

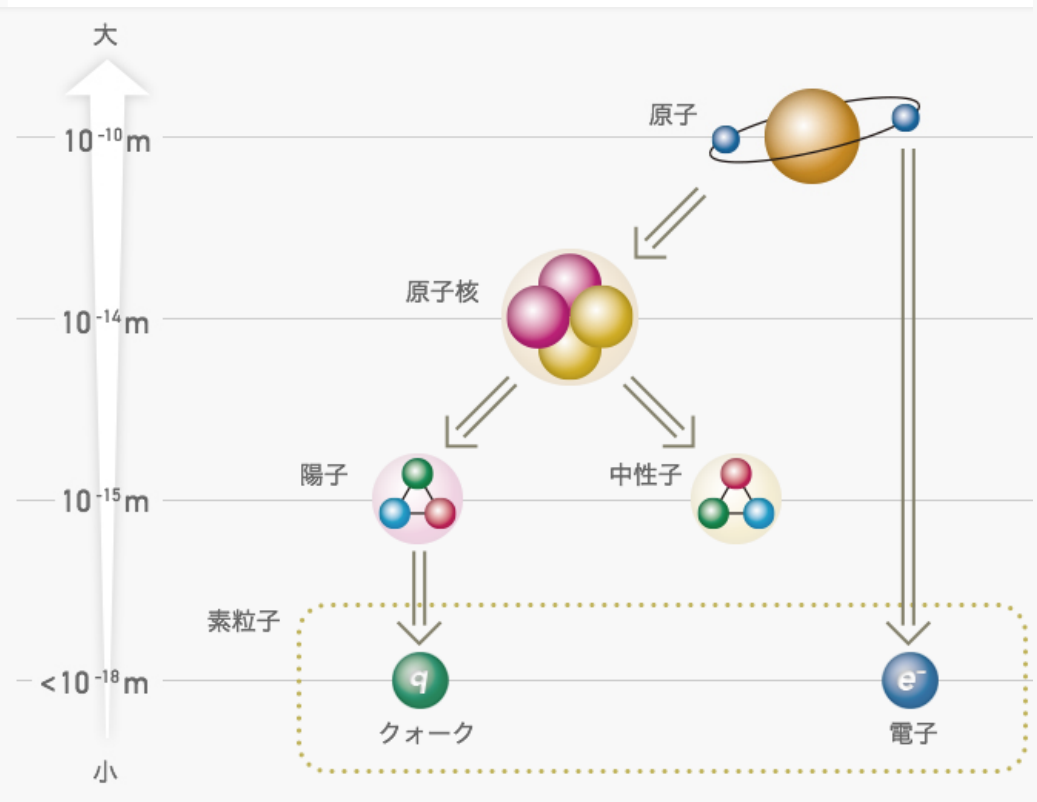


符号問題に対する複素化の方法

藤井宏次

物質の構成要素

www.icepp.s.u-tokyo.ac.jp



	第1世代	第2世代	第3世代
クォーク	アップ	チャーム	トップ
	ダウン	ストレンジ	ボトム
レプトン	eニュートリノ	μニュートリノ	τニュートリノ
	電子	ミューオン	タウ
強い力			弱い力
グルーオン			Wボゾン
			Zボゾン
			電磁力
			光子

ヒッグス粒子

QCD

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\text{tr}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \sum_f \bar{\psi}_f(i\not{\partial} + g\not{A} - m_f)\psi_f$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$$

• 強い相互作用の基礎理論

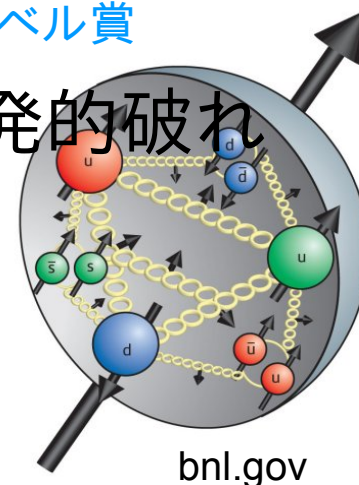
- 漸近的自由性 2004 ノーベル賞 2008 ノーベル賞
- カラーの閉じ込め・カイラル対称性の自発的破れ
- 核子構造・ハドロン相互作用

• QCD から核力、核力から原子核

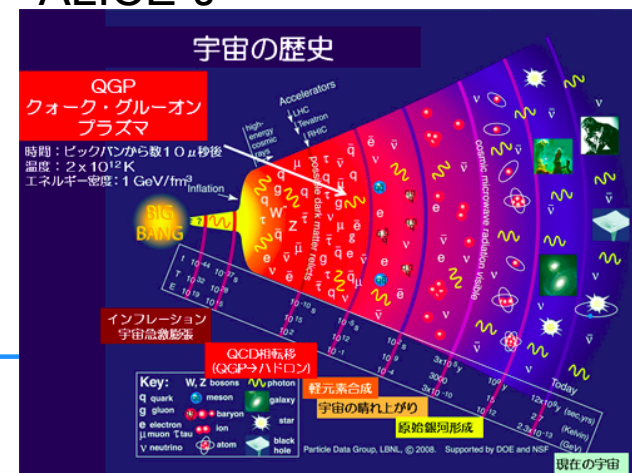
- 異なる階層をつなぐ “ 10^{-15} m”

• ハドロン多体系

- 中性子星、超新星、元素合成
- QCD 相転移、重イオン衝突



ALICE-J

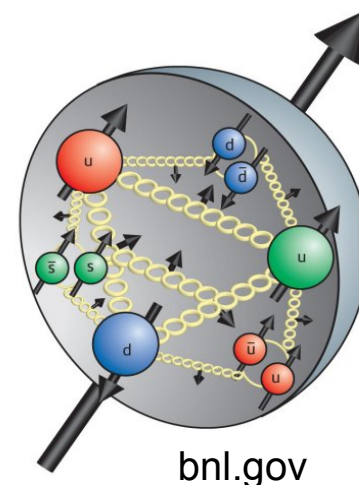


QCD

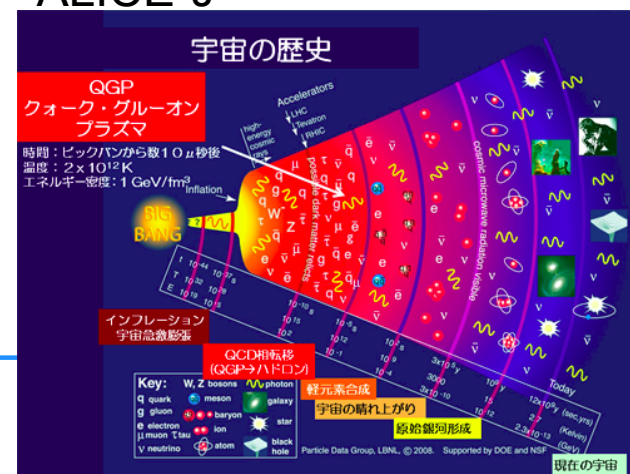
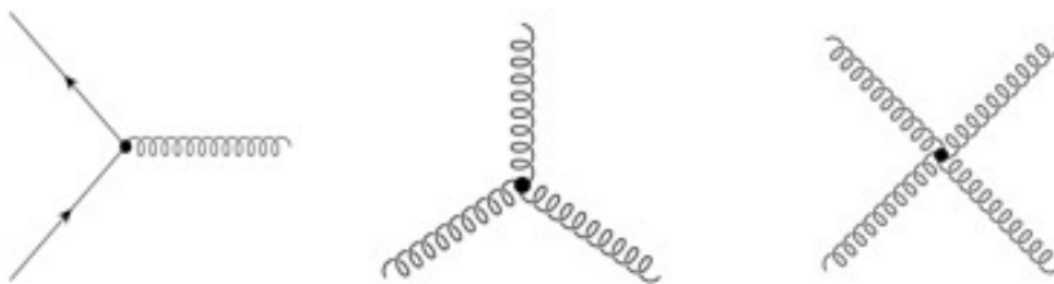
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\text{tr}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \sum_f \bar{\psi}_f(i\not{\partial} + g\not{A} - m_f)\psi_f$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$$

- 結合はクォークの種類に独立 (普遍)
 - u, d, s, c, b, t
- 短距離での漸近自由性
- 強結合: カラー閉込、 χ SSB



ALICE-J



講義計画

1. QCD 相図: 統計平均と符号問題 (1 h)
2. 複素ランジュバン方程式の方法 (2 h)
3. “Thimble” の方法 (2 h)
4. 展望 (?)

複素ランジュバン方程式の歴史（一部）

- 1981 Parisi-Wu : stochastic quantization
- 1983 Parisi : 1983 Klauder : complex Langevin
- 1987 Damgaard, Huffel, Phys. Rept. for review

- 多数の研究 —— 国内では、早大グループなど

- 2008 ~ 研究活動の再興
- 2008 Aarts-Stamatescu, $U(1)$, $SU(3)$ one-link model, Heavy-dense QCD
- 2009 Aarts, Relativistic Bose gas PRL
- 2010 Aarts, James, Seiler, Stamatescu, adaptive step size vs instabilities, XY model, HDQCD
- 2011 Aarts, James, Seiler, Stamatescu, criterion for correctness, Euro.Phys.J. C71, 1756
- 2013 Pawłowski, Zielinski, Thirring model, PRD87
- 2013 Seiler, Sexty, Stamatescu, gauge cooling, PLB723 (1211.3709),
- 2013 Sexty, PLB729, full QCD simulation (1307.7748)
- 2014 Aarts, Seiler, Sexty, Stamatescu, 1408.3770, hopping param exp. vs fullQCD
- 2013, 2014, Mollgaard, Splittorff, Chiral random matrix model
- 2014, Hayata, Yamamoto, Bose gas in rotation
- 2015, Makino, Suzuki, Takeda, 2D $SU(2)$ YM theory, 1503.00417
- 2015+, Nagata, Nishimura, Shimasaki+, Condition for correctness, etc.

