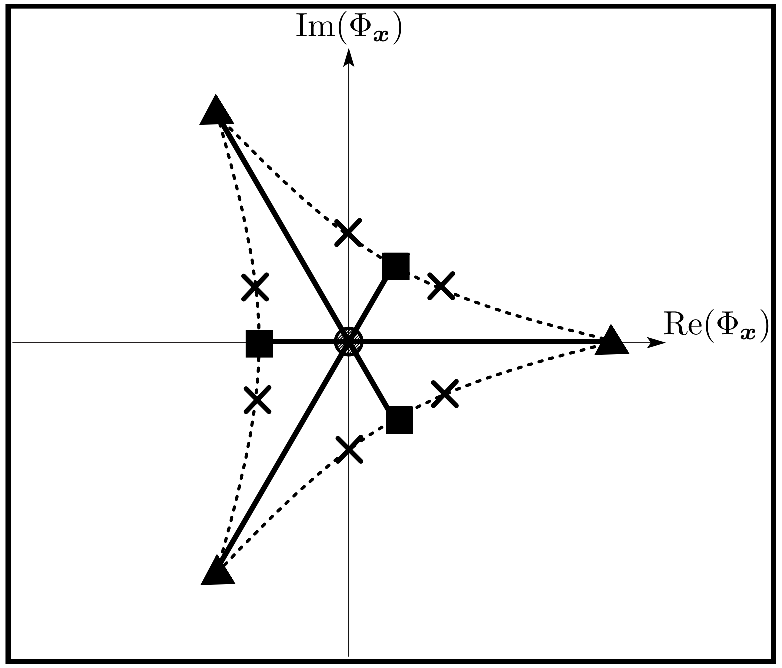
$$g_1 = g_2 = g_3 = 1$$

✓ $\{\phi\} = \{1, e^{\pm i2\pi/3}\}$では

符号問題が起きない

→符号問題が起きるように

“意図的に”スピンを選ぶ(計13状態)



2-3. Setup, 測定量

- ✓ 体積：6 * 6 * 6　(スピン模型のため、空間方向のみ)

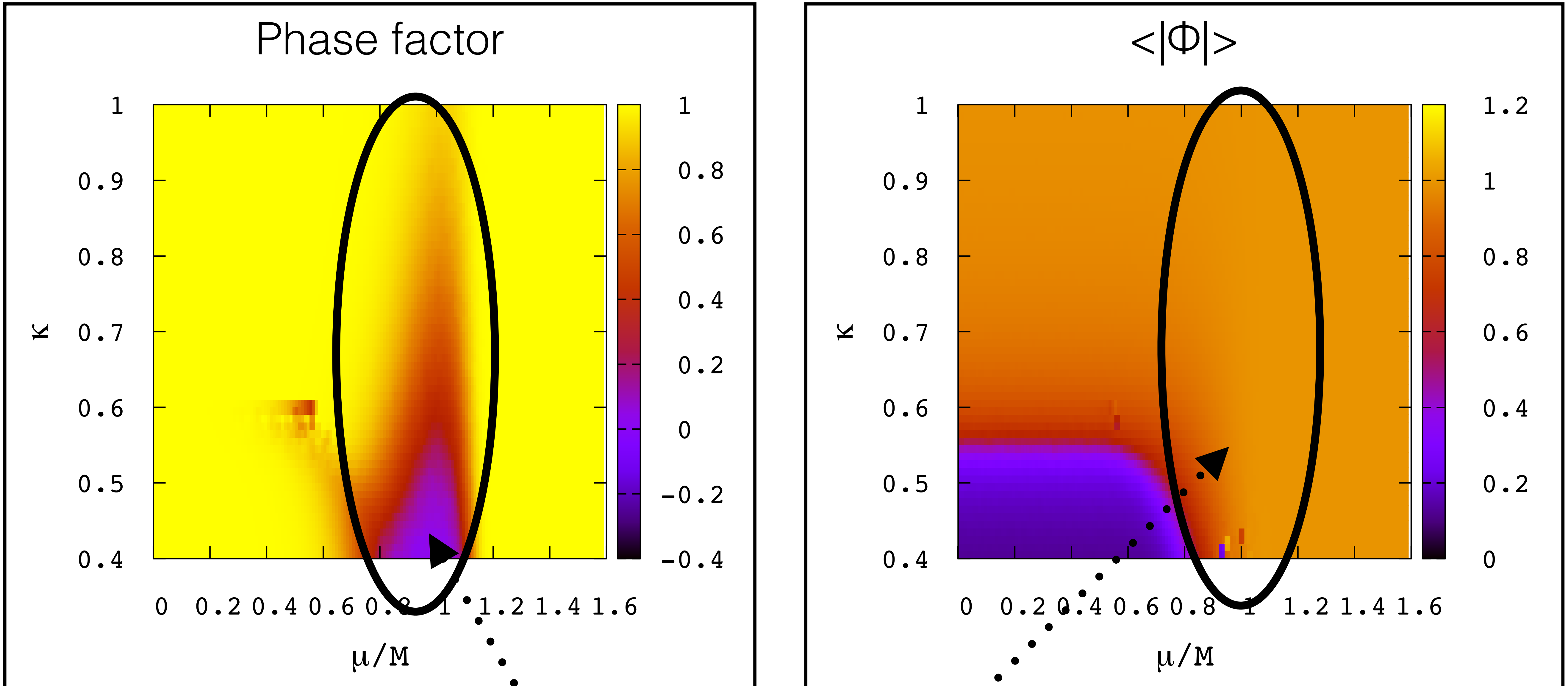
- ✓ パラメータ：$0 \leq \mu/M \leq 1.6,\ 0.4 \leq \kappa \leq 1,\ M/T = 10$

