

2017 年度・第 63 回原子核三者若手夏の学校
素粒子パート弦理論講義録

エンタングルメントとくりこみ群

Entanglement and Renormalization Group

西岡辰磨（東京大学）述
長谷川知香（立教大学）記

実施日：2017 年 8 月 25 日
作成日：2017 年 8 月 30 日

概要

本講義録は、2017年8月25日に実施された第63回原子核三者若手夏の学校素粒子パート弦理論講義の内容に基づき、講義録作成者によって再構築された講義ノートです。よって文責は講義録作成者にあります。講義内容は、1. 量子力学系でのエンタングルメントの定義と簡単な例、2. 場の理論での計算方法、3. 量子的な不等式とそのくりこみ群への応用、という三部構成であり、事前に講義概要にて言及されていました4. AdS/CFT対応を用いたホログラフィックな記述につきましては、講師である西岡辰磨氏に事前に十分ご準備していただけていたにもかかわらず、2017年度から施行された講義実施時間短縮措置の影響により、あいにく講義いただくには至りませんでした。講義は、主な聴衆である理論物理学素粒子分野の修士1年次生が聴講して理解できることを目標として、3コマ計4時間半という時間割の下、丁寧に板書形式で実施されました。

目次

1	量子力学	6
1.1	量子力学の復習	6
1.2	セパラブル状態、エンタングル状態	7
1.3	エンタングルメント・エントロピー	9
2	場の量子論	11
2.1	レプリカ法 (Replica trick)	12
2.2	エンタングルメント・エントロピーの一般形	16
3	くりこみ群	20
3.1	Zamolodchikov の c 定理	21
3.2	エントロピー的 c 定理	22
3.3	エントロピー的 F 定理とエントロピー的 a 定理	24

はじめに

まずエンタングルメントは、古典論では発現しない概念であり、量子論において量子状態の重ね合わせの原理があるために発現する概念です。エンタングルメントと関連ある分野としては、主に量子情報理論、場の量子論、重力理論の3つが挙げられます(図1)。量子情報理論の分野で知られている強劣加法性といった量子的な非自明な不等式は重要であり、場の量子論におけるくりこみ群の思想に基づく「c定理」¹をエンタングルメント・エントロピーを用いて証明する際に役立てられます。

エンタングルメント・エントロピーは面積則に従うため、ブラックホール熱力学におけるブラックホール・エントロピーの性質との類似性により注目を集めました。結局上手くいかず一旦廃れました。しかしその後、物性理論物理学者の Cardy が共形不変な場の量子論におけるエンタングルメント・エントロピーを調べたこと [1][2] を契機に、くりこみ群やホログラフィーの思想と相まって場の量子論や重力理論の研究分野において再び注目されるようになりました。

エンタングルメントはホログラフィーを通して重力理論とも関連があり、2006年に提唱された笠・高柳公式 [3][4]²によって幾何学的な解釈が与えられました。くりこみ群の思想によって d 次元共形場理論から1次元高い $d+1$ 次元量子重力理論が創発され、CFT側で評価されたエンタングルメント・エントロピーが満たす量子的な不等式から、双対な AdS 側でのブラックホールに対して、ブラックホールにならない最大の物質質量に対する制限を予言することも議論されています。他にもエンタングルメントに関する応用はたくさんあります。

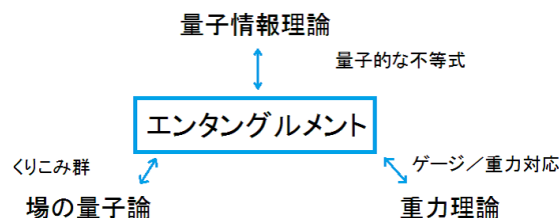


図 1: エンタングルメントと関連ある分野

本講義録は以下のような3部構成となっています。1. まず量子力学における多体系のエンタングルメントの定義と簡単な例を紹介します。2. つぎに経路積分形式での場の量子論におけるレプリカ法を用いたエンタングルメント・エントロピーの計算方法を説明します。3. 最後に量子的な不等式とそのくりこみ群への応用を概観します。講師である西岡辰磨氏に事前に十分ご準備していただけていたにもかかわらず、2017年度から施行さ

¹くりこみ群変換の下で不変な紫外固定点から赤外固定点へのくりこみ群の流れに従って単調減少し、固定点直上では理論の共形量子異常に起因する普遍的な定数に一致するような関数 C が存在するという定理です。

²ホログラフィック・エンタングルメント・エントロピーの時間を含めた共変的な取扱も調べられています [5]。より詳しくは提唱者の一人である高柳匡氏による日本語の解説書 [6] をご参照ください。

れた講義実施時間短縮措置の影響により、あいにく講義いただくには至らなかった、4. ホログラフィーによるエンタングルメント・エントロピー（笠・高柳公式）の内容は含まれません。

1 量子力学

1.1 量子力学の復習

本節では、まず量子力学における多体系のエンタングルメントを定義して簡単な例を紹介することを目標とします。

量子状態 $|\psi\rangle$ は、無限次元複素 Hilbert 空間 \mathcal{H} の射線であり、そのノルムは1に規格化しておきます。

$$|\psi\rangle \sim a|\psi\rangle \in \mathcal{H}, \quad a \in \mathbb{C} \quad (1.1)$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 \quad (1.2)$$

物理量 A は Hermite 演算子 (すなわち関係式 $A^\dagger = A$ を満たし³、したがってその固有値は実数です。) に対応しており、固有値方程式 $A|i\rangle = a_i|i\rangle$ を満たす正規直交基底 $\{|i\rangle\}$ を用いて、次のようにスペクトル分解できます。

$$A = \sum_i a_i |i\rangle\langle i|, \quad a_i \geq 0 \in \mathbb{R} \quad (1.3)$$

量子状態はユニタリーな無限次元表現ですが、演算子は量子状態に作用する有限次元表現の行列として表現することができますので、以下では簡単のため添え字 i が有限の場合を取り扱います⁴。物理量 A の期待値 $\langle A \rangle$ は、密度行列 (密度演算子) ρ

$$\rho := \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1 \quad (1.4)$$

を用いると (ただし p_i は量子状態 $|\psi_i\rangle$ を見出す確率)、次のように表されます。

$$\langle A \rangle = \sum_i p_i \langle\psi_i|A|\psi_i\rangle = \text{tr}(A\rho) \quad (1.5)$$

このように、密度行列 ρ を用いると、正規直交基底 $\{|i\rangle\}$ を具体的に選ばなくても形式的に期待値が定義できます。

純粋状態は、量子状態 $|\psi\rangle$ が確率1で現れるような量子状態:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \Leftrightarrow \rho^2 = \rho \quad (1.6)$$

で定義され、純粋状態以外の状態を混合状態と呼びます。

全 Hilbert 空間が2つの独立な部分系 A と B との直積

$$\mathcal{H}_{A \cup B} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \quad (1.7)$$

³Hermite 共役演算子 A^\dagger は、 $\langle\phi|A\psi\rangle = \langle A^\dagger\phi|\psi\rangle$ で定義されます。

⁴演算子の表現次元が無限次元であっても、有限次元の結果を自然に拡張したものが素朴に成り立つと期待できますが、実際には対角和の計算が難しかったり、ノルムが定まらなかったりする等、微妙です。

となっている合成系の量子状態 $|\psi\rangle_{AUB}$ は、それぞれの部分系の正規直交基底 $\{|i\rangle_A\}, \{|\mu\rangle_B\}$ のテンソル積を基底として次のように展開されます⁵。

$$|\psi\rangle_{AUB} = \sum_{i,\mu} c_{i\mu} |i\rangle_A \otimes |\mu\rangle_B, \quad i = 1, \dots, d_A, \mu = 1, \dots, d_B, \quad d_A \leq d_B \quad (1.8)$$

ここで、 d_A 及び d_B はそれぞれの部分系における表現次元を表します。一般に係数行列 $c_{i\mu}$ は長方形行列であり、 $d_A = d_B$ のときのみ正方形行列になります。

合成系に作用する演算子 M_{AUB} に対して Hilbert 空間 \mathcal{B} についての部分トレース

$$\text{tr}_B(M_{AUB}) = \sum_{\mu} \langle \mu | M_{AUB} | \mu \rangle_B \quad (1.9)$$