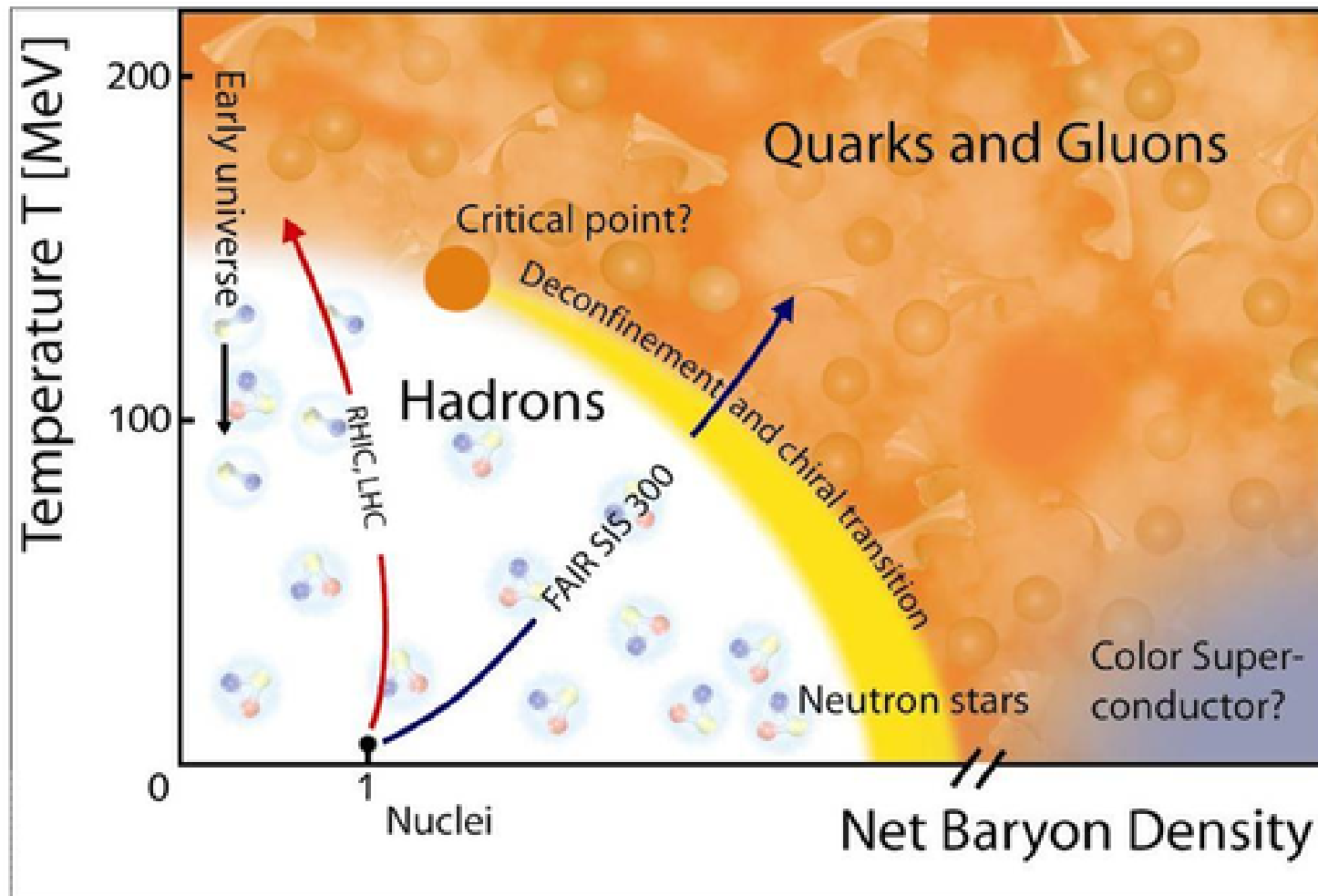
Lefschetz thimble 上の経路積分

- E. Witten, arXiv:1001.2933
- AuroraScience Collaboration,
 - formulation, PRD 86, 074506 (2012) [arXiv:1205.3996]
 - Langevin algorithm, PRD 88, 051501(R) (2013)
 - Metropolis, PRD 88, 051502(R) (2013)
 - Hubbard model, PRB 90, 025134 (2014)
- HF, Honda, Kato, Kikukawa, Komatsu, Sano, JHEP 1310.147
- Aarts et al., thimble and CLE, JHEP 1410.159
- Koike, Tanizaki, quantum tunneling
- Tanizaki, Odim $O(n)$ model, PRD91, 036002
- Kanazawa, Tanizaki, simple fermionic systems JHEP 1503.044
- Alexandru,Basar,Bedaque PRD 2016
- ...
- Fukuma, Umeda, PTEP 2017
- Mori, Kashiwa, Ohnishi, PLB 2017

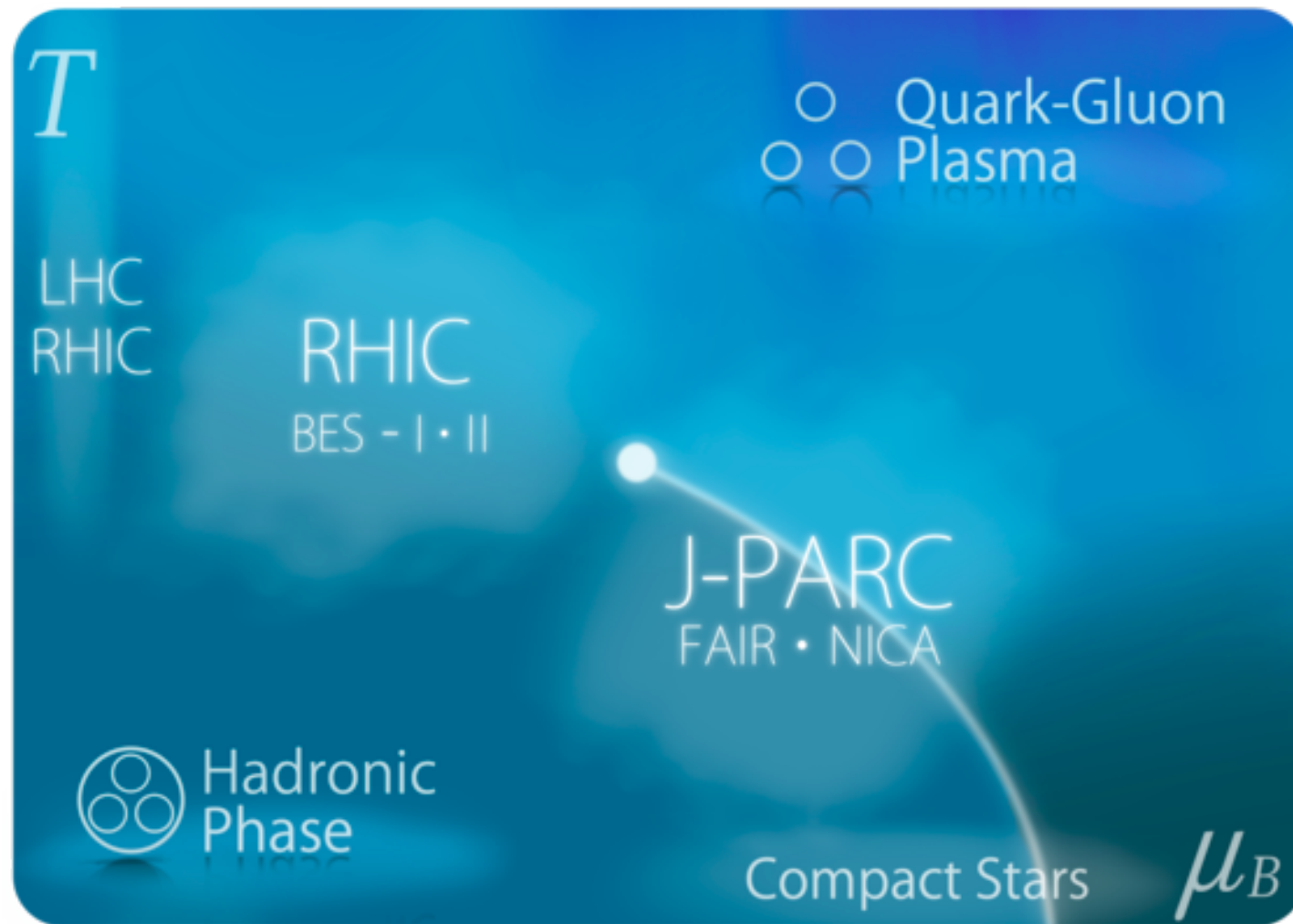
QCD

- ハドロン多体系（相構造、・・・）
- 重イオン衝突（非平衡時間発展）

QCD 相図 (GSI の模式図)



QCD 相図 (JPARC 版の模式図)



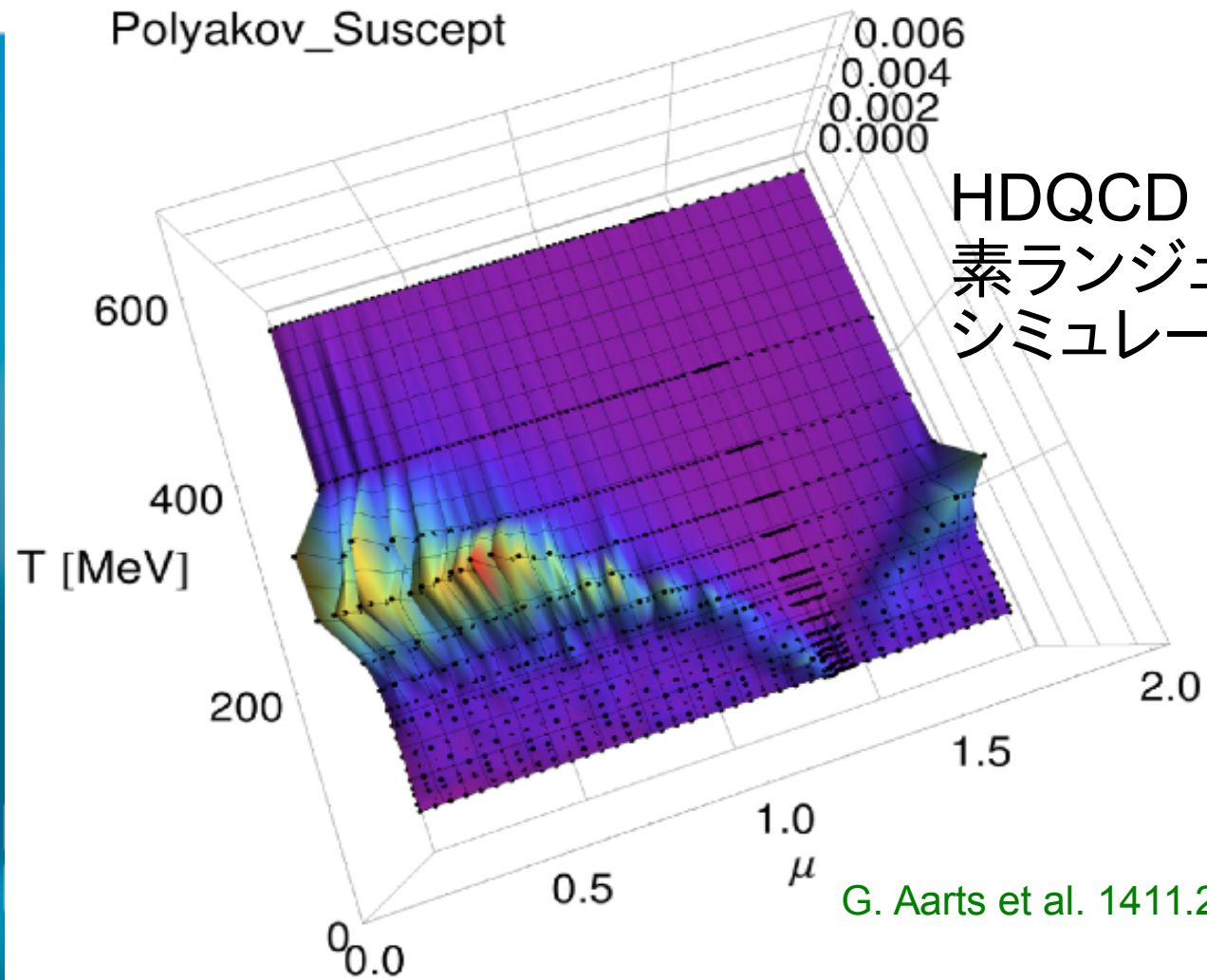
QCD 相図 (JPARC 版の模式図)

クロスオーバー:
格子 QCD



QCD 相図 (JPARC 版の模式図)