- ✓ Order parameter : $|\Phi| = \left| \frac{1}{V} \sum_i \phi_i \right|$ (Polyakov-loop like value)

- ✓ Phase factor : e^{-iS_I} , $S_I = \mathrm{Im}[S]$

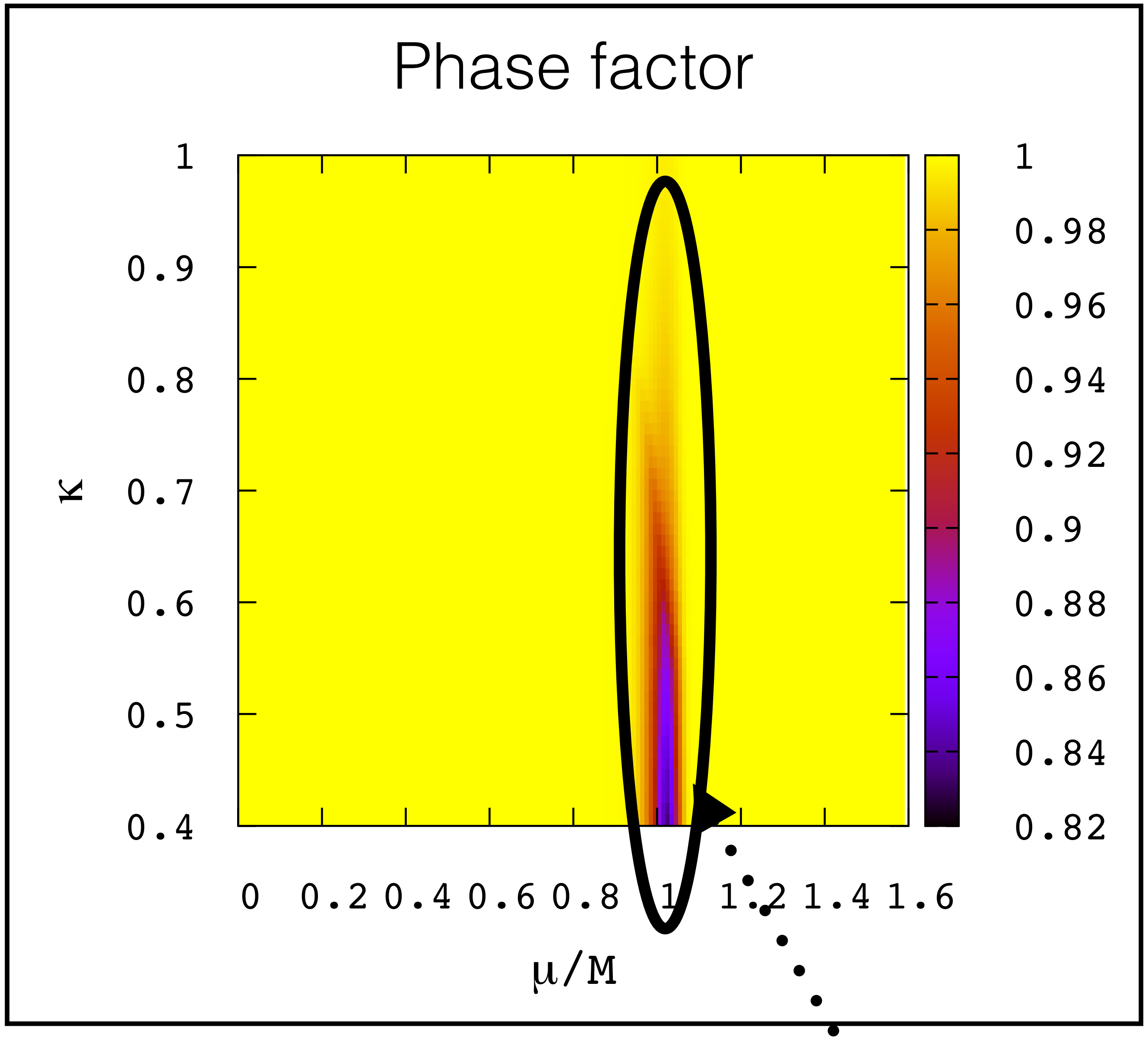
- ✓ Reweighting → $\langle |\Phi| \rangle = \frac{\langle |\Phi| e^{-iS_I} \rangle}{\langle e^{-iS_I} \rangle}$