を取ると、これは \mathcal{H}_A 上の演算子となります。

部分トレースという操作を定義したので、ようやくエンタングルメントという概念を説明することができます。より詳細には、量子情報理論の標準的な教科書 [7] や J. Preskill 氏による公開中の講義ノート [8] を参照すると良いかもしれません。

1.2 セパラブル状態、エンタングル状態

合成系の量子状態が、(上手く基底の変換をして) 次のようにそれぞれの部分系におけるある1つの量子状態の直積で書けるとき

$$|\psi\rangle_{AUB} = |\phi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B \quad (1.10)$$

セパラブル状態と言います。そして、量子状態がセパラブル状態でないとき、エンタングル状態と言います。

簡単のため、例として二準位系を考えます。

$$\mathcal{H}_{A,B} = \{|\uparrow\rangle_{A,B}, |\downarrow\rangle_{A,B}\} \quad (1.11)$$

量子状態

$$|\psi^S\rangle_{AUB} = \frac{1}{2} [|\uparrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B + |\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B] \quad (1.12)$$

は、

$$|\psi^S\rangle_{AUB} = \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle_A + |\downarrow\rangle_A) \otimes (|\uparrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_B) \quad (1.13)$$

と書けるので、セパラブル状態と言えます。一方、量子状態

$$|\psi^E\rangle_{AUB} = \frac{1}{2} [|\uparrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B] \quad (1.14)$$

⁵独立な部分系が3つ以上存在する場合も、同様に定義できます。ただし Hilbert 空間が独立な部分系の直積で書けない場合はここでは深入りしないことにします。

は、セパラブル状態には成りえないので、エンタングル状態と言えます。

ここで合成系の量子状態 $|\psi\rangle_{AUB}$ を Schmidt 分解（特異値分解）⁶ すると、

$$|\psi\rangle_{AUB} = \sum_i \sqrt{p_i} |i\rangle_A \otimes |i\rangle_B, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1 \quad (1.15)$$

となり、したがってセパラブル状態とは、Schmidt 分解の固有値 p_i が、

$$p_i = (1, 0, \dots, 0) \quad (1.16)$$

のようになってる特別な量子状態だと言えます。繰り返しますが、セパラブル状態でない量子状態をエンタングル状態と呼びます。

以上を踏まえ、これからエンタングル状態を、合成系が純粋状態であったときの密度行列から部分トレースを取ることによって得られる制限された密度行列によって定義します。もし合成系が量子状態 $|\psi\rangle_{AUB}$ のみで記述される純粋状態だとすると、合成系の密度行列（密度演算子）は

$$\rho_{AUB} = |\psi\rangle_{AUB} \langle\psi|_{AUB} \quad (1.17)$$

と表され、この合成系の密度行列（密度演算子） ρ_{AUB} から系 B に関して部分トレースを取ると、

$$\rho_A := \text{tr}_B(\rho_{AUB}) = \sum_i \langle i|\psi\rangle_{AUB} \langle\psi|i\rangle_B \quad (1.18)$$

$$= \sum_i (\sqrt{p_i} |i\rangle_A) (\sqrt{p_i} \langle i|) \quad (1.19)$$

$$= \sum_i p_i |i\rangle_A \langle i| \quad (1.20)$$

のようになります。ここで、たとえ合成系が純粋状態であっても、系 B に関する部分トレースを取れば、系 A に関して混合状態になり得ることを強調しておきます。そして、合成系の量子状態 $|\psi\rangle_{AUB}$ を Schmidt 分解したときの固有値を $p_i = (1, 0, \dots, 0)$ と仮定すると（すなわちセパラブル状態を仮定すると）、系 A に制限された密度演算子 ρ_A は系 A における純粋状態になります。

したがって、この事実に基づき、次の命題が成り立ちます。

命題

$$|\psi\rangle_{AUB} : \text{セパラブル状態} \Leftrightarrow \rho_A : \text{純粋状態} \quad (1.21)$$

$$|\psi\rangle_{AUB} : \text{エンタングル状態} \Leftrightarrow \rho_A : \text{混合状態} \quad (1.22)$$

合成系は適切な部分系を用いれば必ず純粋状態に設定することができるので⁷、そのよう

⁶ d_A 行 d_B 列の長方形行列 $c_{i\mu}$ を d_A 行 d_A 列ユニタリ行列 U 及び d_B 行 d_B 列ユニタリ行列 V によって「対角化」する操作を意味します。証明は [7] を参照してください。

⁷素朴には Thermo Field Double のように部分系 A と同一の系を部分系 B に持ってくれば十分です。

に設定した上で、系 A に制限された密度演算子 ρ_A が純粋状態か混合状態かの違いによって、合成系の量子状態 $|\psi\rangle_{AUB}$ がセパラブル状態なのかエンタングル状態なのかを判定することができると言えます。

例えば、Minkowski 時空を合成系 $A \cup B$ として、その4分の1を覆う Rindler 時空を部分系 A とすると、Rindler 時空で一定の加速度で運動している観測者は加速度に比例した有効温度を知覚するので (Unruh 効果)、つまり合成系である Minkowski 時空では知覚されない熱輻射が部分系である Rindler 時空では知覚されていると言えるので、合成系が純粋状態であっても部分系は混合状態になっていることが分かります。

1.3 エンタングルメント・エントロピー

部分系 A におけるエンタングルメント・エントロピー S_A は、部分系 A に制限された密度行列 ρ_A による Von Neumann エントロピーとして定義されます。

$$S_A = -\text{tr}_A(\rho_A \log \rho_A) \quad (1.23)$$

ここで一つ重要な事実として、もし部分系 A の密度行列 ρ_A が逆温度 $\beta = 1/T^8$ のカノニカル分布であった場合、すなわち

$$\rho_A = \frac{1}{Z} e^{-\beta H_A}, \quad Z = \text{tr}_A(e^{-\beta H_A}) \quad (1.24)$$

の場合 (ただし H_A は部分系 A のハミルトニアン演算子であり、 Z は系 A の分配関数です。)、部分系 A におけるエンタングルメント・エントロピー S_A は、

$$S_A = \beta \langle H_A \rangle + \log Z = \beta(E - F), \quad E := \langle H_A \rangle, \quad F = -\frac{1}{\beta} \log Z \quad (1.25)$$

のように熱力学エントロピーに一致することを言及しておきます。

エンタングルメント・エントロピーが満たす重要な性質として、以下の4つの性質が挙げられます。

1. 合成系 $A \cup B$ が純粋状態 $\Rightarrow S_A = S_B$ ⁹
2. $|\psi\rangle_{AUB}$ がセパラブル状態 $\Rightarrow S_A = 0$
3. S_A の最大値は $p_i = 1/d_A$ のときで、その値は $S_A = \log d_A$ ¹⁰
4. 強劣加法性 (Strong SubAdditivity, SSA) : 3つの独立な部分系 A, B, C が存在するとき、次の非自明な不等式が成り立つ [Lieb-Ruskai 1973 [11]]

$$S_{AUBUC} + S_B \leq S_{AUB} + S_{BUC}$$

⁸ただし Boltzmann 定数 $k_B = 1$ としました。

⁹Schmidt 分解をすると、系 A と系 B とは対称に取れるので。

¹⁰熱力学極限を取ったエンタングルメント・エントロピーの値です。あくまで量子論を考えたい場合には、あまり重要では無い性質でしょう。

この内、4つ目の性質がエンタングルメント・エントロピーの最も重要な性質であり、今回の講義では特に3. くりこみ群への応用にて用いられます。ただし、場の量子論でのエンタングルメント・エントロピーの強劣加法性は未だ証明されておらず¹¹、したがって今回の講義ではあくまで場の量子論でもエンタングルメント・エントロピーの強劣加法性が成り立つと素朴に期待して、場の量子論における非自明な結果を予想しようという立場を取ります。強劣加法性は現在知られている量子的な不等式の中で最も強い主張となっており、この不等式を直感的に理解するには、例えば相対エントロピーを定義してその単調性として強劣加法性を捉えなおすと良いかもしれません¹²。

ここまでの量子力学におけるエンタングルメント・エントロピーの復習で、次節から場の量子論におけるエンタングルメント・エントロピーの計算手法を紹介します。

¹¹場の量子論は相互作用する無限個の調和振動子の量子力学系であり、つまり部分系が無限個あるようなものなので、本質的に発散の困難を抱えており、証明は難しいでしょう。もし証明できた方は、ぜひ論文にしてください。