クロスオーバー:
格子 QCD



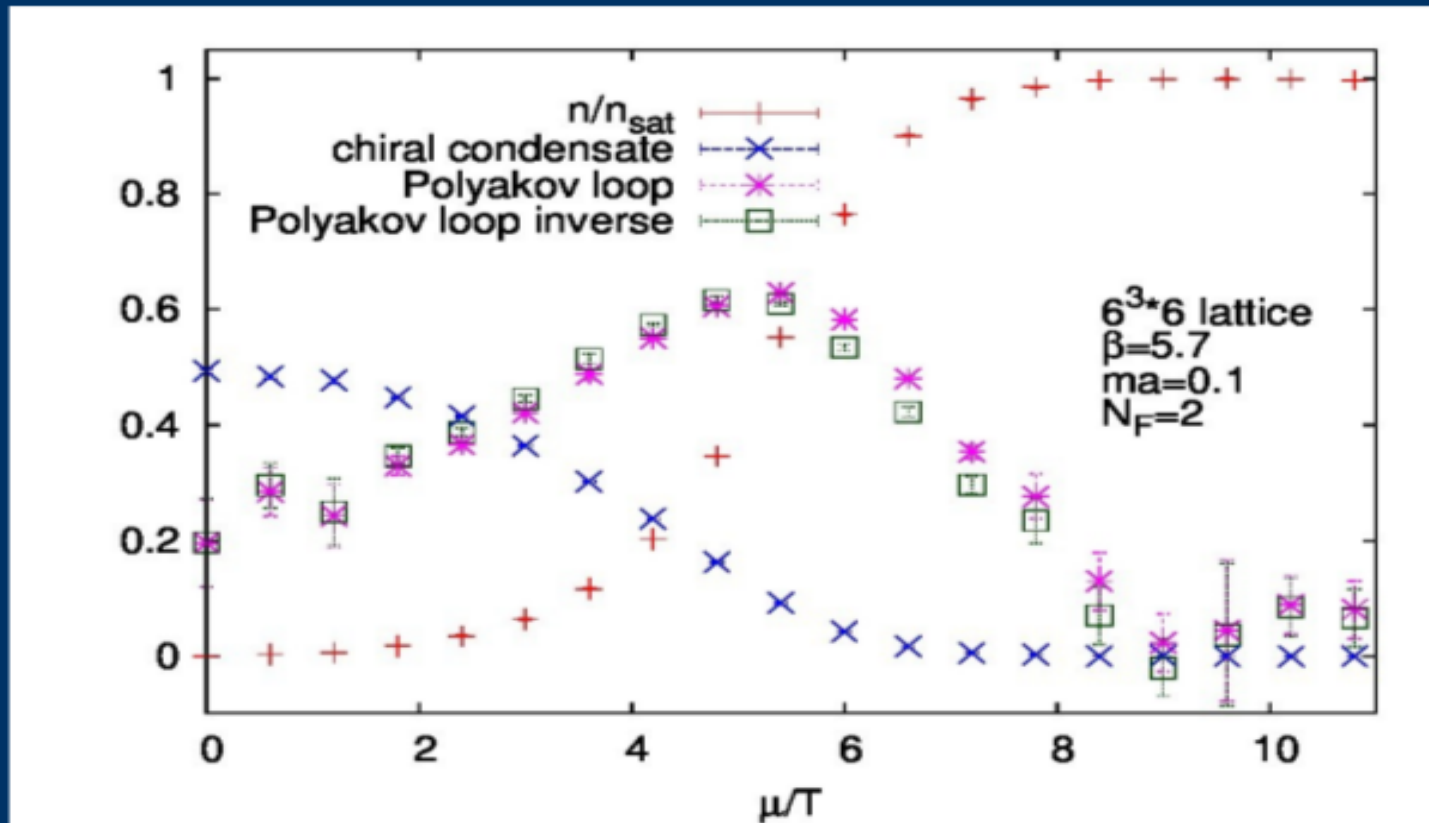
HDQCD の複
素ランジュバン
シミュレーション

G. Aarts et al. 1411.2632

Full QCD シミュレーション@ $\mu \neq 0$

CLE and full QCD with light quarks [Sexty (2014)]

Physically reasonable results



Non-holomorphic action
poles in the fermionic drift
Is it a problem for full QCD?

So far, it isn't:
Comparison with reweighting
Study of the spectrum
Hopping parameter expansion

QCD 相図; 統計平均と符号問題

- 多体系の物理
 - More is different – P.W. Anderson

統計力学とモンテカルロ (MC) 法

- 分配関数 $Z = \text{tr} e^{-\beta H} = \sum_{n,\alpha} e^{-\beta E_{n,\alpha}} > 0$

- 大自由度

例 N 個の2準位系の集団

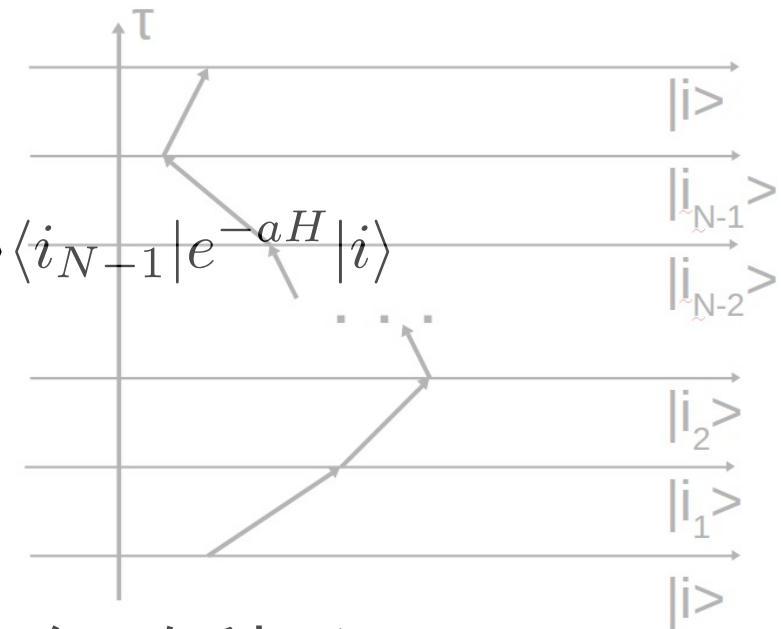
⇒ $2^N = e^{N \ln 2}$ 次元配位空間

⇒ 大きい N では、直接対角化が困難

統計力学とモンテカルロ法

- 分配関数 $Z = \text{tr} e^{-\beta H} = \sum_{n,\alpha} e^{-\beta E_{n,\alpha}} > 0$
- 完全系 $\{|i\rangle\}$

$$\begin{aligned}
 Z &= \text{tr}[e^{-\beta H}] = \langle i|(e^{-aH})^N|i\rangle \\
 &= \langle i|e^{-aH}|i_1\rangle\langle i_1|e^{-aH}|i_2\rangle\langle i_2|\cdots|i_{N-1}\rangle\langle i_{N-1}|e^{-aH}|i\rangle \\
 &\quad \dots \\
 &= \int \prod_i dx_i e^{-S_E[x]} = \sum_{\{x_i\}} p[x]
 \end{aligned}$$

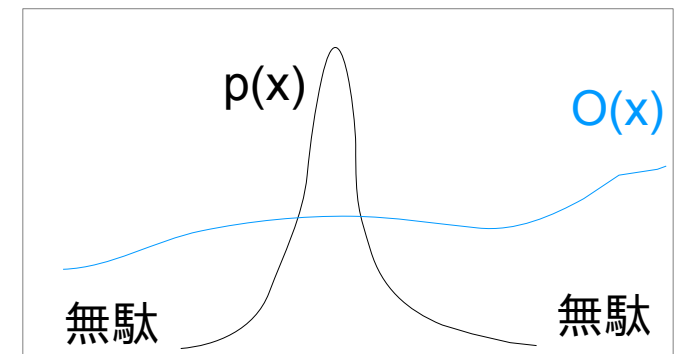


- 「経路」にわたる重み平均: 経路積分
- d次元量子論 = d+1次元古典統計力学

統計力学とモンテカルロ法

- 観測量

$$\langle O \rangle = Z^{-1} \int \prod_i dx_i O(x) e^{-S_E[x]} = Z^{-1} \sum_k O(x_k) p[x_k]$$

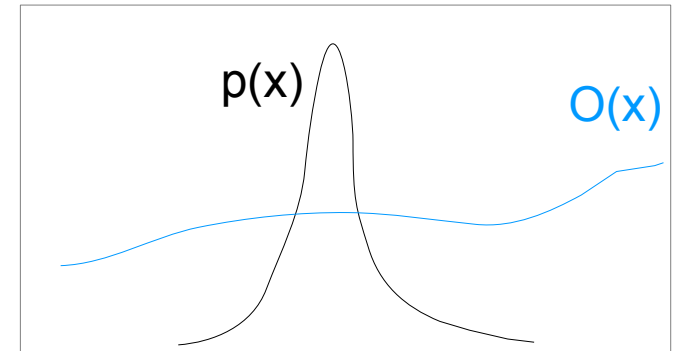


- モンテカルロ積分

- 一様なランダム標本サンプリングは極めて無駄
- 重点サンプリング: $p[x]$ に比例する確率で標本を生成・平均する

動的モンテカルロによる重点サンプリング

- 標本の出現頻度が、知りたい分布に収束する確率過程を作って、その標本でサンプルする
- 条件
 - エルゴード性: 有限ステップで任意の配位間を遷移
 - 詳細釣り合: $p(i)t_{i \rightarrow j} = p(j)t_{j \rightarrow i}$



- 例) 熱浴法 $t_{i \rightarrow j} = \frac{p(j)}{p(i) + p(j)}$

- 観測量 $\langle O \rangle = Z^{-1} \int \prod_i dx_i O(x) e^{-S_E[x]} = \frac{1}{N} \sum_k O(x_k)$
- 統計不確かさ = $1/\sqrt{(\# \text{ 標本 })}$

フェルミオンの問題

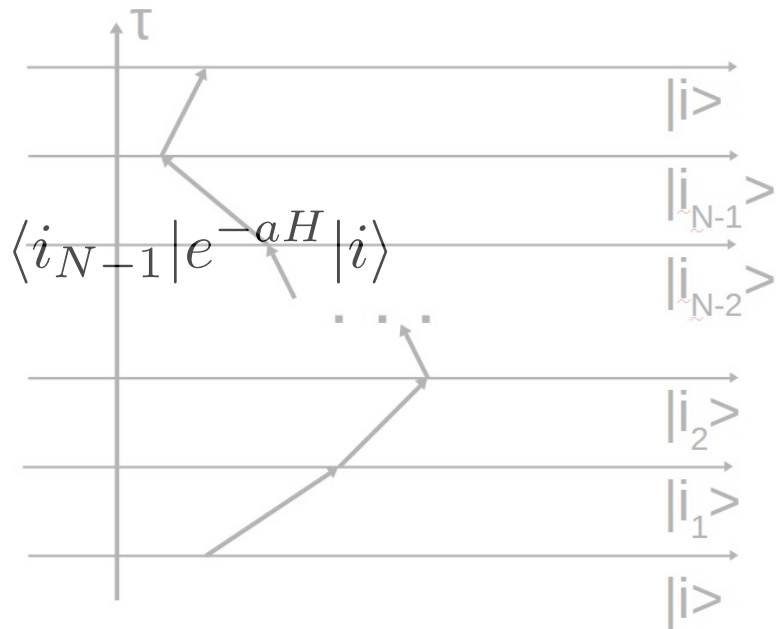
- パウリ原理により、 $p[x] < 0$ の配位がある
- $p[x]=+-$ がほぼ等頻度に生じると、不確さ増大
- MC サンプリングが無効

$$Z = \text{tr}[e^{-\beta H}] = \langle i | (e^{-aH})^N | i \rangle$$

$$= \langle i | e^{-aH} | i_1 \rangle \langle i_1 | e^{-aH} | i_2 \rangle \langle i_2 | \cdots | i_{N-1} \rangle \langle i_{N-1} | e^{-aH} | i \rangle$$