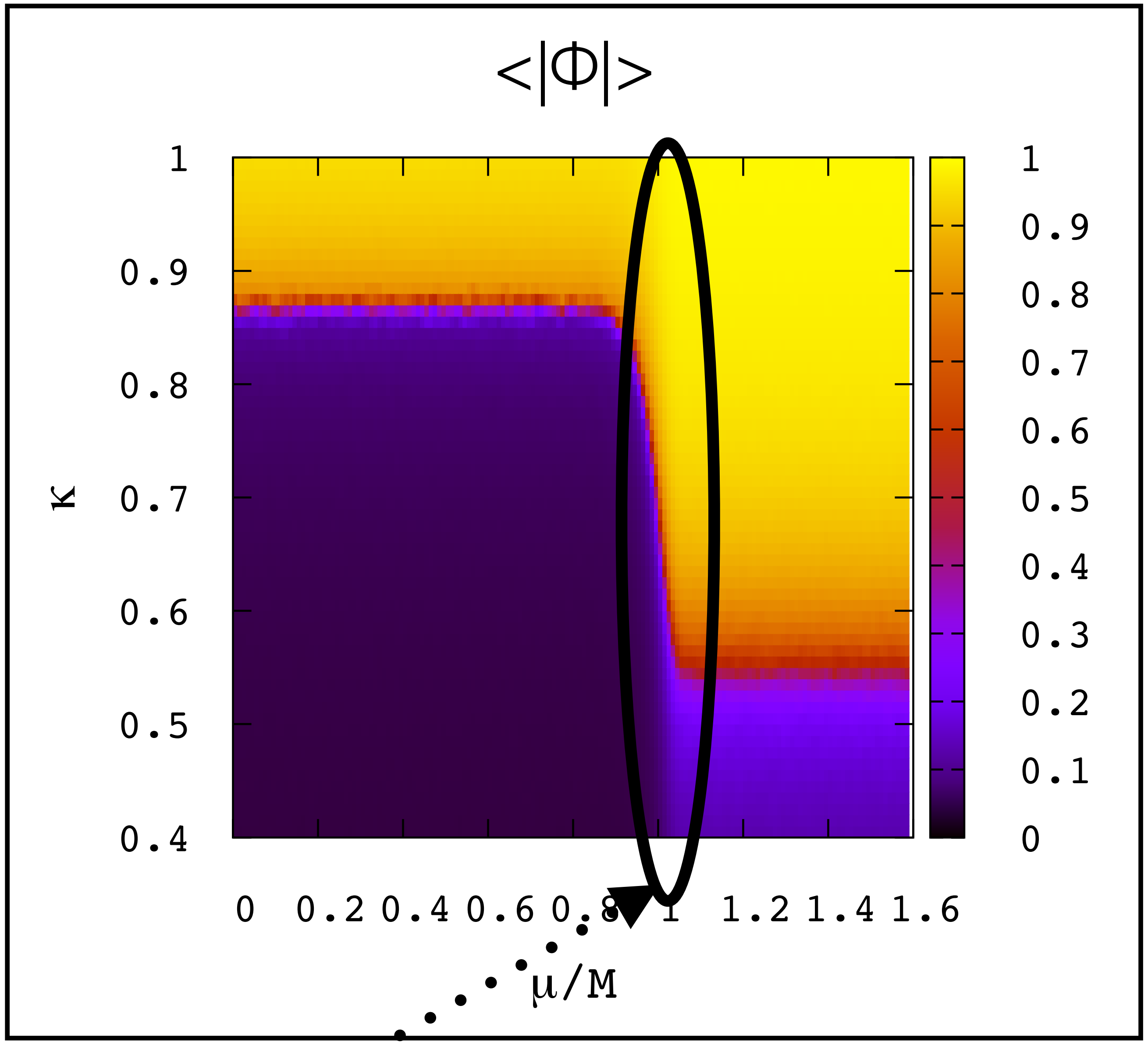
3-1. 結果：Z_3対称化前



符号問題が深刻な領域、秩序変数も1を超えるor負の値

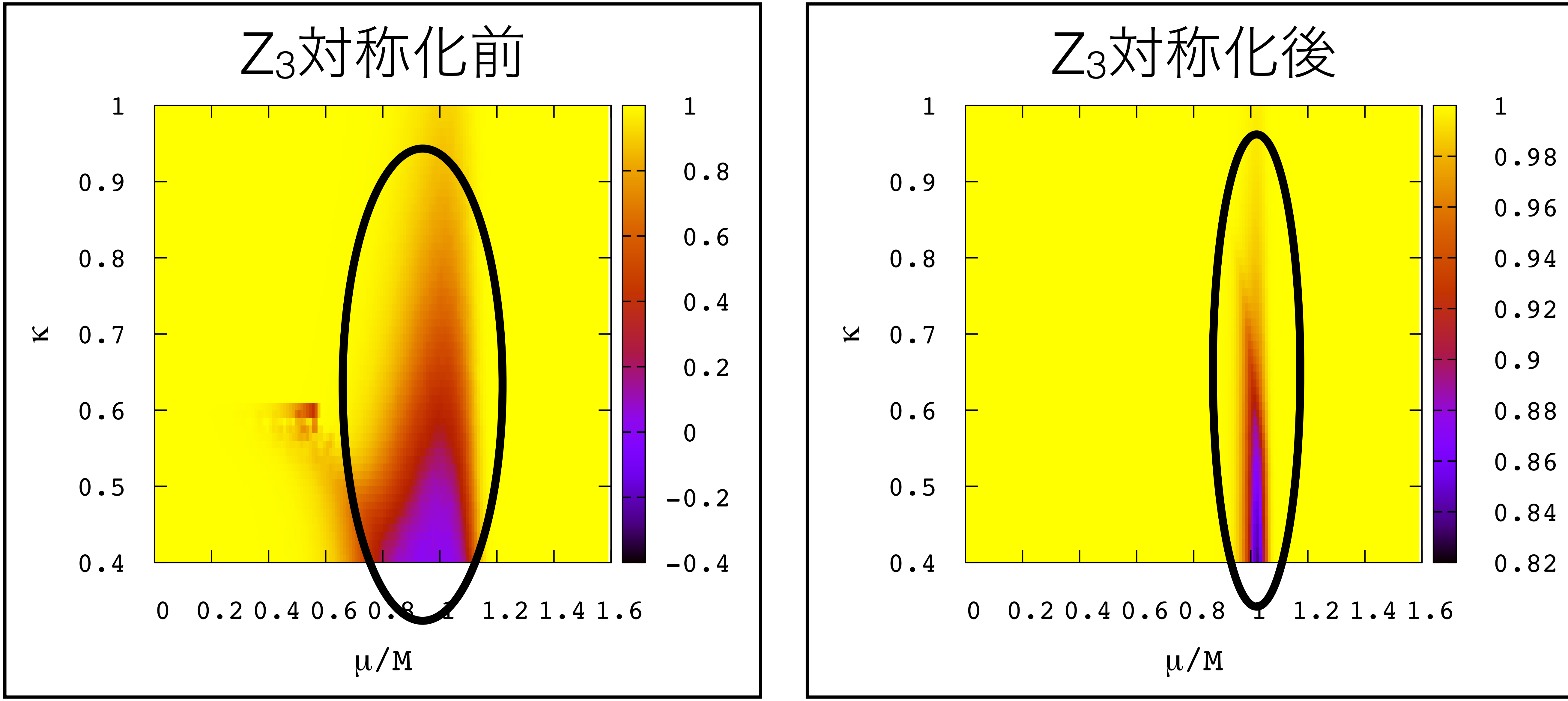
3-2. 結果：Z₃対称化後





符号問題が深刻な領域、Z3対称化前よりは深刻でない

3-3. 結果：位相因子の比較



Z_3対称化後のほうが、符号問題の深刻さが緩やか
深刻な領域が劇的に小さくなった

4-1. まとめ

- ✓ Z_3対称性と符号問題の関係について解析した
- ✓ 計算コストの観点から、
  QCDから導かれる“3状態Potts模型”を用いた
- ✓ Z_3対称化を行った模型では、通常模型よりも符号問題が深刻でなくなることが示された

4-2. 今後

- ✓ Z_3対称化された模型の作用の形のもととなったもの

  = “effective Polyakov line model (PLM)”

  [J. Greensite, Phys. Rev. D 90, 114507(2014)]