¹²具体的に式で書けば、相対エントロピー $S(\rho||\sigma) := \text{tr}[\rho(\log \rho - \log \sigma)]$ は2つの密度行列 ρ, σ を相関を計る量であり、相対エントロピーに関しては、もしそれぞれの密度行列を部分系だけに制限した場合にこれら2つの密度行列の違いはより区別しにくくなることを意味する単調性 $S(\text{tr}'(\rho)||\text{tr}'(\sigma)) \leq S(\rho||\sigma)$ が成り立ちます。

2 場の量子論

本節では、経路積分形式での場の量子論におけるレプリカ法を用いたエンタングルメント・エントロピーの計算方法を紹介することを目標とします。

まず、場の量子論におけるエンタングルメント・エントロピーの計算方法は次の3通りが知られています。

- 実時間形式 (real time approach) : 場の量子論のハミルトニアンを用いて、量子力学における多体系のときの計算方法をそのまま適用する手法。¹³
- レプリカ法 (Euclidean path integral) : 理論を n 個複製し、最終的に $n \rightarrow 1$ 極限を取ることで元の理論の量を計算する方法
- ホログラフィック公式 (笠・高柳公式) : d 次元の場の量子論を、それに双対な $d+1$ 次元重力理論を用いて計算する手法。¹⁴

今回は2番目の計算手法を紹介します。

場の量子論では量子力学とは異なり、時空間の関数である場が演算子であり、したがって演算子が時間方向 t だけではなく空間方向 x にも依存しており、 $t=0$ の時刻一定面上での場 (演算子) を部分系 A と B に分割するという操作は、ちょうど場 (演算子) が住んでいる空間を領域 A と B に分割する操作に相当します。場の量子論においても、量子力学の場合と同様に、全体の合成系の密度行列 ρ は真空 (基底状態) のみから構成される純粋状態に設定されていると仮定します。

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| \quad (2.1)$$

これから場の量子論における部分系 A に関するエンタングルメント・エントロピー $S_A = -\text{tr}_A \rho_A \log \rho_A$ をレプリカ法で計算するために、まず $t=0$ の時刻一定面上で領域 A 上の2つの異なる場の演算子の固有状態 $|\phi_{0A}\rangle$ と $|\phi'_{0A}\rangle$ を指定¹⁵したときの、部分系 A に関する密度行列 $\rho_A = \text{tr}_B \rho$ の行列要素¹⁶

$$\langle\phi_{0A}|\rho_A|\phi'_{0A}\rangle \quad (2.2)$$

を経路積分表示します。そして理論を n 個の複製して、

$$\text{tr}_A(\rho_A^n) \quad (2.3)$$

という量¹⁷を評価します。最終的に、レプリカ法では、この量 $\text{tr}_A(\rho_A^n)$ に対して \log を取り n で微分した後 $n \rightarrow 1$ 極限を取って全体にマイナスを付けたものとして $S_A = -\text{tr}_A \rho_A \log \rho_A$ の表式が得られることを見ます。

¹³自由場理論のときは便利な計算手法として知られています。

¹⁴参考文献として、最近書かれた総合報告 (Rangamani-Takayanagi (2016) Review [9]) を挙げておきます。そして初期の総合報告 [10] も挙げておきます。

¹⁵ $|\phi_{0A}\rangle$ は $t = -\infty$ から $t = 0$ に近づいたときの境界での値 (終状態) であり、一方、 $|\phi'_{0A}\rangle$ は $t = +\infty$ から $t = 0$ に近づいたときの境界での値 (始状態) です。添え字 0 は $t = 0$ を意味しており、残りの添え字は空間方向に関して属している領域を区別するための添え字です。

¹⁶この行列要素は非自明です。

¹⁷部分ではなく全体トレースを取っているのでスカラー量 (複素数) であり、後で見るようにこれは n 重被覆空間 \mathcal{M}_n 上の分配関数 Z_n に比例する量です。

2.1 レプリカ法 (Replica trick)

まず領域 A 上の2つの異なる場の演算子の固有状態 $|\phi_{0A}\rangle$ と $|\phi'_{0A}\rangle$ を指定したときの、部分系 A に関する密度行列 $\rho_A = \text{tr}_B \rho$ の行列要素 $\langle \phi_{0A} | \rho_A | \phi_{0A} \rangle$ を評価することを考えます。行列要素 $\langle \phi_{0A} | \rho_A | \phi_{0A} \rangle$ を、部分系 B における完全系を用いて、場の理論の真空の量子状態を含む表式で書き直すと、次のようになります。

$$\langle \phi_{0A} | \rho_A | \phi'_{0A} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\phi_{0B}} \langle \phi_{0A} \phi_{0B} | \Psi \rangle \langle \Psi | \phi'_{0A} \phi_{0B} \rangle \quad (2.4)$$

ただし $Z = \langle \Psi | \psi \rangle$ は場の量子論の分配関数であり、規格化のために全体を場の量子論の分配関数で割っておく必要があります。量子力学のときと同様に、領域 A 上の場の演算子の固有状態 $|\phi_{0A}\rangle \in \mathcal{H}_A$ と領域 B 上の場の演算子の固有状態 $|\phi_{0B}\rangle \in \mathcal{H}_B$ とのテンソル積 $|\phi_{0A}\rangle \otimes |\phi_{0B}\rangle =: |\phi_{0A}\phi_{0B}\rangle$ が、部分系 A の Hilbert 空間 \mathcal{H}_A と部分系 B の Hilbert 空間 \mathcal{H}_B との直積空間に含まれる (すなわち $|\phi_{0A}\phi_{0B}\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ が成り立つ) と仮定します。

場の演算子 $\phi(\vec{x})$ は領域 A 上に値を持つか、それとも領域 B 上に値を持つかに応じて次のように場合分けされます。

$$\phi(\vec{x}) = \begin{cases} \phi_{0A}(\vec{x}), & \vec{x} \in A \\ \phi_{0B}(\vec{x}), & \vec{x} \in B \end{cases} \quad (2.5)$$

行列要素 $\langle \phi_{0A} | \rho_A | \phi'_{0A} \rangle$ の一部に含まれている $\langle \phi_{0A}\phi_{0B} | \Psi \rangle$ を求めるために、まず、無限過去 $t = -\infty$ での始状態が場の量子論の真空 $|\Psi\rangle$ であり、系のハミルトニアンによって時間発展した後に、時刻 $t = 0$ で終状態が演算子の固有状態であるような遷移振幅 $\langle \phi_0 | \Psi \rangle$ を Euclid 化された経路積分で表示することを考えます¹⁸。

$$\Psi[\phi_0] = \langle \phi_0 | \Psi \rangle = \int_{t=-\infty}^{t=0, \phi=\phi_0} [D\phi] e^{-\int d^d x \mathcal{L}[\phi]} \quad (2.6)$$

この式の意味することを図で表すと、図2のようになります。ただし無限過去 (ないし無限未来) での場の境界条件は物理的な境界条件を課しており、具体的な理論を与えて初めて定まるものなので、あらわに書かないことにします¹⁹。

上記の結果を用いると、行列要素 $\langle \phi_{0A} | \rho_A | \phi_{0A} \rangle$ (2.4) は、和を取っている場の演算子に課すべき境界条件は何でも良いので $\sum_{\phi_{0B}} \langle \phi_{0B} | \phi_{0B} \rangle$ を取ると、この式の意味することは、ちょうど図3に $\frac{1}{Z}$ を掛けたものになることが分かります²⁰。ここで、我々は部分系 A に関する密度行列 ρ_A の行列要素 $\langle \phi_{0A} | \rho_A | \phi_{0A} \rangle$ を n 乗して部分系 A に関するトレースを取ることを考えます。

$$\text{tr}_A(\rho_A^n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} \rho_{A i_1 i_2} \rho_{A i_2 i_3} \cdots \rho_{A i_n i_1} \quad (2.7)$$