...

$$= \int \prod_i dx_i e^{-S_E[x]}$$



フェルミ粒子の集団の基底状態・熱平衡状態を求めることは、あらゆる分野で遭遇する問題である。物性では強相関電子系の問題がその典型であり、原子核や量子色力学(QCD)の分野でも重要となる。当然ながら厳密に解こうとすると、すぐに困難に直面する。たとえば、 N 個の格子点上を動くフェルミ粒子系の基底状態を求める問題は、 N の指数関数に比例する次元の行列の固有値問題となるため、たとえ計算機が10倍速くなっても計算可能な格子点はたかだか数個しか増えない。ゆえに、何らかの「賢い」計算手法が必要である。その1つが量子モンテカルロ法である。

量子モンテカルロ法は、波動関数の振幅を確率と解釈し、和を厳密に評価する代わりに確率過程に置き換えて重要な寄与のみを足し上げる手法である。これは多くの物理系で有効な手法で、うまくいけば大きな系の数値計算が可能となる。しかし、フェルミ粒子系では、確率と解釈すべき量(確率重み)が負となる問題がしばしば生じる。これを「負符号問題」という。負符号問題が生じて、確率重みが正および負になる頻度 p_+ , p_- を集計し、それぞれで物理量の期待値 A_+ , A_- を求めておけば、 $A = (A_+ p_+ - A_- p_-) / (p_+ - p_-)$ によって最終的な期待値 A を求めることができる。ところが、

格子点数 N が大きくなるにつれて、頻度 p_+ , p_- が拮抗するようになり、期待値の分子・分母がともに0に近づく。このとき、一定の精度で期待値を得るには、分母・分子を極めて高精度で求めなければならなくなり、計算時間が N の指数関数に比例するようになる。つまり、「元の本阿弥」である！

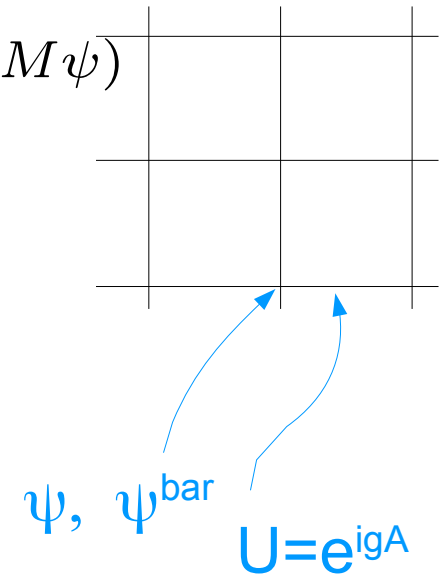
負符号問題は量子モンテカルロ法が確立した当初から知られている根深い問題である。しかし、不思議な(困った)ことに物理的におもしろい現象が期待されるモデルでは、たいてい負符号問題が生じる。どうにかしないといけない。まず、モデルに応じてアルゴリズムを改良し、確率が負になる頻度を減らす研究が地道に行われている。一方で、「なぜ数値計算が難しいのか？」を深く考察すると、新しい計算手法のヒントが得られる。最近になり、系全体にわたる「量子もつれ」が計算の困難さと深く関係していることがわかってきた。この知見をもとに、「テンソルネットワーク理論」とよばれる新しい数値計算手法が開発され、活発な研究が行われている。フェルミ粒子系の強力な数値計算手法はまだまだ必要とされており、斬新なアイデアによるブレークスルーが強く望まれている。

会誌編集委員会

物理学70の不思議(日本物理学会誌)

QCD 分配関数

$$Z = \text{tr} e^{-\beta(H - \mu N)} = \int DU D\bar{\psi} D\psi e^{-(S_B + \bar{\psi} M \psi)}$$
$$= \int DU e^{-S_B} [\det M(U)]^{N_f}$$



- Dirac 演算子

$$M(U) = \gamma_\mu D_\mu(U) + m + \gamma_4 \mu$$

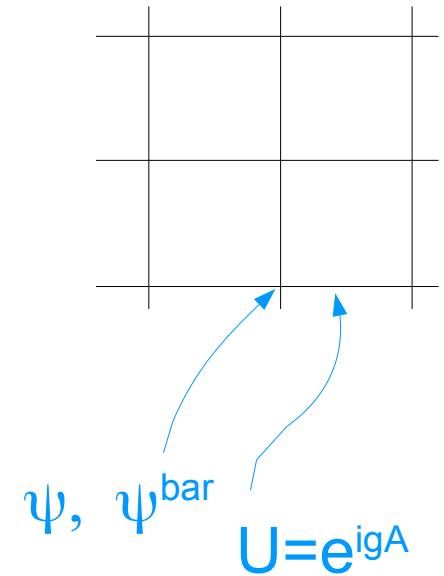
- 有限温度・ $\mu=0$: MC シミュレーション可能

$$e^{-S_B} [\det M(U)]^{N_f} \geq 0 \quad (N_f = \text{even})$$

QCD 分配関数

- 系統不確かさ
 - 熱力学極限: $L \rightarrow \infty$
 - 連続極限: $a \rightarrow 0$
 - 物理パラメタ: $m_q \rightarrow m_{\text{phys}}$
- 統計不確かさ $\propto 1/\sqrt{\text{標本数}}$
 - 計算機性能・アルゴリズムの進化

∴ QCD 非摂動計算の基本ツール



Lattice QCD @ $\mu \neq 0$

- フェルミオン行列式が複素数！

$$[\det M(U; \mu)]^* = \det M(U; -\mu) \in \mathbb{C}$$

- うまく逃れられないのか？
- 化学ポテンシャルは粒子・反粒子を区別
 - 荷電対称性(～複素共役)を破るのは必然

de Forcrand

Lattice QCD @ $\mu \neq 0$

- reweighting 法

- 別の重み関数 $v(x) \geq 0$ を用いて

$$\langle O \rangle = \frac{\int dx O(x) w(x)}{\int dx w(x)} = \frac{\int dx O(x) \frac{w(x)}{v(x)} v(x) / Z_v}{\int dx \frac{w(x)}{v(x)} v(x) / Z_v} = \frac{\langle O \frac{w}{v} \rangle}{\langle \frac{w}{v} \rangle}$$

- 例) $v = |w|$: 位相クエンチ

$$\left\langle \frac{w}{v} \right\rangle = \langle e^{i\phi} \rangle = \frac{Z_w}{Z_v} = e^{-\beta V \Delta f}$$

$$\text{stat.err.} \sim \frac{1}{\sqrt{\#\text{smpl}}} < \text{signal} \quad i.e., \#\text{smpl} > e^{+2\beta V \Delta f}$$

- 小さい系 OK; 低温・熱力学極限で急速に困難に...

アイソスピン化学ポテンシャルによる π 凝縮の問題もあり

Lattice QCD @ $\mu \neq 0$

- Taylor 展開 @ $\mu = 0$
 - コントロールされた近似

$$P(T, \mu)/T^4 = P(T, 0)/T^4 + \sum_{k=1} c_{2k}(T) (\mu/T)^{2k}$$

$\mu = 0$ で計算できる!

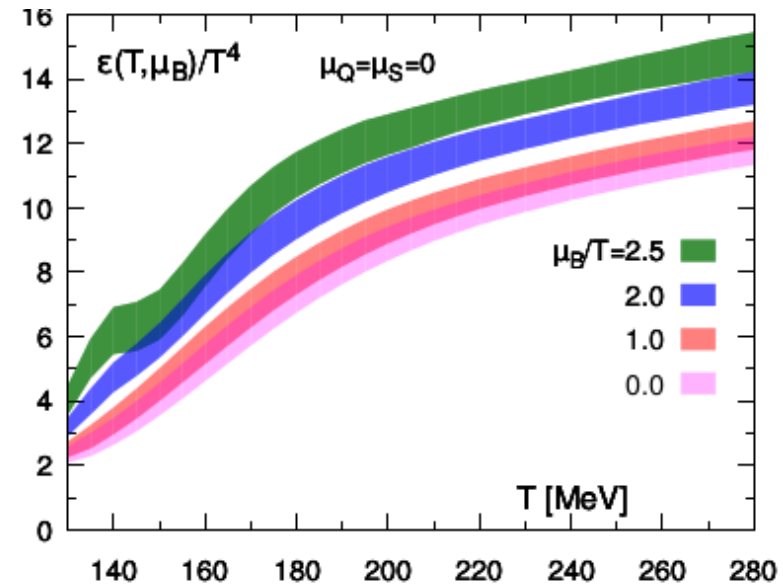
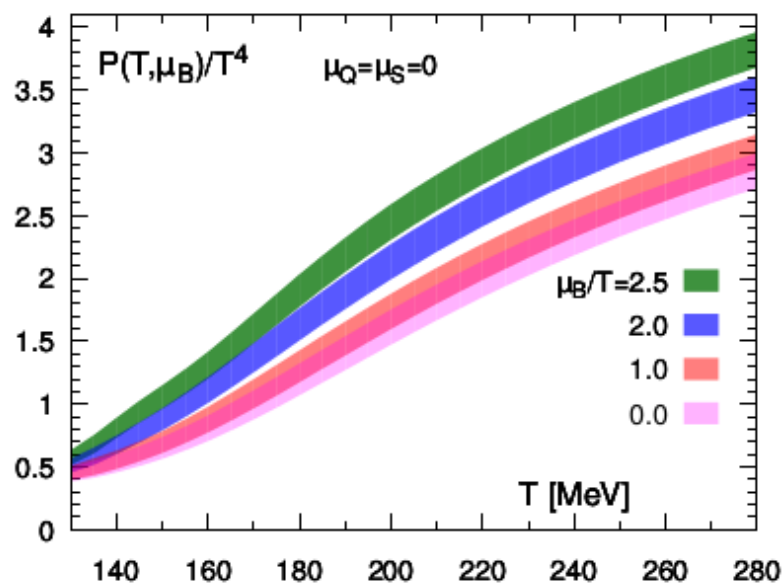


Figure 7. (Left) The total pressure in (2+1)-flavor QCD in $\mathcal{O}(\hat{\mu}_B^6)$ for several values of μ_B/T . (Right) The total energy density in (2+1)-flavor QCD in $\mathcal{O}(\hat{\mu}_B^6)$ for several values of μ_B/T . The results for $\hat{\mu}_B = 0$ are taken from Ref. [3].