- ✓ この模型にZ_3対称化を行うと

  閉じ込めと非閉じ込めは縮退する

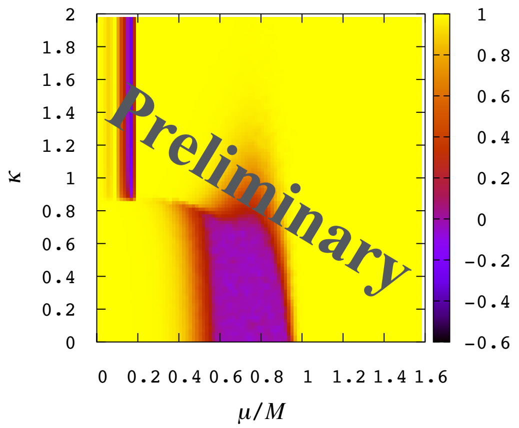
- ✓ (右図)上記の効果を

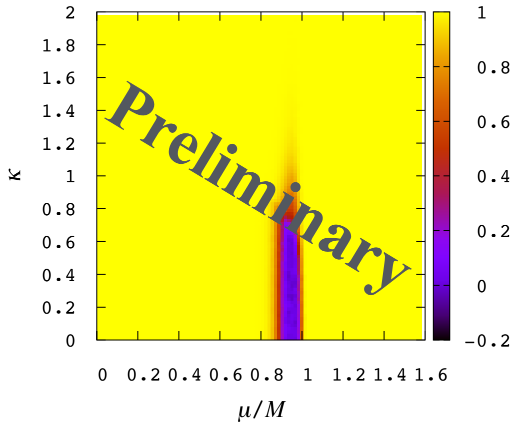
  Z_3対称化したPotts模型に取り入れた

- ✓ 動的変数がゲージ場からPolyakov lineに

  → Haar measure の効果が必要

- ✓ PLMによるZ_3対称化の計算を実行する



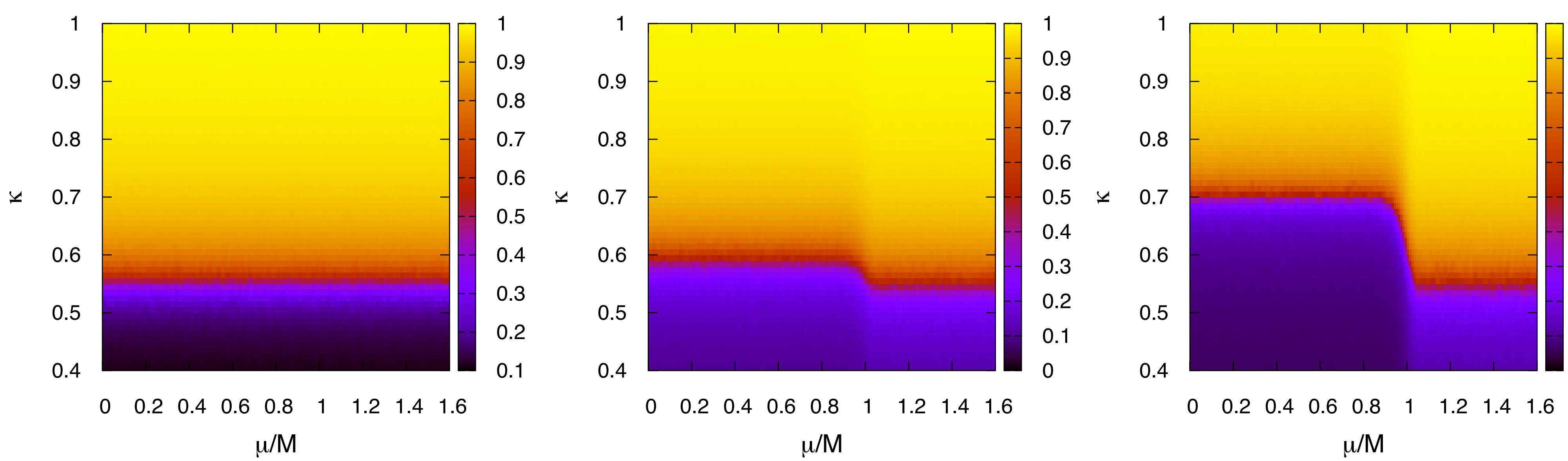


ご清聴ありがとうございました

Backup

Ex 0-1. Z_3-Potts model

- ✓ Action … $$S = -\kappa \sum_{\langle i,j \rangle} \delta(\phi_i, \phi_j) - \sum_i \left\{ e^{-2M/T} |\phi_i|^2 + e^{-3(M-\mu)/T} (\phi_i)^3 + e^{-3(M+\mu)/T} (\phi_i^*)^3 \right\}$$
- ✓ Spin …
  - ✓ 3 state : $\{\phi\} = \{1, \exp[\pm i2\pi/3]\}$
  - ✓ 4 state : $\{\phi\} = \{1, \exp[\pm i2\pi/3], 0\}$
  - ✓ 7 state : $\{\phi\} = \{1, \exp[\pm i2\pi/3], 0, \frac{1}{3}\exp[\pm i\pi/3], -\frac{1}{3}\}$
- ✓ Results … (left:3 state, center:4 state, right:7 state)