¹⁸ $\langle \phi_0 | \Psi \rangle$ の複素共役を取ると、時刻 $t = 0$ での始状態が場の演算子の固有状態 $|\phi_0\rangle$ であり、系のハミルトニアンによって時間発展した後に、無限未来 $t = +\infty$ で終状態が場の理論の真空 $|\Psi\rangle$ であるような遷移振幅 $\langle \Psi | \phi_0 \rangle$ に帰着されます。したがって、行列要素 $\langle \phi_{0A} | \rho_A | \phi'_{0A} \rangle$ の評価のために後で必要になる $\langle \Psi | \phi'_{0A} \phi_{0B} \rangle$ は $\langle \phi_{0A} \phi_{0B} | \Psi \rangle$ の複素共役を取ることによって求められます。

¹⁹ 現時点で取り扱っている系は場の理論が真空のみの絶対零度の系であり、時間方向 t に周期的境界条件を課して有限温度系にすることを考えたいわけではありません。

²⁰ $t = 0$ を境に境界条件が異なるので、 0^+ と 0^- とを区別しています。

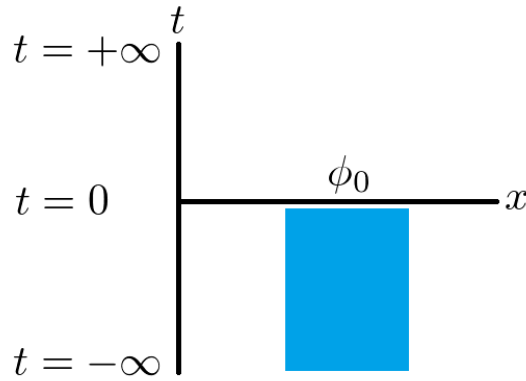
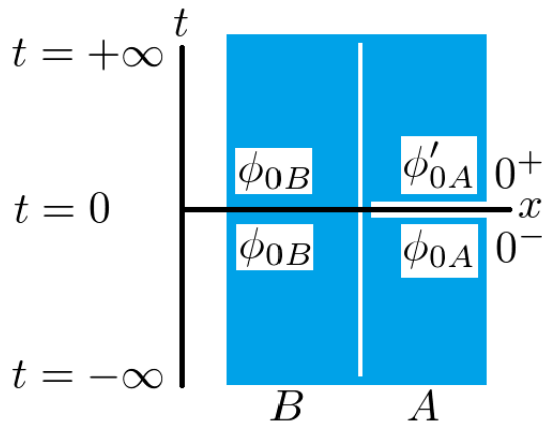


図 2: 無限過去の真空から時刻ゼロにおける場の演算子の状態への遷移振幅

図 3: 規格化定数を除く部分系 A に関する密度行列 ρ_A の行列要素 $\langle \phi_{0A} | \rho_A | \phi'_{0A} \rangle$

上記の量 $\text{tr}_A(\rho_A^n)$ は、 ρ_A が与えられれば原理的には計算できる量であり、我々はこの量を通して場の量子論のエンタングルメント・エントロピーを評価したいと考えています。

ここで、重要なモジュラー・ハミルトニアン (modular Hamiltonian) という概念を導入します。次式で定義される領域 A の時間推進演算子であるハミルトニアン H_A をモジュラー・ハミルトニアン²¹ と呼びます。

$$\rho_A = \frac{1}{Z} e^{-2\pi H_A} \quad (2.8)$$

そして、部分系 A に関する密度行列 ρ_A の行列要素 $\langle \phi_{0A} | \rho_A | \phi'_{0A} \rangle$ をモジュラー・ハミルトニアンの時間発展で書き直す²² と、次のようになります。

$$\langle \phi_{0A} | \rho_A | \phi'_{0A} \rangle = \frac{1}{Z} \langle \phi_{0A} | e^{-2\pi H_A} | \phi'_{0A} \rangle \quad (2.9)$$

この行列要素の意味することは、領域 A 上の場の演算子の状態の遷移振幅 (すなわち始状態 $|\phi'_{0A}\rangle$ から終状態 $\langle \phi_{0A}|$ まで、モジュラー・ハミルトニアン H_A によって $\tau = 2\pi$ だけ時間発展したもの) であり、ちょうど図 4 に $\frac{1}{Z}$ を掛けたものになります。なお図 4 にお

²¹密度行列 ρ_A が Hermite 演算子なので、 H_A の Hermite 性は保障されています。

²²虚時間 τ (これはモジュラー時間と呼ばれます) を周期 2π の角度方向と同一視できるために、モジュラー・ハミルトニアンの前の係数を $\tau = 2\pi$ と決めました。

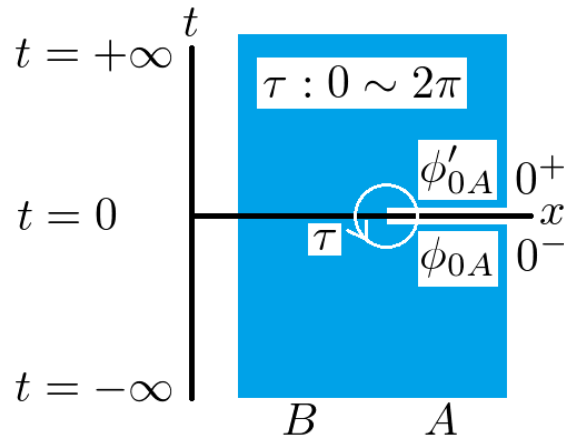


図 4: 規格化定数を除く部分系 A に関する密度行列 ρ_A の行列要素 $\langle \phi_{0A} | \rho_A | \phi'_{0A} \rangle$ (モジュラー・ハミルトニアンによる時間発展)

けるモジュラー時刻 τ 一定面²³は、 $t = 0$ での領域 A と B との境界を中心として放射状に角度 0 から 2π まで描くことができます²⁴。

上記の結果を踏まえ、部分系 A に制限された密度行列 ρ_A の n 乗のトレースを取った量は、次のようになります。

$$\mathrm{tr}_A(\rho_A^n) = \frac{1}{Z^n} \mathrm{tr}_A(e^{-2\pi n H_A}) = \frac{Z_n}{Z^n}, \quad Z_n := \mathrm{tr}_A(e^{-2\pi n H_A}) \quad (2.10)$$

ここで、モジュラー時間 τ 方向の周期が、 $0 \sim \pi$ から $0 \sim 2\pi n$ になっていることに注意してください。 Z_n は n 重被覆空間 \mathcal{M}_n 上の分配関数であり²⁵、 τ 方向が周期的なので n 重被覆空間は円筒上に写像できます (例えば $n = 3$ の場合は、図 5 のようになります)。

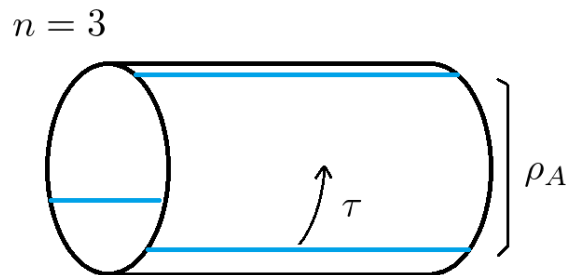


図 5: n 重被覆空間上での分配関数 (モジュラー・ハミルトニアンによる周期 $0 \sim 2\pi n$ の時間発展)

以上より、場の量子論における部分系 A に制限された密度行列 ρ_A に関するエンタングルメント・エントロピー S_A は、次のようにして求めることができます。

²³モジュラー時間 τ と時間座標 t では時刻一定面の取り方が異なりますので、ご注意ください。

²⁴極座標系では τ 方向は角度方向そのものなので、今の場合、角度方向の回転の生成子がモジュラー・ハミルトニアン H_A になります。式で書けば、モジュラー・ハミルトニアンは $H_A = \int_{x^1 > 0} d^{d-1} x^1 T_{00}$ であり、

²⁵逆温度 $\beta = 2\pi n$ の統計モデルの分配関数とも言えます。ただし全体系は真空 (基底状態) のみからなる純粋状態なので、場の量子論としては真空の分配関数を計算していることに相当します。