Bazavov, et al. PRD95, 054504

Lattice QCD @ $\mu \neq 0$

• Taylor 展開 @ $\mu = 0$

- コントロールされた近似評価
- 収束半径 $\mu/T < 1$?
- 現実問題: 8 次以上不可

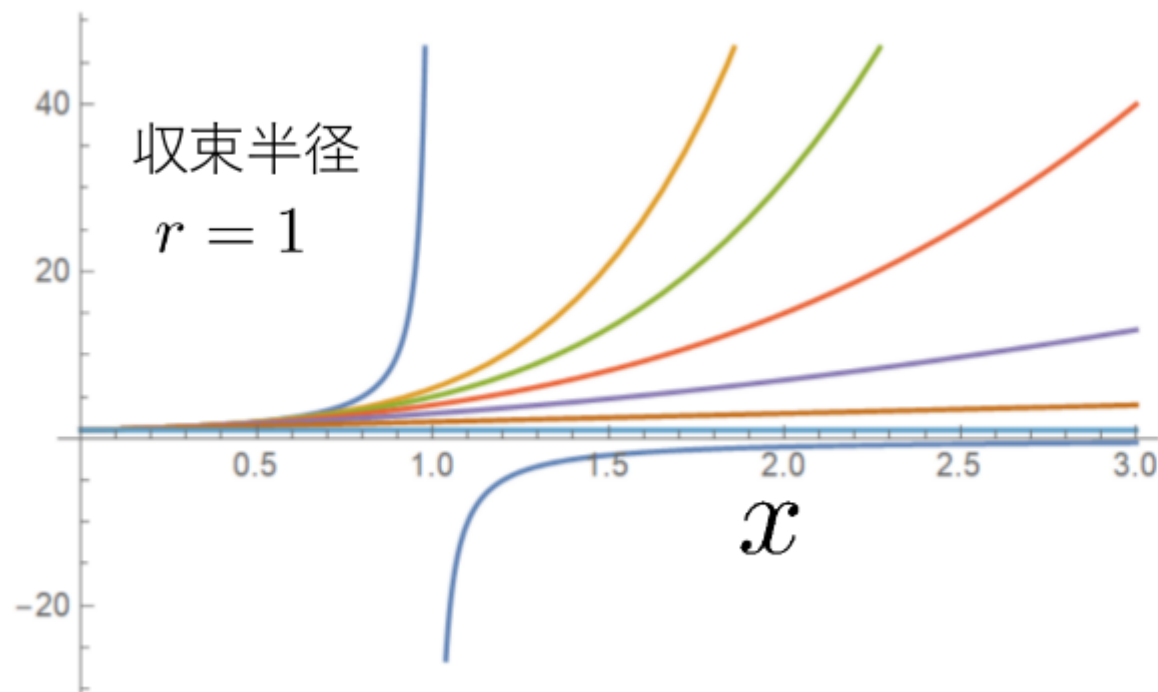
Taylor expansion: nitty-gritty

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^6 \ln \det M}{\partial \mu^6} = & \operatorname{tr} \left(M^{-1} \frac{\partial^6 M}{\partial \mu^6} \right) - 6 \operatorname{tr} \left(M^{-1} \frac{\partial M}{\partial \mu} M^{-1} \frac{\partial^5 M}{\partial \mu^5} \right) \\
 & - 15 \operatorname{tr} \left(M^{-1} \frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2} M^{-1} \frac{\partial^4 M}{\partial \mu^4} \right) - 10 \operatorname{tr} \left(M^{-1} \frac{\partial^3 M}{\partial \mu^3} M^{-1} \frac{\partial^3 M}{\partial \mu^3} \right) \\
 & + 30 \operatorname{tr} \left(M^{-1} \frac{\partial M}{\partial \mu} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial \mu} M^{-1} \frac{\partial^4 M}{\partial \mu^4} \right) + 60 \operatorname{tr} \left(M^{-1} \frac{\partial M}{\partial \mu} M^{-1} \frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2} M^{-1} \frac{\partial^3 M}{\partial \mu^3} \right) \\
 & + 60 \operatorname{tr} \left(M^{-1} \frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial \mu} M^{-1} \frac{\partial^3 M}{\partial \mu^3} \right) + 30 \operatorname{tr} \left(M^{-1} \frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2} M^{-1} \frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2} M^{-1} \frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2} \right) \\
 & - 120 \operatorname{tr} \left(M^{-1} \frac{\partial M}{\partial \mu} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial \mu} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial \mu} M^{-1} \frac{\partial^3 M}{\partial \mu^3} \right) \\
 & - 180 \operatorname{tr} \left(M^{-1} \frac{\partial M}{\partial \mu} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial \mu} M^{-1} \frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2} M^{-1} \frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2} \right) \\
 & - 90 \operatorname{tr} \left(M^{-1} \frac{\partial M}{\partial \mu} M^{-1} \frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial \mu} M^{-1} \frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2} \right) \\
 & + 360 \operatorname{tr} \left(M^{-1} \frac{\partial M}{\partial \mu} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial \mu} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial \mu} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial \mu} M^{-1} \frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2} \right) \\
 & - 120 \operatorname{tr} \left(M^{-1} \frac{\partial M}{\partial \mu} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial \mu} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial \mu} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial \mu} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial \mu} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial \mu} \right).
 \end{aligned}$$

de Forcrand's slide

Lattice QCD @ $\mu \neq 0$

- Taylor 展開 @ $\mu = 0$
 - コントロールされた近似評価
 - 限られた項で、どこまで分かるか



$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

- $\frac{1}{1-x}$
- $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$
- $1+x+x^2+x^3+x^4$
- $1+x+x^2+x^3$
- $1+x+x^2$
- $1+x$
- 1

T.M. Doi, PostQM

Lattice QCD @ $\mu \neq 0$

- 再重み付け
- テイラー展開
- 虚数化学ポテンシャル
- 強結合展開
- dual variable
- 状態密度の方法
- 正準集合 (粒子数一定)
- ...

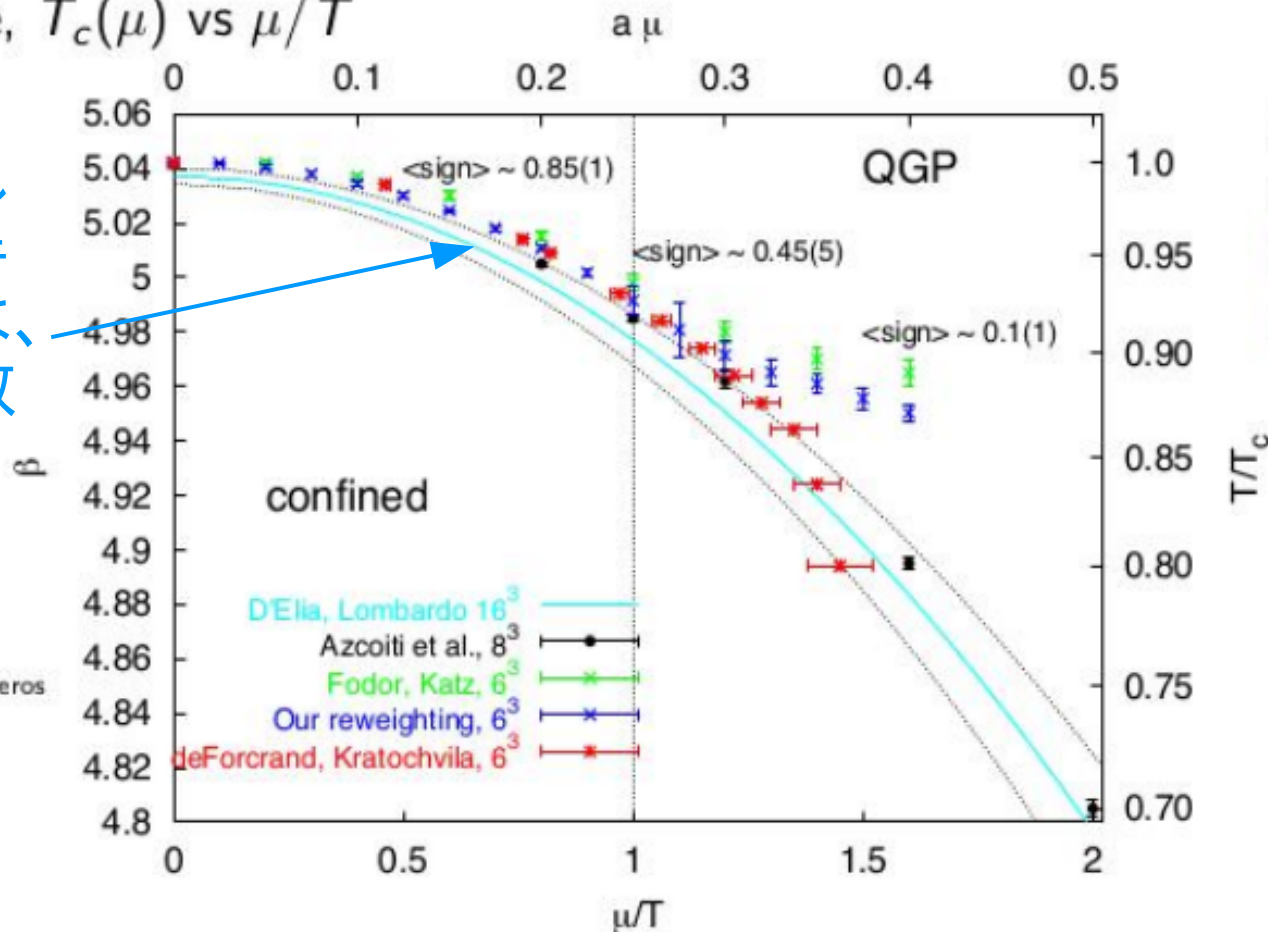
Valuable crosschecks

All methods agree for $\mu/T \lesssim \mathcal{O}(1)$ on small lattices

Here, $T_c(\mu)$ vs μ/T

期待される収束半径内では、
良い一致

imaginary μ
2 param. imag. μ
dble reweighting, LY zeros
Same, susceptibilities
canonical



$N_f = 4$ staggered,
 $am_q = 0.05$, $N_t = 4$
PdF & Kratochvila
LAT05

- **Main results:** - curvature of pseudocritical line $\frac{d^2 T_c}{d\mu^2} \Big|_{\mu=0}$
- absence of critical point for $\frac{\mu}{T} \lesssim 1$ de Forcrand's HHIQCD2015

QCD 相図; 符号問題

- 相図 (相境界・臨界点) の決定・理解へ
 - 着実に進展しているが、いずれも限界あり
- 有限密度領域の直接研究
 - 重点サンプリングのような確率解釈に頼らない方法
 - Langevin 方程式による標本生成
 - 重点サンプリングを可能にする定式化へ変形
 - 位相が出ないように積分路を変更

2. 複素ランジュバン方程式の方法

2. 複素ランジュバン方程式の方法

- 統計平均
 - 動的モンテカルロ法: 与えられた相対的確率分布になるように標本を生成する確率過程
 - ランジュバン方程式: Stochastic 過程の長時間平均が平衡分布に収束することを利用。エルゴード性から長時間平均＝統計平均

2 ブラウン運動

$$\frac{\partial}{\partial t}v(t) = -\gamma v(t) + \eta(t)$$

安定点へのドリフト緩和

$$S(v) = \frac{1}{2}v^2$$

ミクロな自由度:
確率的揺動

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} \eta(s) ds$$

$$\begin{aligned} \langle (v(t) - \langle v(t) \rangle)^2 \rangle_\eta &= \int_0^t \int_0^t e^{-\gamma(t-s)-\gamma(t-s')} \eta(s) ds \eta(s') ds' \\ &= g \int_0^t e^{-2\gamma(t-s)} ds = \frac{g}{2\gamma} [1 - e^{-2\gamma t}] \rightarrow kT \end{aligned}$$

$$\langle \eta(t) \eta(t') \rangle_\eta = g \delta(t - t') = 2kT\gamma \delta(t - t') \quad \text{揺動・散逸関係}$$