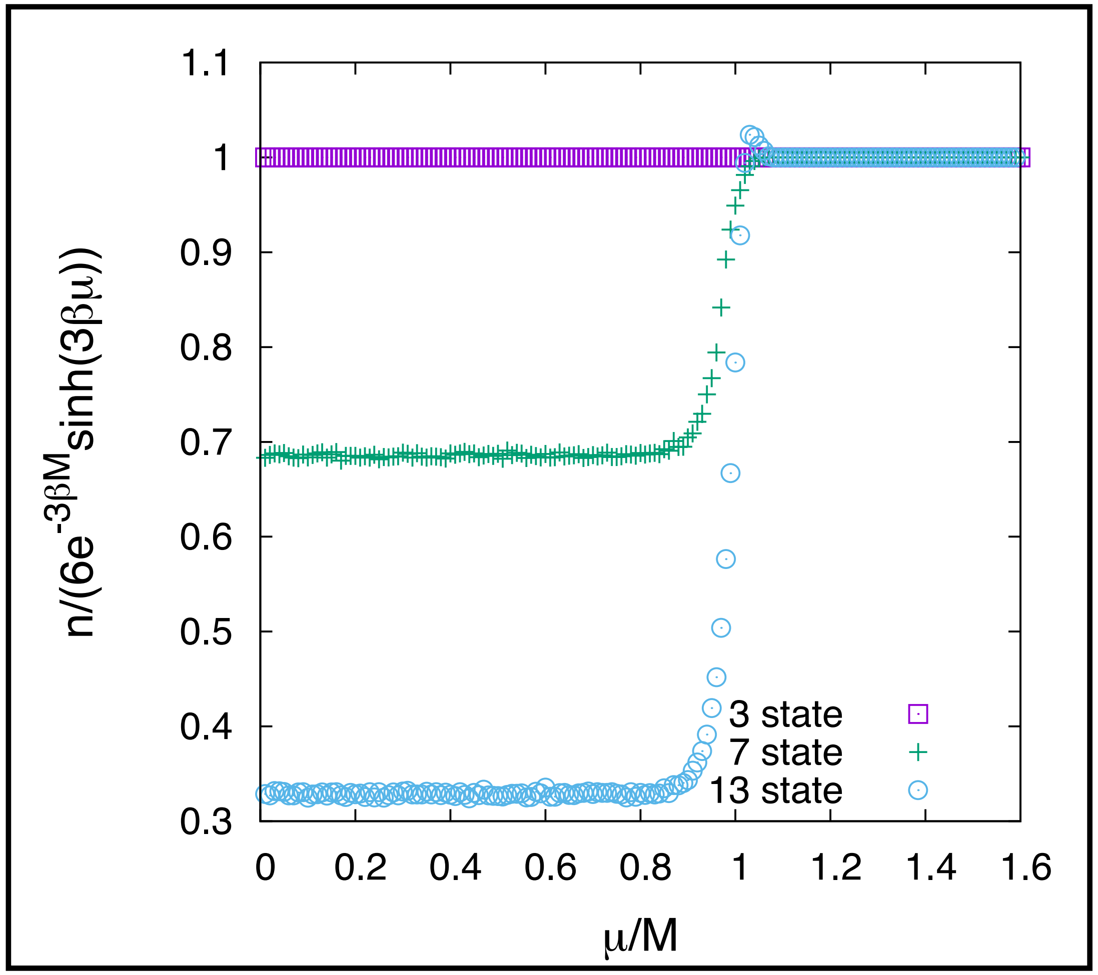


Ex 0-2. Quark number density

- ✓ quark number density … $n_q = \frac{T}{V}\frac{\partial}{\partial\mu}\log Z$
- ✓ 3 stateの結果が“1”となるよう規格化

$$n_{3-\mathrm{state}} = 6e^{-3M/T}\sinh(3\mu/T)$$

- ✓ κ = 0.65
- ✓ 3 state … 常に1
- ✓ 7 state, 13 state …
  μ/M ~ 1で急激に増加
- ✓ partition function ~ 0 (?)
  → Lee-Yang zeros
  analysesが有効かも