場の量子論におけるエンタングルメント・エントロピー

$$S_A = -\lim_{n \rightarrow 1} \partial_n \log[\text{tr}_A(\rho_A^n)] \quad (2.11)$$

$$= -\lim_{n \rightarrow 1} (\partial_n - 1) \log Z_n \quad (2.12)$$

1行目の表式が前節で紹介した定義式 $S_A = -\text{tr}_A \rho_A \log \rho_A$ と一致することを確認するためには、密度行列 ρ_A の規格化条件 $\text{tr}_A(\rho_A) = 1$ を用いる必要があります。ただし、 n は一般に任意の変数として扱います²⁶。 n 重被覆空間 \mathcal{M}_n は領域 A の境界（つまり ∂A ）であり、これは表面（surface） Σ でもあるので $\mathcal{M}_n = \Sigma = \partial A$ と書くことにして、モジュラー時間方向に関する境界条件 $0 \sim 2\pi n$ を課すことによって Σ は特異面になってしまいます²⁷。

ここで一つ具体例として、2次元自由実スカラー場の量子論の例を紹介します。2次元の質量 m を持つ自由実スカラー場の作用は、

$$I[\phi] = \frac{1}{2} \int d^2x [(\partial_\mu \phi)^2 + m^2 \phi^2] \quad (2.13)$$

であり、この理論における n 重被覆空間上での Euclid 化された経路積分²⁸ は、自由場理論なので 1-loop の Gauss 積分が厳密に実行できて

$$Z_n = \int_{\mathcal{M}_n} [\mathcal{D}\phi] e^{-I[\phi]} \quad (2.14)$$

$$= \det^{-\frac{1}{2}}(\square - m^2) \quad (2.15)$$

のようになります。さらにこの対数を取って、公式 $\log \det A = \text{tr} \log A$ を用いると、

$$\log Z_n = -\frac{1}{2} \text{tr} \log(\square - m^2) \quad (2.16)$$

となります。“Laplace” 演算子 $(\square - m^2)$ の固有関数 $\phi_{k,\ell}(r, \theta)$ の固有値 $\lambda_{k,\ell}$ の対角和を取りたいので、次の固有値方程式

$$(\square - m^2)\phi_{k,\ell}(r, \theta) = \lambda_{k,\ell}\phi_{k,\ell}(r, \theta) \quad (2.17)$$

を解くことを考えます。そこで2次元極座標における角度方向である θ 方向に関して Fourier 変換して解を求めると、

$$\phi_{k,\ell}(r, \theta) = f_{k\ell}(r) e^{i\frac{\ell}{n}\theta} \quad \ell \in \mathbb{Z} \quad (2.18)$$

²⁶次元正則化のときの時空次元 d と同様な扱いです。結局 $n \rightarrow 1$ に興味があるので、実用上は問題ありませんが、 $n \rightarrow \infty$ での振る舞いを適切に定めれば n への解析接続は一意に決まると考えられています (Casini-Huerta (2009) Review [12])。

²⁷もし境界条件 $0 \sim 2\pi$ ならば、特異性は現れません。

²⁸つまり2次元極座標 (r, θ) を取ったときの角度方向 θ に対して $\theta \sim \theta + 2\pi n$ という周期境界条件を課した上で経路積分を実行することを考えます。このような周期境界条件の下ではちょうど原点が特異点になっています。

となり、この時点で n 重被覆空間特有の n 依存性(角度方向 θ に関する周期境界条件 $0 \sim 2\pi n$ の影響)が現れました。いつものように無限遠での境界条件は、物理的に妥当な境界条件を課すことにして、“Laplace”演算子の固有関数としてまともな解を採用しました。

このように、レプリカ法を用れば、場の量子論におけるエンタングルメント・エントロピーは原理的に計算できることを強調しておきます。

2.2 エンタングルメント・エントロピーの一般形

今から、 d 次元の Euclid 化された時空間上での場の量子論における部分系 A に関するエンタングルメント・エントロピー S_A の一般形を紹介します²⁹。

時刻一定面上における部分系 A と B との境界 Σ は、 d 次元空間における余次元2の超曲面(つまり $d-2$ 次元超曲面)であり、これを entangling surface と呼ぶ人もいます(図6)。

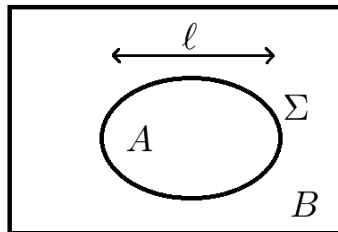


図 6: 部分系 A と B とのその境界 Σ

d 次元の Euclid 化された時空間上での場の量子論における部分系 A に関するエンタングルメント・エントロピー S_A は基本的に紫外発散している量であり³⁰、紫外切断パラメータを ϵ ³¹、部分系 A の典型的な長さを ℓ として、entangling surface Σ が余次元2の $d-2$ 次元超曲面であることから、一般的に次のように書けることが知られています³²。

$$S_A = \frac{C_{d-2}}{\epsilon^{d-2}} + \frac{C_{d-4}}{\epsilon^{d-4}} + \dots \quad (2.19)$$

$$+ \begin{cases} \frac{C_2}{\epsilon^2} + C_0 \log(\ell/\epsilon) + \text{定数} & d: \text{偶} \\ \frac{C_1}{\epsilon} + (-1)^{\frac{d-1}{2}} F & d: \text{奇} \end{cases} \quad (2.20)$$

このように、時空間の次元 d が偶数のときと奇数のときとで発散項の振る舞いが異なります。

²⁹本小節より、講義残り時間の都合上、証明している時間が取れそうになかったという事情があり、重要な結果・事実と道具立てから先に紹介されています。

³⁰特にくりこみはしておらず、発散していて当たり前な量です。ただし、2つの量子状態(例えば真空状態と励起状態等)におけるエンタングルメント・エントロピーの差は有限であり、紫外切断に依らない場の量子論的に意味のある物理量として機能します。

³¹例えば格子理論の場合、格子間隔に相当します。

³²ただし、場の量子論において、Lorentz 対称性とユニタリー性が成り立つことを仮定しています。

この場の量子論におけるエンタングルメント・エントロピーの一般形が示唆する重要な性質を見ていきます。まず、余次元2の超曲面に起因する共通のベキ則を示している係数 C_{d-2} は、エンタングルメント・エントロピーの面積則 (area law)

$$C_{d-2} \propto \text{vol}(\Sigma) \quad (2.21)$$

を表しています³³。

次に、偶数次元において、紫外切断に対してスケール変換 $\epsilon \rightarrow \lambda\epsilon$ を施すと、 $\log \epsilon$ の項から定数項 ($\log \lambda$) が現れるため、定数項は普遍的ではなく、あくまで ϵ^0 の項である $\log \epsilon$ の前の係数が紫外切断に依らない普遍的な物理的に意味のある量であることが読み取れます。一方、奇数次元においては、定数項 F が紫外切断に依らずに普遍的な意味のある定数であることが分かります。このように、係数 C_0 と F は紫外切断に依らない普遍的な量 (universal な項) であり、場の量子論におけるエンタングルメント・エントロピーにとって最も重要な意味のある定数だと言えます。

universal な項は

- d : 偶 $C_0 \subset C_0 \log\left(\frac{\ell}{\epsilon}\right)$
- d : 奇 $F \subset (-1)^{\frac{d-1}{2}} F$

であり、偶数次元では共形量子異常が存在するため、もし理論が共形不変性を持つ場の量子論 (いわゆる共形場理論) ならば、 C_0 は理論の「中心電荷」³⁴ と関係しています。一方、奇数次元では (共形量子異常は存在せず)、もし理論が共形不変性を持つ場の量子論であり、かつ余次元2の超曲面 Σ が $d-2$ 次元球面 S^{d-2} であるならば (つまり $\Sigma = S^{d-2}$)、 $F = (-1)^{\frac{d-1}{2}} \log Z[S^d]$ が成り立ちます³⁵。

初学者にとっては唐突ですが、共形不変性な場の理論のエネルギー・運動量テンソルはトレース・レスです。

$$T_\mu{}^\mu = 0 \quad (2.22)$$

場の量子論では、その期待値を取って経路積分を実行する必要があります。

$$\langle T_\mu{}^\mu \rangle \stackrel{?}{=} 0 \quad (2.23)$$

しかし場の量子論では発散があるため、くりこみ (renormalization) や正則化 (regularization) をして発散を除去する必要がありますが、一般に共形不変性を保ったまま正則化することはできません (つまり正則化と共形対称性を保つことは両立しません)³⁶。

³³ただし係数値そのものは、あまり重要ではありません。

³⁴本来「中心電荷」という名称は2次元共形場理論において適当な用語であり、慣習として2次元以外でも共形量子異常項と関係している普遍的な定数を「中心電荷」と呼んでいます。