2. Langevin と Fokker-Planck 方程式

- η に応じた軌跡の分布 $\frac{d}{dt}v(t) = -\gamma \frac{\partial S}{\partial v} + \eta(t)$
 - 分布関数 ρ の導入 $\langle f(v(t)) \rangle_\eta = \int f(v) \rho(v; t) dv$
- $$\begin{aligned}\langle f(v(t + \Delta t)) \rangle_\eta &= \langle f(v(t)) + f'(v(t))dv + \frac{1}{2}f''(v)(dv)^2 \rangle_\eta \\ &= \langle f(v(t)) + f'(v(t))(-\gamma S'(v)dt) + \frac{1}{2}f''(v)gdt \rangle_\eta \\ \frac{d}{dt}\langle f(v(t)) \rangle_\eta &= \langle -f'(v)\gamma S'(v) + \gamma f''(v) \rangle_\eta \\ &= \int f(v) \frac{\partial}{\partial v} (\gamma S'(v) + \gamma \frac{\partial}{\partial v}) \rho(v; t) dv\end{aligned}$$

部分積分を行い、表面項を無視できると仮定した。

2. Langevin と Fokker-Planck 方程式

- FP 方程式
$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(v; t) = \frac{\partial}{\partial v} \left(S'(v) + \frac{\partial}{\partial v} \right) \rho(v; t)$$
$$(\gamma = 1, kT = 1)$$

- 平衡解の保証
$$\rho(v; t) = e^{-S/2} \psi(v; t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(v; t) = -H_{\text{FP}} \psi(v; t)$$

$$H_{\text{FP}} \equiv \left(-\frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{2} S'(v) \right) \left(\frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{2} S'(v) \right) \equiv Q^\dagger Q \geq 0$$

$$\rho(v; t) = e^{-S/2} \psi(v; t) \quad \rightarrow \quad e^{-S/2} e^{-S/2} = e^{-S}$$

2. Langevin と Fokker-Planck 方程式

- Langevin 方程式
$$\frac{d}{dt}v(t) = -\frac{\partial S}{\partial v} + \eta(t)$$
- FP 方程式
$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(v; t) = \frac{\partial}{\partial v} \left(S'(v) + \frac{\partial}{\partial v} \right) \rho(v; t)$$
- これら発展方程式を解くのに、確率解釈は不要

2. 確率過程量子化

- Langevin 方程式

$$\frac{d}{d\vartheta} \phi(\mathbf{x}, t; \vartheta) = -\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(\mathbf{x}, t; \vartheta)} + \eta(\mathbf{x}, t; \vartheta)$$

$$\rho[\phi : \vartheta \rightarrow \infty] \propto e^{-S/\hbar}$$

- S を作用とし、 η を量子揺らぎと解釈 $kT \rightarrow \hbar$
- "Langevin" 時間 θ について、系を発展させて採った標本平均が、量子論的期待値に一致

2. 複素作用 - No problem, just solve it

- Langevin 方程式

$$\frac{\partial S}{\partial x} \in \mathbb{C}; \quad x \rightarrow z = x + iy$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= -\operatorname{Re} \frac{\partial S[z]}{\partial z} + \eta_R(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) &= -\operatorname{Im} \frac{\partial S[z]}{\partial z} + \eta_I(t) \end{aligned}$$

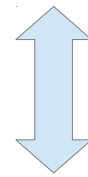
$$\langle \eta_R(t) \eta_R(t') \rangle = n_R 2\delta(t - t'), \quad \langle \eta_I(t) \eta_I(t') \rangle = n_I 2\delta(t - t') \quad (n_R - n_I = 1)$$

- FK 方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, y; t) &= \left[\frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{Re} S'(z) + n_R \frac{\partial}{\partial x}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{Im} S'(z) + n_I \frac{\partial}{\partial y}) \right] P(x, y; t) \end{aligned}$$

2. 複素作用

- 目標 $\langle O(x) \rangle = \int dx O(x) \rho(x); \quad \rho(x) = e^{-S} \in \mathbb{C}$



等しい?

- CL

$$\langle O(x) \rangle_{\text{CL}} = \int dx dy O(x + iy) P_{\infty}(x, y); \quad P_{\infty}(x, y) \geq 0$$

- 注) 拡張版 FK 方程式の平衡解は保証されない
- 実分布 $P(x, y) \geq 0$ で、複素重み ρ の期待値を再現できるのか?

$$\int dx dy O(x + iy) P_{\infty}(x, y) = \int dx O(x) \left(\int dy P_{\infty}(x - iy, y) \right)$$

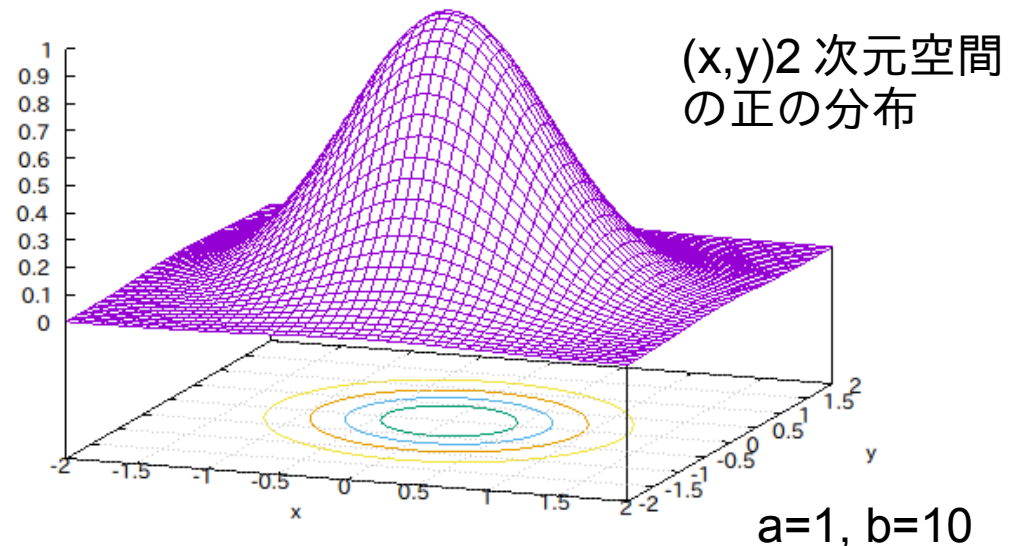
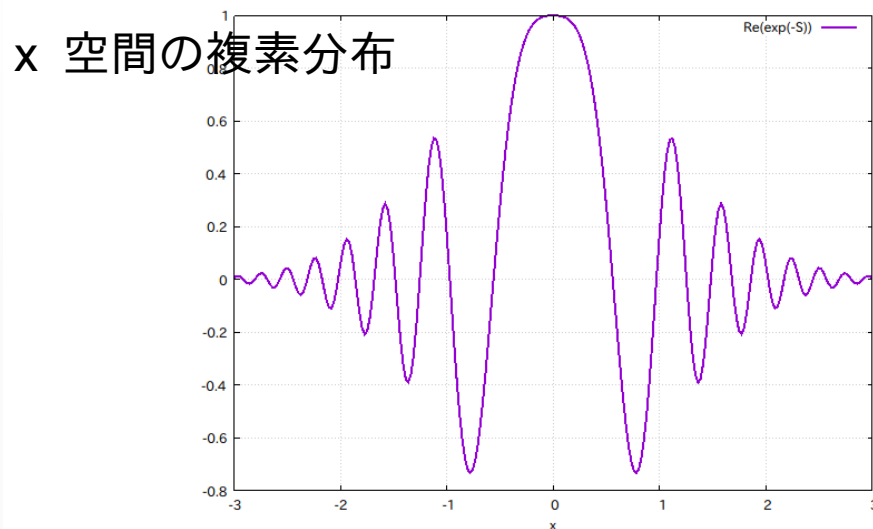
$$\int dy P_{\infty}(x - iy, y) = ? = \rho(x)$$

2. 唯一の?例) 複素 Gaussian 模型

$$S = \frac{1}{2}(a + ib)x^2$$

$$P(x, y) \propto \exp\left[-a\left(x^2 + \left(1 + \frac{2a^2}{b^2}\right)y^2 + 2\frac{a}{b}xy\right)\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy P(x - iy, y) = \sqrt{\frac{a + ib}{2\pi}} \exp\left[-\frac{a + ib}{2}x^2\right]$$



2. 荷電自由場

$$Z = \text{tr} [e^{-\beta(H-\mu N)}] = \prod_{p,a=\pm} Z_{p,a}$$

$$Z_{p,\pm} = \sum_{n_p} e^{-\beta(\omega_p \mp \mu)n_p - \frac{\beta\omega_p}{2}} = e^{-\frac{\beta\omega_p}{2} - \ln(1 - e^{-\beta(\omega_p \mp \mu)})}$$

$$\beta\Omega/V = \sum_p \beta\omega_p + \ln(1 - e^{-\beta(\omega_p - \mu)}) + \ln(1 - e^{-\beta(\omega_p + \mu)})$$

よく知られたボースガスの自由エネルギー

2. 荷電自由場

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x) + i\phi_2(x))$$

$$Z = \text{tr} [e^{-\beta(H-\mu N)}] = \prod_{p,a=\pm} Z_{p,a}$$

$$Z_{p,\pm} = \sum_{n_p} e^{-\beta(\omega_p \mp \mu)n_p - \frac{\beta\omega_p}{2}} = e^{-\frac{\beta\omega_p}{2} - \ln(1 - e^{-\beta(\omega_p \mp \mu)})}$$

$$\beta\Omega/V = \sum_p \beta\omega_p + \ln(1 - e^{-\beta(\omega_p - \mu)}) + \ln(1 - e^{-\beta(\omega_p + \mu)})$$

よく知られたボースガスの自由エネルギー

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\beta d^4x \left[|\partial_\nu \phi|^2 + (m^2 - \mu^2)|\phi|^2 + \mu(\phi^* \partial_4 \phi + \partial_4 \phi^* \phi) \right] \\ &= \int_0^\beta d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial_\nu \phi_a(x))^2 + \frac{1}{2}(m^2 - \mu^2)\phi_a^2(x) \right. \\ &\quad \left. + i\mu(\phi_1(x)\partial_4 \phi_2(x) + \partial_4 \phi_1(x)\phi_2(x)) \right] \end{aligned}$$

化学ポテンシャルは、荷電対称性を破る→ S が複素数になる

2. 荷電 Φ^4 理論

ランジュバンシミュレーション

Aarts, PRL102; JHEP0905

$$\partial_\nu \phi_a(x) \rightarrow \phi_{a,x+\hat{\nu}} - \phi_{a,x}$$

$$\begin{aligned} S &= \sum_x (2d + m^2) |\phi_x|^2 + \lambda |\phi_x|^4 - \sum_{\nu=1}^4 (e^{-\mu\delta_{\nu,4}} \phi_x^* \phi_{x+\hat{\nu}} + e^{\mu\delta_{\nu,4}} \phi_{x+\hat{\nu}}^* \phi_x) \\ &= \sum_x (2d + m^2) |\phi_{a,x}^2|^2 + \frac{\lambda}{4} (\phi_{a,x}^2)^2 - \sum_{j=1}^3 \phi_{a,x} \phi_{a,x+\hat{j}} \\ &\quad - \cosh \mu \phi_{a,x} \phi_{a,x+\hat{j}} + i \sinh \mu \varepsilon_{ab} \phi_{a,x} \phi_{b,x+\hat{j}} \end{aligned}$$