Ex 1. QCD → Potts model

- ✓ 格子QCDにおいて…

  N_t=1, τ/a << 1 (SU(3)の高温・強結合極限)

- ✓ 時間方向を含むプラケット…

$$U_{n,4i} = U_{(\boldsymbol{n},0),4i} = U_{(\boldsymbol{n},0)4} U_{(\boldsymbol{n},0)i} U^{\dagger}_{(\boldsymbol{n}+\hat{i},0)4} U^{\dagger}_{(\boldsymbol{n},0)i}$$

$$\downarrow\ U_{(\boldsymbol{n},0)4} = z_{\boldsymbol{n}} \quad (z_{\boldsymbol{n}} \in Z_3)$$

$$U_{(\boldsymbol{n},0),4i} = z_{\boldsymbol{n}} z^{*}_{\boldsymbol{n}+\hat{i}}$$

- ✓ ゲージ作用…

$$S_G = -\frac{1}{3}\sum_n \left[\frac{a}{\tau} \sum_{i=1}^{3} \mathrm{Retr}(U_{n,4i}) + \frac{\tau}{a} \sum_{i<j} \mathrm{Retr}(U_{n,ij}) \right] \to -\frac{\beta a}{\tau} \sum_{\boldsymbol{n},i} \mathrm{Re} z_{\boldsymbol{n}} z^{*}_{\boldsymbol{n}+\hat{i}}$$

[T. A. DeGrand, and C. E. DeTar, Nucl. Phys. B225 (1983) 590-620]

Ex 2. Static quark limit

- ✓ Static Quark極限において、

$$Z = \int \mathcal{D}U \;\Phi e^{-S_G - m/T} \quad , \quad \Phi \text{ : Polyakov loop}$$

- ✓ quark数 n 、antiquark数 $\bar{n}$ …

$$Z_{n,\bar{n}} = \int \mathcal{D}U \;\frac{\Phi^n}{n!}\frac{\Phi^{*\bar{n}}}{\bar{n}!} e^{-S_G[U] - m(n+\bar{n})/T}$$

- ✓ 化学ポテンシャル μ → Grand Canonical

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{n,\bar{n}} Z_{n,\bar{n}} e^{\mu(n-\bar{n})/T} \\ &= \int \mathcal{D}U \;\exp\left[-S_G[U] + e^{-(m-\mu)/T}\Phi + e^{-(m+\mu)/T}\Phi^*\right] \end{aligned}$$

[S. Chandrasekharan, Nucl. Phys. (Proc. Suppl.) 94 (2001) 71-78]

Ex 3-1. Z3-QCD

✓ 時間方向…フレーバー依存の境界条件(FDBC)

$$\psi_f(\beta, \boldsymbol{x}) = e^{-i\theta_f}\psi_f(0, \boldsymbol{x})$$

✓ $\theta_1 = \theta,\ \theta_2 = -\theta,\ \theta_3 = 0$ ➞ $\theta = 0$ でQCDに一致

✓ $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ ➞ Z3-QCD

✓ θ_fによる変換 $\psi_f \to \exp[-i\theta_f T\tau]\psi_f$ により、

Lagrangian密度が大きく変わらないように再定義

$$\to\ \ \mathcal{L}_{Z_3-\mathrm{QCD}} = \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}_f(\gamma_\nu D_\nu^\theta + m)\psi_f + \frac{1}{4g^2}{F_{\mu\nu}^a}^2$$

$$D_\nu^\theta = \partial_\nu - i(A_\nu + \hat{\theta}\delta_{\nu,4}T),\ \hat{\theta} = \mathrm{diag}(0, 2\pi/3, 4\pi/3)$$

[H. Kouno, et al., Phys. Rev. D 93, 056009(2016)]

Ex 3-2. Z_3対称化の手続き

✓ 模型のZ_3対称化 … [H. Kouno, et al., Phys. Rev. D 93, 056009(2016)]

1. 化学ポテンシャルμをフレーバー依存の形へ

$$\mu_f \to \mu'_f = \mu_f + i\theta_f \quad \theta_f = \{0, 2\pi/3, -2\pi/3\}$$

2. クォークの寄与を、
   フレーバーについて和をとる（作用）

$$S_q = \sum_{f=\mathrm{u,d,s}} S_f(\mu_f)$$

✓ フレーバー依存の化学ポテンシャルが、模型全体のZ_3対称化に寄与する

Ex 4-1. effective Polyakov line model

- ✓ Action of the underlying SU(3) gauge theory S_L

  → effective Polyakov line action (PLA) S_P

$$\exp[S_P] = \int \mathcal{D}U_0 \mathcal{D}U_k \mathcal{D}\phi \left\{ \prod_{\boldsymbol{x}} \delta\left[U_{\boldsymbol{x}} - U_0(\boldsymbol{x}, 0)\right] \right\} \exp[S_L]$$