³⁵これは F 関数と呼ばれ、3次元の場合、関数 F がくりこみ群の流れに従って単調減少し、くりこみ群の固定点で

³⁶一般に、古典的な対称性 (保存則) が量子論で破れてしまう現象を量子異常 (anomaly) と言いますが、量子論で共形対称性が破れること、すなわちエネルギー・運動量テンソルのトレースがゼロでない値を持つことを、共形量子異常ないしトレース・アノマリーと呼びます。

偶数次元では、共形量子異常があり、

$$\langle T_\mu^\mu \rangle = \frac{(-1)^{\frac{d}{2}}}{2} A E_d - \sum_i B_i I_i \quad (2.24)$$

ここで、 E_d は Euler 密度、 I_i は Weyl 不変量³⁷、 A と B_i は「中心電荷」です。例えば2次元の場合、 $E_2 = \frac{1}{4\pi} \mathcal{R}$ であり、 \mathcal{R} は Ricci スカラーです。なお奇数次元には共形量子異常はありません。

これから2次元共形場理論の場合の具体例を見ていきます。2次元共形場理論におけるトレース・アノマリーは、

$$\langle T_\mu^\mu \rangle = \frac{c}{24\pi} \mathcal{R} \quad (2.25)$$

であり、 c は2次元共形場理論の中心電荷です。一方、領域 A を幅 R の線分とすると (図7の左)、エンタングルメント・エントロピー S_A は、

$$S_A = \frac{c}{3} \log \left(\frac{R}{\epsilon} \right) \quad (2.26)$$

であり、対数発散している項のみで表されます。因子 $\frac{1}{3}$ は規格化によって決めました。このように、エンタングルメント・エントロピーの普遍的な量である $C_0 = \frac{c}{3}$ は2次元共形場理論の中心電荷 c と関係しています³⁸。

3次元共形場理論では、領域 A を半径 R の円盤とすると (図7の右)、エンタングルメント・エントロピー S_A は

$$S_A = \alpha \frac{2\pi R}{\epsilon} - F \quad (2.27)$$

一番強い紫外発散は、余次元2の超曲面 Σ (すなわち領域 A の境界) の面積に比例しており (面正則)、今の場合 (3-2) 次元の円周 $2\pi R$ に比例するように定まります。3次元では普遍的な量である定数 F の前の符号は負です。

基本的に、エンタングルメント・エントロピー S_A から C_0 や F といった普遍的な量を上手く抽出することを考えたいわけです。

これまでで場の量子論におけるエンタングルメント・エントロピーの計算方法とその一般形を紹介しました。

次節からは本題である「 c 定理」³⁹ をエンタングルメント・エントロピーを用いて証明するアプローチを紹介します。一般論として、相互作用している場の量子論の有効自由度を定義することは難しい問題です。自由場の量子論では場の数そのものを自由度として勘定できますが、相互作用している場の量子論では有効自由度の定義に曖昧さがあります。例えば、紫外固定点では量子色力学による記述が適切で $SU(3)$ ゲージ理論の基本表現に属するクォークやグルーオンを基本的な自由度として取り扱うことが有効ですが、より低

³⁷時空の計量から作られる、位相不変量です。

³⁸ c は中心なのでハミルトニアンと可換な保存量であり、 c に比例しているエンタングルメント・エントロピーはユニタリー変換の下で不変なので、やはり保存量となっています。

³⁹2次元の場合、Zamolodchikov によって証明されました [13]。

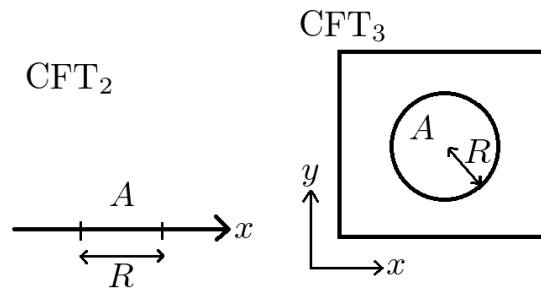


図 7: 2次元共形場理論と3次元共形場理論における部分系 A

エネルギー側の赤外固定点ではそれらよりもバリオンやメソンといったハドロンを基本的な自由度として取り扱った方が有効です。固定点上では有効自由度がはっきりしているでしょうが、それでは一体、紫外固定点から赤外固定点へくりこみ群の流れに従って流れているときの有効自由度はどのように記述されるのでしょうか。このような有効自由度の曖昧さ・性質を、数学的にはっきりさせているのが「 c 定理」です。

3 くりこみ群

本節では、エンタングルメント・エントロピーが満たす量子的な不等式を場の量理論におけるくりこみ群の思想へ応用して、エンタングルメント・エントロピーを用いて「 c 定理」が証明できるという重要な事実を紹介します。本節の内容が、本講義録の主題です。

質量 m の場 ϕ がある系を考えます。もし系のエネルギースケール μ が $\mu \gg m$ のならば、質量 m の場 ϕ は無質量場として扱って構わないと考えられます。そして、もし系のエネルギースケール μ が $\mu \ll m$ ならば、質量 m の場 ϕ は無視しても良いと考えられます。このように、より低エネルギーの赤外領域では自由度が少なくなっていることが期待されます (図8)。

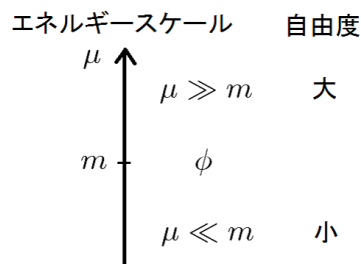


図 8: エネルギースケール μ と自由度との関係の概念図

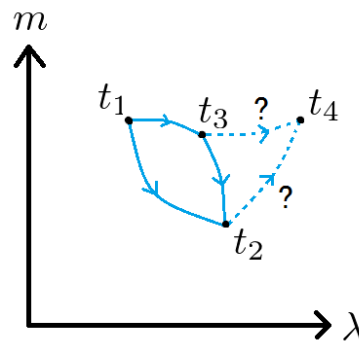
例えば $d = 4 - \epsilon$ 次元の ϕ^4 理論を考えます。

$$S[\phi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right] \quad (3.1)$$

理論を指定する relevant パラメータは質量 m と 4 点相互作用結合定数 λ の 2 つあり、それらの 2 つのパラメータを上手く調整すると、Wilson-Fisher 固定点と呼ばれるくりこみ群変換の下で不変な非自明な赤外固定点が存在することが知られています。 ϕ^4 理論における理論空間とくりこみ群の流れの概念図は図9のようになっています⁴⁰。くりこみ群のある固定点から別の固定点までの流れをくりこみ群の流れと言います。図9では、くりこみ群固定点 t_1 から t_2 までのくりこみ群の流れ⁴¹が存在することを表しています。そして t_1 から t_2 への流れていく中で、 t_3 という固定点を経由する場合もあることを表しています。そして、もし仮に t_4 という固定点の存在を知っていたとしても、 t_4 に流れていくようなくりこみ群の流れが存在か否かは非自明であり、一般にそのようなくりこみ群の流れの存在を示すことは難しい問題です。理論空間内の任意の点同士は、必ずしもくりこみ群の流れでつながっているとは限りません。

⁴⁰ここではあくまで概念的な説明をしています。一般に、理論空間は irrelevant な coupling をすべて含んでいて構いませんが、今は省略しています。

⁴¹図9から、このくりこみ群の流れは、紫外固定点から赤外固定点への流れであり、かつ赤外固定点では結合定数が紫外固定点よりも大きくなっていることが読み取れます。

図 9: ϕ^4 理論における理論空間とくりこみ群の流れの概念図

3.1 Zamolodchikov の c 定理

今から 2 次元の場の量子論における Zamolodchikov の c 定理を説明します。 c 定理の主張は、「以下の 3 つの性質を満たすような関数 $C(g_i, \mu)$ が存在する (ただし g_i は理論を指定する結合定数の組であり、 μ は系のエネルギースケールです。)」というものです。くりこみ群の固定点ではスケール不変までしか言えませんが、今は固定点が共形不変であるような場合を考えることにします⁴²。