位相に寄与
位相クエンチ
=これを無視

$$\phi_a(x) \rightarrow \phi_a^R + i\phi_a^I \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} \phi_{a,x}^R(n+1) &= \phi_{a,x}^R(n) + \epsilon K_{a,x}^R(n) + \sqrt{\epsilon} \eta_{a,x}(n), \\ \phi_{a,x}^I(n+1) &= \phi_{a,x}^I(n) + \epsilon K_{a,x}^I(n) \end{aligned}$$

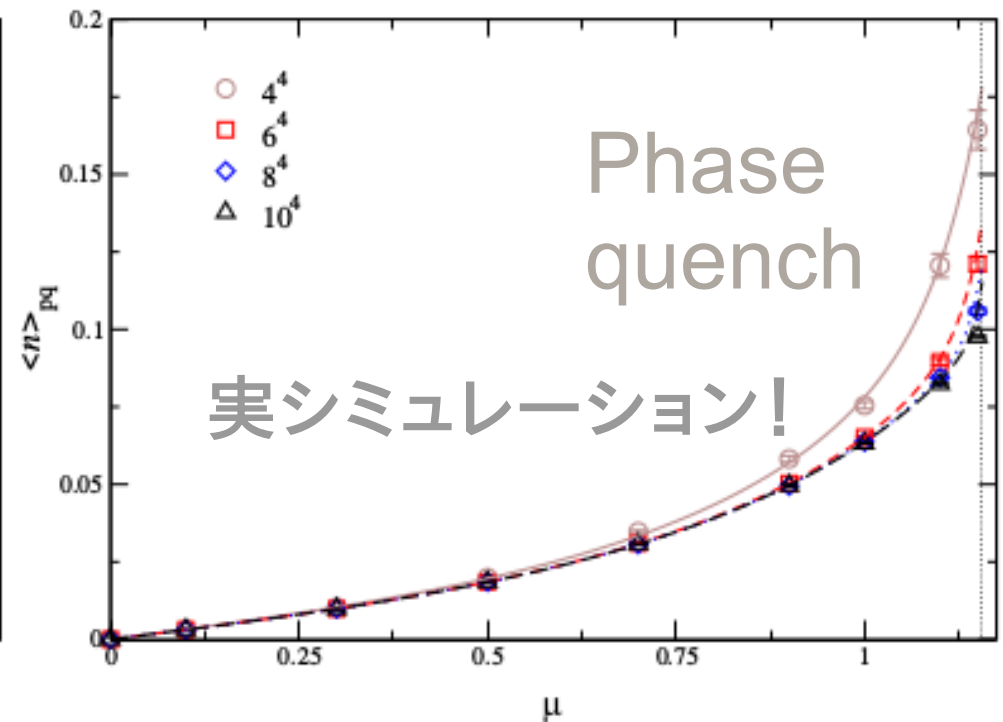
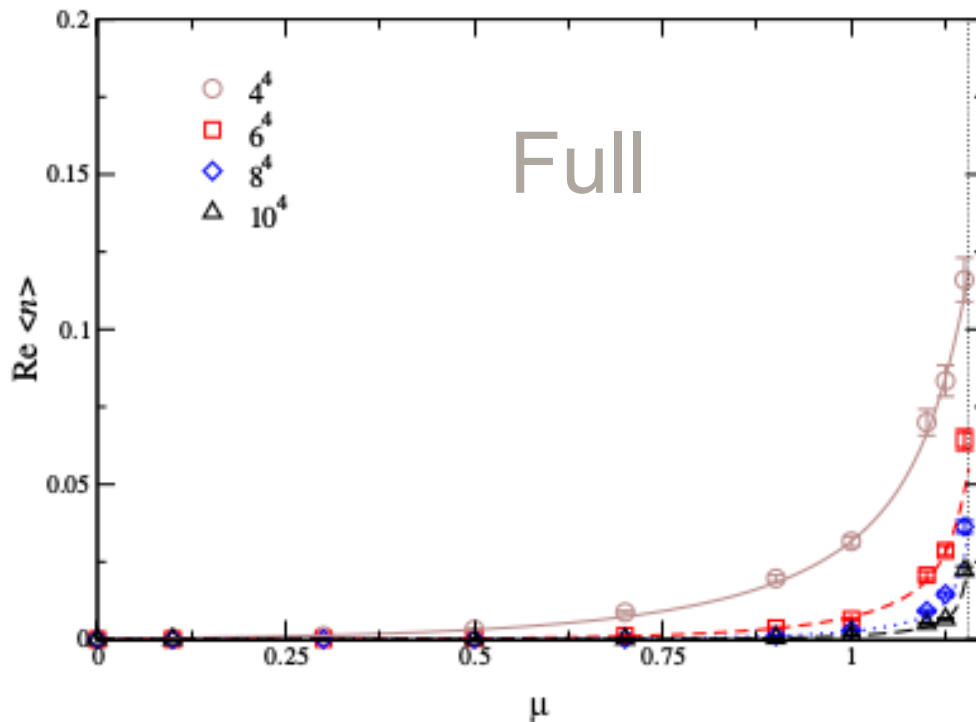
$$K_{a,x}(n) = -\frac{\partial S}{\partial \phi_{a,x}}(n)$$

2. 荷電 Φ^4 理論 ランジュバンシミュレーション

Aarts, PRL102; JHEP0905

$$\epsilon = 5 \cdot 10^{-5} \quad m=1, \lambda=1$$

密度 μ



- $T=0$ では、 $\mu < M$ で励起は無いはず (**Silver Blaze** [馬が啼かなかった])
- 平均場近似が本質を捉えている: $m^2 \rightarrow M^2 = m^2 + 4\lambda \langle |\phi^2| \rangle$

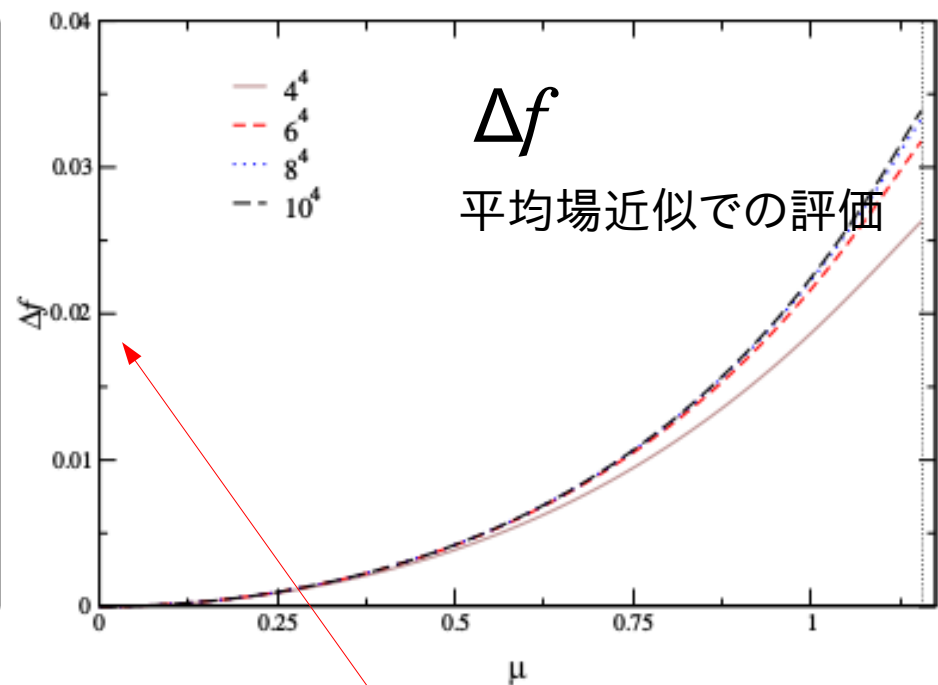
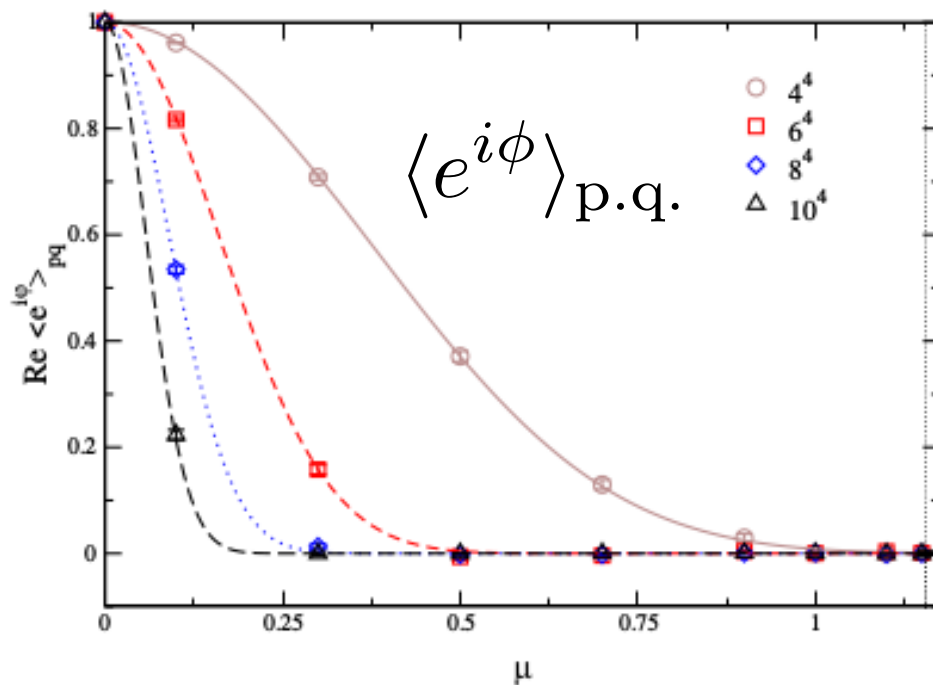
2. 荷電 Φ^4 理論

ランジュバンシミュレーション

Aarts, PRL102; JHEP0905

$$\epsilon = 5 \cdot 10^{-5} \quad m=1, \lambda=1$$

符号問題の厳しさ



- 位相因子の平均は、系のサイズとともに急激に小さくなる

$$\langle e^{i\phi} \rangle = e^{-\beta V \Delta f}$$

$$e^{-10^4 \cdot 0.02} = e^{-200} !$$

2. 荷電自由場 (II) 複素位相の大切さ

$$S = \int_0^\beta d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\nu \phi_a(x))^2 + \frac{1}{2} (m^2 - \mu^2) \phi_a^2(x) \right.$$

$$\left. + i\mu (\phi_1(x) \partial_4 \phi_2(x) + \partial_4 \phi_1(x) \phi_2(x)) \right]$$

$$\phi_{a,x} = \sum_p e^{ipx} \phi_{a,p} \quad \text{対角化}$$

$$Z \sim \int e^{-\frac{A}{2}(x^2+y^2) + \frac{B}{2}ixy} dx dy = \int e^{-\frac{A}{2}(x^2+y^2)} \cos\left(\frac{B}{2}xy\right) dx dy$$

実振動積分

$$= \int e^{-\left(\frac{A}{2} + \frac{B^2}{2A}\right)x^2 - \frac{A}{2}\left(y - i\frac{B}{A}x\right)^2} dx dy$$

複素積分している!