- ✓ heavy quark model …

$$\exp[S_P] = \prod_{\boldsymbol{x}} \det\left[1 + he^{\mu/T} U_{\boldsymbol{x}}\right]^P \det\left[1 + he^{-\mu/T} U_{\boldsymbol{x}}^\dagger\right]^P \exp[S_P^0]$$

$$\begin{aligned} \det\left[1 + he^{\mu/T} U_{\boldsymbol{x}}\right] &= 1 + he^{\mu/T}\mathrm{tr}[U_{\boldsymbol{x}}] + h^2 e^{2\mu/T}\mathrm{tr}[U_{\boldsymbol{x}}^\dagger] + h^3 e^{3\mu/T} \\ \det\left[1 + he^{-\mu/T} U_{\boldsymbol{x}}^\dagger\right] &= 1 + he^{-\mu/T}\mathrm{tr}[U_{\boldsymbol{x}}^\dagger] + h^2 e^{-2\mu/T}\mathrm{tr}[U_{\boldsymbol{x}}] + h^3 e^{-3\mu/T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ S_P &= S_P^0 + 2N_f \sum_{\boldsymbol{x}} \Big\{ \log\left[1 + he^{\mu/T}\mathrm{tr}[U_{\boldsymbol{x}}] + h^2 e^{2\mu/T}\mathrm{tr}[U_{\boldsymbol{x}}^\dagger] + h^3 e^{3\mu/T}\right] \\ &\quad + \log\left[1 + he^{-\mu/T}\mathrm{tr}[U_{\boldsymbol{x}}^\dagger] + h^2 e^{-2\mu/T}\mathrm{tr}[U_{\boldsymbol{x}}] + h^3 e^{-3\mu/T}\right] \Big\} \end{aligned}$$

[J. Greensite, Phys. Rev. D 90, 114507(2014)]

Ex 4-2. effective Polyakov line model

✓ Z3 symmetrize PLA …

$$\therefore\ S_P = S_P^0 + 2\sum_{\boldsymbol{x}}\Big\{\log\big[1+3he^{3\mu/T}L_{\boldsymbol{x}}+3h^2e^{6\mu/T}L_{\boldsymbol{x}}^*+h^3e^{9\mu/T}\big]$$
$$+\log\big[1+3he^{-3\mu/T}L_{\boldsymbol{x}}^*+3h^2e^{-6\mu/T}L_{\boldsymbol{x}}+h^3e^{-9\mu/T}\big]\Big\}$$

$$P_{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{3}\mathrm{tr}[U_{\boldsymbol{x}}]\ ,\quad L_{\boldsymbol{x}} = 9(P_{\boldsymbol{x}}^3 - P_{\boldsymbol{x}}P_{\boldsymbol{x}}^*)+1$$

✓ L_xについて、

閉じ込め　：　$P_{\boldsymbol{x}} = 0$

非閉じ込め：　$P_{\boldsymbol{x}} = 1,\ \exp\big[\pm i2\pi/3\big] \in Z_3$

は縮退する

[J. Greensite, Phys. Rev. D 90, 114507(2014)]

Ex 5. Haar measure

- ✓ Partition function … $Z = \int \mathcal{D}U \; e^{S[U]}$

- ✓ PLA … dynamical variables : $(\theta_1(\boldsymbol{x}), \theta_2(\boldsymbol{x}))$

$$\mathrm{tr}\left[U_{\boldsymbol{x}}\right] = e^{i\theta_1(\boldsymbol{x})} + e^{i\theta_2(\boldsymbol{x})} + e^{-i(\theta_1(\boldsymbol{x})+\theta_2(\boldsymbol{x}))}$$

- ✓ Partition function for PLA …

$$Z_{\mathrm{PLA}} = \int \mathcal{D}\theta_1 \mathcal{D}\theta_2 \; \left\{ \prod_{\boldsymbol{x}} H(\theta_1(\boldsymbol{x}), \theta_2(\boldsymbol{x})) \right\} \exp\left[S_P\right]$$

$$H(\theta) = \sin^2\left(\frac{\theta_1(\boldsymbol{x}) - \theta_2(\boldsymbol{x})}{2}\right) \sin^2\left(\frac{2\theta_1(\boldsymbol{x}) + \theta_2(\boldsymbol{x})}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta_1(\boldsymbol{x}) + 2\theta_2(\boldsymbol{x})}{2}\right)$$

[J. Greensite, Phys. Rev. D 90, 114507(2014)]