性質 1

固定点上で中心電荷 c に一致する：

$$C(g_i, \mu)|_{\text{CFT}} = c \quad (3.2)$$

性質 2

エネルギースケールが下がれば単調減少する (単調減少性)：

$$\mu \frac{\partial C(g_i, \mu)}{\partial \mu} \geq 0 \quad (3.3)$$

性質 3

固定点上で結合定数を変化させても変わらない：

$$\left. \frac{\partial C(g_i, \mu)}{\partial g_i} \right|_{\text{CFT}} = 0 \quad (3.4)$$

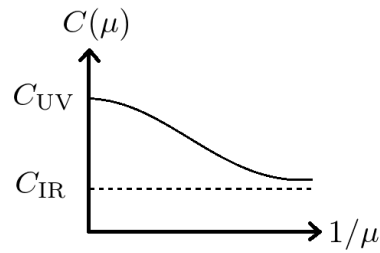
性質 1 と性質 2⁴³ が特に重要で、これらが成り立っていれば、 c 定理が成り立っていると考えられます⁴⁴。

C 関数の概念図は図 10 の通りです。このように、 $C_{\text{UV}} \geq C_{\text{IR}}$ という大小関係が成り立ち、エネルギースケールに依存した固定点上での有効自由度を計る適切な関数として C 関数という量を定義することができました。

⁴²2 次元でスケール不変性が必ず共形不変性を意味することは証明がありますが [14]、2 次元以外でスケール不変性が共形不変性に拡大することは非自明です。

⁴³エネルギースケール μ は長さの逆の次元を持つので、 C 関数の μ 微分が正であることが自由度の単調減少性を意味します。

⁴⁴次の小節で見るエンタングルメント・エントロピーで定義した「 C 関数」は必ずしも性質 3 を満たすわけではないことが知られています [15][16]。

図 10: C 関数の概念図

3.2 エントロピー的 c 定理

ここで、エンタングルメント・エントロピーを用いた Zamolodchikov とは別のアプローチによる c 定理の証明 [17] を紹介します。

2次元共形場理論において、部分系 A を長さ R の線分としたとき (図7の左)、部分系 A に関するエンタングルメント・エントロピーは (2.26) でしたが、これは理論が共形不変性を持つときのみ言えるので、

$$S(R)|_{\text{CFT}} = \frac{c}{3} \log \left(\frac{R}{\epsilon} \right) \quad (3.5)$$

と書けます。ここで c は 2次元共形場理論における中心電荷です。エネルギースケール μ は長さの逆、つまり $\mu \sim 1/R$ なので、エントロピー的 C 関数を、エネルギースケール μ ではなく長さ R の関数として次のように定義することにします。

エントロピー的 C 関数 (定義)

$$C_E(R) := 3R \frac{dS(R)}{dR} \quad (3.6)$$

このエントロピー的 C 関数 C_E が、先ほど紹介した Zamolodchikov の c 定理における C 関数の性質を満たしていることを示します。まず、性質 1 (固定点で C 関数は中心電荷と一致する) は、結果 (2.26) を定義式 (3.6) に代入すれば自明に満たしていること (つまり $C_E = c$) が分かります。次に、性質 2 (単調減少性) を証明するためには、次の不等式

$$\frac{dC_E(R)}{dR} \leq 0 \quad (3.7)$$

が成り立っていることを示せば良いわけですが⁴⁵、この不等式を示すためには、これまでに随所で重要だと強調してきたエンタングルメント・エントロピーが満たす量子的な不等式である強劣加法性を用います。エントロピー的 C 関数 C_E の単調減少性を示す際のセットアップ (図 11) は非自明ですが、証明の方針は次の通りで、

エントロピー的 C 関数の単調減少性を証明するときの方針

強劣加法性 + Lorentz 不変性 $\Rightarrow C_E$ は単調減少する

⁴⁵ $\mu \sim 1/R$ なので不等号の向きに注意してください。

これら 2つの前提条件（すなわち強劣加法性と Lorentz 不変性）が、エントロピー的 C 関数 C_E の単調減少性を証明する際に最も大切であったことは、ぜひ押さえておいてください。

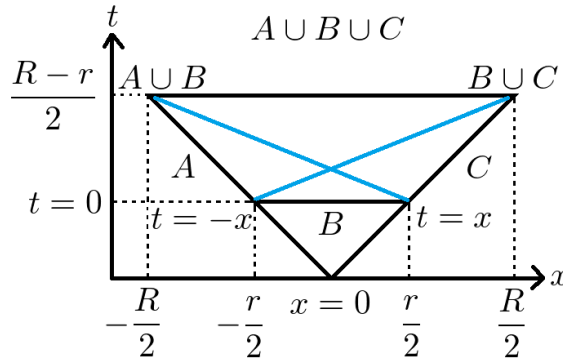


図 11: C 関数の概念図

図 11 のような光円錐内部に納まっている 3つの独立な部分系 A 、 B 、 C 及びそれらの合成系を考えます。まず、部分系 B は $t = 0$ の時刻一定面上にある幅 r の線分であり、 B から発信された情報がすべて届くような幅 R の別の時刻一定面（したがって $t = \frac{R-r}{2}$ の時刻一定面）を考えます。これら 2つの時刻一定面の中に存在する 2つの光円錐上の領域をそれぞれ A と C とすると、 $t = \frac{R-r}{2}$ の時刻一定面上にある幅 R の領域は部分系 A 、 B 、 C の合成系 $A \cup B \cup C$ であると言えます。

$t = 0$ の時刻一定面上にある幅 r の線分の正の端点と $t = \frac{R-r}{2}$ の時刻一定面上にある幅 R の線分の負の端点とを結ぶ領域（線分）は、部分系 A と B の情報をすべて含んでいるため、部分系 A と B との合成系 $A \cup B$ であると考えられます。同様に、 $t = 0$ の時刻一定面上にある幅 r の線分の負の端点と $t = \frac{R-r}{2}$ の時刻一定面上にある幅 R の線分の正の端点とを結ぶ領域（線分）は、部分系 B と C の情報をすべて含んでいるため、部分系 B と C との合成系 $B \cup C$ であると考えられます。これらの線分（図 11 における青色の線分）は時刻一定面上にはありませんが、Lorentz 変換によって時刻一定面上での線分として引き戻すことができます⁴⁶。

したがって、このような 3つの独立な部分系 A 、 B 、 C のセットアップの下で、強劣加法性の不等式を書き下すと、

$$S_{A \cup B \cup C} + S_B \leq S_{A \cup B} + S_{B \cup C} \tag{3.8}$$

$$S(R) + S(r) \leq 2S(\sqrt{rR}) \tag{3.9}$$

となるので、この不等式において $R = r + \delta$ 、 $\delta \ll r$ という状況を考えると、

$$S'(R) + RS''(R) \leq 0 \tag{3.10}$$

という不等式が得られます。この左辺はまさにエントロピー的 C 関数 C_E を長さ R で微分した式（つまり $\frac{C'_E}{3} = S'(R) + RS''(R)$ ）であるため、次の不等式が成り立ちます。

$$C'_E \leq 0 \tag{3.11}$$

⁴⁶2 点間の距離（線分の長さ） $\ell = \sqrt{-(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2}$ は Lorentz 不変な量です。

これは今回示したかったエントロピー的 C 関数 C_E の単調減少性を表す関係式そのものです。

3.3 エントロピー的 F 定理とエントロピー的 a 定理

まず、3次元では F 定理と呼ばれる定理が成り立ち、それは次のように定義される関数 F がくりこみ群の流れに従って単調減少するという主張です⁴⁷。

$$F := -\log Z[\mathbb{S}^3] \quad (3.12)$$

$$F_{UV} \geq F_{IR} \quad (3.13)$$

このような「 c 定理」の3次元類似は、 F 定理の他に、エネルギー運動量テンソルの2点相関関数の比例定数を中心電荷と解釈して、その中心電荷の値がくりこみ群の流れに従って単調減少するという予想もありましたが、その予想には反例が示され[21]、現在では上で定義したような F 関数による F 定理のみが「 c 定理」の3次元類似として生き残っています。

ここで、 F 定理の予想自体にエンタングルメント・エントロピーは直接の関係はありませんが、2次元の c 定理のときと同様に、エンタングルメント・エントロピーを用いて F 定理を証明できることを紹介します。まず、3次元共形場理論において、部分系 A を半径 R の円盤としたとき（図7の右）、部分系 A に関するエンタングルメント・エントロピーは(2.27)でしたが、これは理論が共形不変性を持つときのみ言えるので、

$$S_A|_{\text{CFT}} = \alpha \frac{2\pi R}{\epsilon} - F \quad (3.14)$$

と書けます。エントロピー的 F 定理の主張は、この普遍的な定数 F が、 F 定理の F 関数そのものであるというものです。

時間が迫っているので結果だけの紹介になりますが、エントロピー的 F 定理の証明では、以下のくりこまれたエンタングルメント・エントロピーを用います。

くりこまれたエンタングルメント・エントロピー（定義）

$$\mathcal{F}(R) := R \frac{dS(R)}{dR} - S(R) \quad (3.15)$$

2次元のときと同等、このくりこまれたエンタングルメント・エントロピー \mathcal{F} が性質1（固定点上で中心電荷に一致すること）を満たすことは自明であり、性質2（単調減少性）は、Lorentz 不変性と強劣加法性を「上手く」用いることによって（Lorentz ブーストした円盤を無限個用意して、強劣加法性を無限回用いることによって）、 \mathcal{F} が長さ R で微分すると負になっていること

$$\mathcal{F}' \leq 0 \quad (3.16)$$

⁴⁷証明や詳細は [18][19] を参照してください。

が Casini-Huerta によって示されました [20]。

c 定理の 4 次元類似である a 定理は、1988 年に Cardy によって予想され [22]、2011 年に Komargodski-Schwimmer によって固定点が共形不変性を持つ場合において証明され [23] エンタングルメント・エントロピーを用いた a 定理の証明も 2017 年に Casini-Teste-Torroba によってなされ [24]、このエントロピック a 定理の証明では真空がマルコフ性を満たすという条件が必要であることが示されました。

一般に 5 より高い次元の「 c 定理」は未だ証明がなされておらず、エンタングルメント・エントロピーを用いた証明が有用ではないかと期待されています。

おわりに

本講義録では、まず量子力学系におけるエンタングルメントを定義し、つぎに無限個の量子力学系からなる場の量子論におけるエンタングルメント・エントロピーのレプリカ法による計算方法を紹介し、最後にエンタングルメント・エントロピーのくりこみ群への応用としてエンタングルメント・エントロピーを用いた「 c 定理」の証明を概観しました。このエンタングルメント・エントロピーを用いた「 c 定理」の証明が本講義録の主題です。「 c 定理」は、くりこみ群の固定点上に存在する一般には非自明に相互作用している場の量子論から、くりこみ群変換の下でより低エネルギー領域にある別の非自明な場の量子論に対応する固定点に流れていくときに、系の有効自由度が単調減少して、かつ固定点上では理論の普遍的な「中心電荷」に一致するという主張であり、もともとはエンタングルメント・エントロピーとは関係無しに場の量子論の枠組みで 80 年代後半から定理の予想と証明が議論されてきました [13] [22] [23]。しかし 2000 年代に入ると、エンタングルメント・エントロピーを用いた c 定理の証明が試みられ、2017 年現在に至るまでに、2 次元の c 定理 [17]、3 次元の F 定理 [20]、そして 4 次元の a 定理 [24] いずれにおいてもエンタングルメント・エントロピーを用いた証明がなされています。エンタングルメント・エントロピーを用いた「 c 定理」の証明では、エンタングルメント・エントロピーが満たす重要な性質として知られている量子的な不等式である強劣加法性 [11]、そして相対論的な場の量子論の公理である Lorentz 不変性という 2 つの前提条件が非常に重要であり、もしかしましたらエンタングルメント・エントロピーを用いれば、未だ証明されていない 5 より高い次元の「 c 定理」を証明できるかもしれません。

謝辞

講師の西岡辰磨氏（東京大学）に対して、第63回原子核三者若手夏の学校にて3コマ計4時間半の講義をご快諾いただき、主として素粒子分野の修士1年次生が聴講して理解できることを目標として板書で丁寧に実施していただき、そして本講義録作成にあたりご尽力いただきましたこと心より深く感謝申し上げます。本講義開催にあたりお世話になりました2017年度の原子核三者若手役職校の担当者の皆様に感謝申し上げます。素粒子パート講義録作成校（弦理論）の当日の運営に有志でご協力いただきました金子智一氏（東北大学）、金子大毅氏（金沢大学）、そして富田克樹氏（金沢大学）の3名に感謝申し上げます。

第63回原子核三者若手夏の学校は、開催にあたり、基礎物理学研究所、素粒子論グループ、原子核談話会、及び理化学研究所仁科加速器センターの4団体から後援を受け、そして高エネルギー加速器研究機構素粒子原子核研究所、核物理研究センター、及び日本物理学会の3団体から協賛を受けました。

参考文献

- [1] P. Calabrese and J. L. Cardy, *J. Stat. Mech.* **0406**, P06002 (2004) [hep-th/0405152].
- [2] P. Calabrese and J. Cardy, *J. Phys. A* **42**, 504005 (2009) [arXiv:0905.4013 [cond-mat.stat-mech]].
- [3] S. Ryu and T. Takayanagi, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 181602 (2006) [hep-th/0603001].
- [4] S. Ryu and T. Takayanagi, *JHEP* **0608**, 045 (2006) [hep-th/0605073].
- [5] V. E. Hubeny, M. Rangamani and T. Takayanagi, *JHEP* **0707**, 062 (2007) [arXiv:0705.0016 [hep-th]].
- [6] 高柳匡著、『ホログラフィー原理と量子エンタングルメント』（SGCライブラリ106）、サイエンス社（2014）。
- [7] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, “*Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*” Cambridge University Press; 10 Anv. ver. (2010/12/9).
- [8] J. Preskill “Lecture Notes for Ph219/CS219: Quantum Information Chapter 2”
http://www.theory.caltech.edu/~preskill/ph219/chap2_15.pdf
(1997, last update 2015).
- [9] M. Rangamani and T. Takayanagi, *Lect. Notes Phys.* **931**, pp.1 (2017) [arXiv:1609.01287 [hep-th]].

-
- [10] T. Nishioka, S. Ryu and T. Takayanagi, *J. Phys. A* **42**, 504008 (2009) [arXiv:0905.0932 [hep-th]].
- [11] E. H. Lieb and M. B. Ruskai, *J. Math. Phys.* **14**, 1938 (1973).
- [12] H. Casini and M. Huerta, *J. Phys. A* **42**, 504007 (2009) [arXiv:0905.2562 [hep-th]].
- [13] A. B. Zamolodchikov, *JETP Lett.* **43**, 730 (1986) [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **43**, 565 (1986)].
- [14] J. Polchinski, *Nucl. Phys. B* **303**, 226 (1988).
- [15] I. R. Klebanov, T. Nishioka, S. S. Pufu and B. R. Safdi, *JHEP* **1210**, 058 (2012) [arXiv:1207.3360 [hep-th]].
- [16] T. Nishioka, *Phys. Rev. D* **90**, no. 4, 045006 (2014) [arXiv:1405.3650 [hep-th]].
- [17] H. Casini and M. Huerta, *Phys. Lett. B* **600**, 142 (2004) [hep-th/0405111].
- [18] D. L. Jafferis, I. R. Klebanov, S. S. Pufu and B. R. Safdi, *JHEP* **1106**, 102 (2011) [arXiv:1103.1181 [hep-th]].
- [19] I. R. Klebanov, S. S. Pufu and B. R. Safdi, *JHEP* **1110**, 038 (2011) [arXiv:1105.4598 [hep-th]].
- [20] H. Casini and M. Huerta, *Phys. Rev. D* **85**, 125016 (2012) [arXiv:1202.5650 [hep-th]].
- [21] T. Nishioka and K. Yonekura, *JHEP* **1305**, 165 (2013) [arXiv:1303.1522 [hep-th]].
- [22] J. L. Cardy, *Phys. Lett. B* **215**, 749 (1988).
- [23] Z. Komargodski and A. Schwimmer, *JHEP* **1112**, 099 (2011) [arXiv:1107.3987 [hep-th]].
- [24] H. Casini, E. Teste and G. Torroba, *Phys. Rev. Lett.* **118**, no. 26, 261602 (2017) [arXiv:1704.01870 [hep-th]].