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{A}} \sqrt{\frac{2\pi}{A + \frac{B^2}{A}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \leftrightarrow \quad \frac{2\pi}{A} ; \text{ phase quench}$$

$$\rightarrow \ln Z \sim -\frac{1}{2} \ln(A^2 + B^2)$$

正しいスペクトル:
位相揺らぎの考慮が本質

2. 0+1 次元 Thirring モデル

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}(\not{\partial} + m + \mu\gamma_0)\psi + \frac{g^2}{2}(\bar{\psi}\gamma_\nu\psi)^2$$

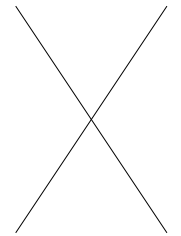
$$\int dA e^{-\frac{1}{2g^2}(A_\nu - ig^2\bar{\psi}\gamma_\nu\psi)^2} \quad \text{補助場 } A$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\not{\partial} + i\not{A} + m + \mu\gamma_0)\psi + \frac{1}{2g^2}A_\nu^2$$

ベクトル j.j 結合

2. 0+1 次元 Thirring モデル

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}(\not{\partial} + m + \mu\gamma_0)\psi + \frac{g^2}{2}(\bar{\psi}\gamma_\nu\psi)^2$$



$$\int dA e^{-\frac{1}{2g^2}(A_\nu - ig^2\bar{\psi}\gamma_\nu\psi)^2} = 1 \quad \text{補助場 A}$$

ベクトル j.j 結合

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\not{\partial} + i\not{A} + m + \mu\gamma_0)\psi + \frac{1}{2g^2}A_\nu^2$$

• 可解な格子模型

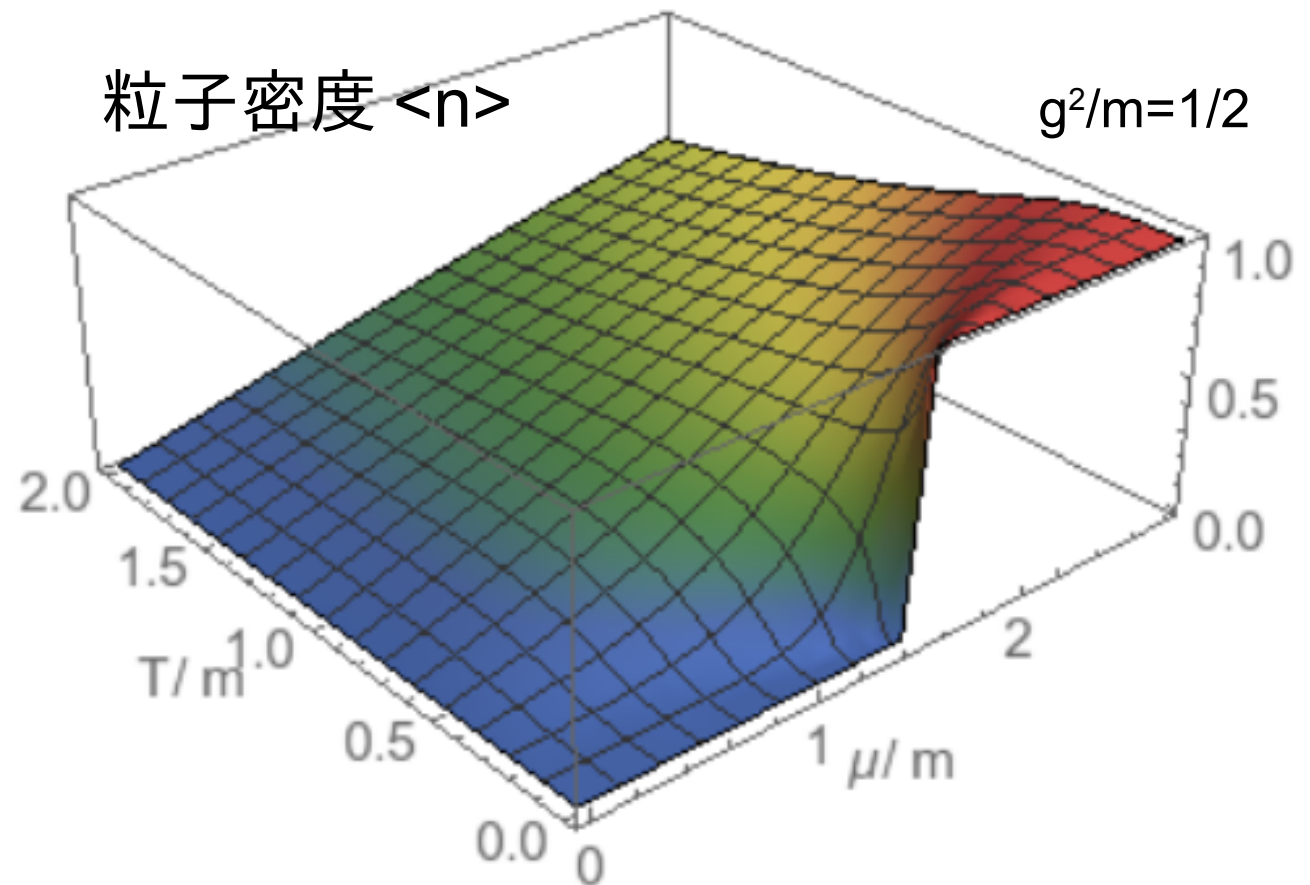
$$Z = \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{n=1}^L \frac{dA_n}{2\pi} e^{-\beta \sum_{n=1}^L (1 - \cos A_n)} \det D[A]$$

$$\det D[A] = \frac{1}{2^{L-1}} \left[\cosh(L\hat{\mu} + i\sum_{n=1}^L A_n) + \cosh L\hat{m} \right]$$

行列式が複素になる

2. 0+1 次元 Thirring モデル

- $T=0$, $\mu = \mu c$ で、一次相転移



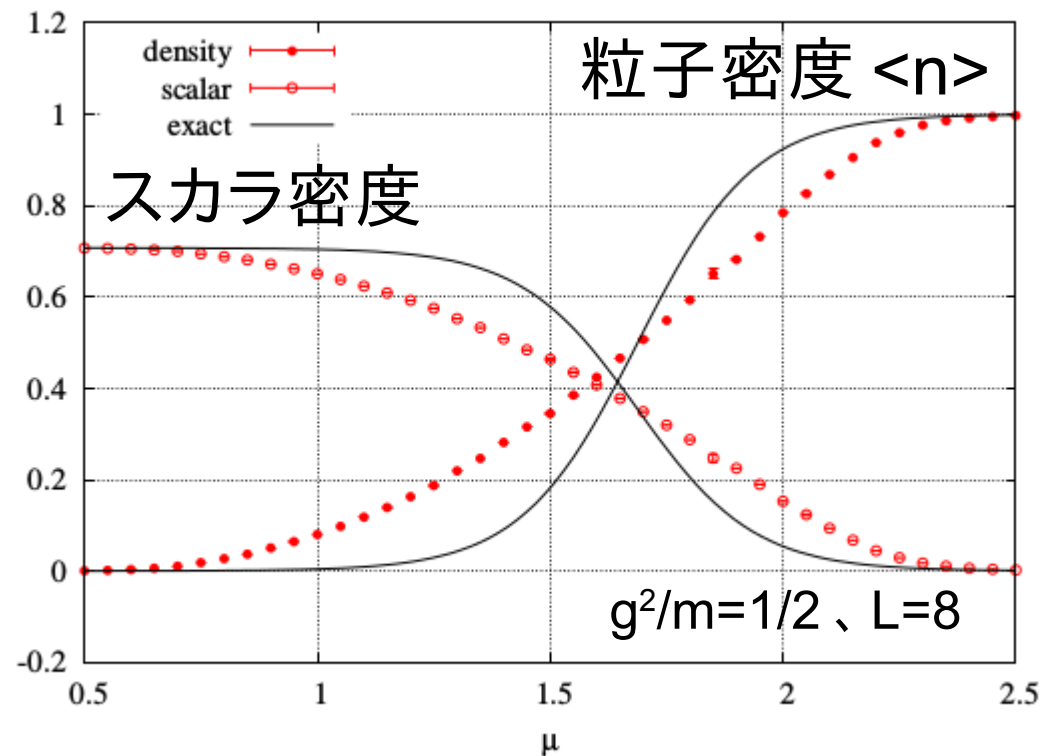
2. 0+1 次元 Thirring -- シミュレーション結果

$$z(\tau + \varepsilon) = z(\tau) + \varepsilon K(z(\tau)) + \sqrt{\varepsilon} \eta(\tau)$$

$$K_\ell(z) = -\frac{\partial S(z)}{\partial z_\ell} = -\beta \sin z_\ell + i \frac{\sinh(L\mu + is)}{\det D(s; \mu)}$$

$$s = \sum_{n=1}^L z_n$$

- クロスオーバー領域で、厳密解を再現しない



2. 複素 Langevin 方程式の問題

- 間違った結果を返すことがある。
- そもそも、正しい結果に収束する強い保証がない。
 - H_{FP} は実でない

$$\rho(v; t) = e^{-S/2} \psi(v; t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(v; t) = -H_{\text{FP}} \psi(v; t)$$

$$H_{\text{FP}} \equiv \left(-\frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{2} S'(v)\right) \left(\frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{2} S'(v)\right) \neq Q^\dagger Q \quad S \in \mathbb{C}$$

2. いつ正しいのか

$$\langle O \rangle_{\rho(t)} = ? = \langle O \rangle_{P(t)}$$

• 準備

一つの停留解

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x; t) = \nabla_x (\nabla_x + (\nabla_x S)) \rho(x, t) \equiv L_0^T \rho(x; t) \quad \leftarrow \quad \rho = e^{-S}$$

$$\frac{d}{dt} \langle f(x, y) \rangle = \langle L f(x, y) \rangle = \int L f(x, y) P(x, y; t) = ? = \int f L^T P(t) dx dy$$

部分積分

複素空間での
FK 演算子

$$L^T = \nabla_x (\nabla_x - K_x) - \nabla_y K_y, \quad (N_R = 1, N_I = 0)$$

解析的な観測量への
作用

$$\begin{aligned} LO(x + iy) &= [(\nabla_x - K_x) \nabla_x - K_y \nabla_y] O(x + iy) \\ &= [(\nabla_z - K_x) \nabla_z - i K_y \nabla_z] O(z) \equiv \tilde{L} O(z) \end{aligned}$$

観測量 op の時間発展

$$\partial_t O(z; t) = \tilde{L} O(z; t), \quad O(z; t) = e^{t \tilde{L}} O(z)$$

2. いつ正しいのか

$$\langle O \rangle_{\rho(t)} = ? = \langle O \rangle_{P(t)}$$

$$\begin{aligned} \int dx dy O(x+iy) P(x, y; t) &= \int dx dy O(x+iy) e^{tL^T} P(x, y; 0) \\ &= \int dx dy \left(e^{tL} O(x+iy) \right) P(x, y; 0) \\ &= \int dx \left(e^{tL_0} O(x) \right) \rho(x; 0) \\ &= \int dx O(x) e^{tL_0^T} \rho(x; 0) \\ &= \int dx O(x) \rho(x; t) \end{aligned}$$

部分積分

- 部分積分・Lの指数関数が正当化できる必要

- 虚数方向に広がらない
- 特異点に触れない

Nagata-Nishimura-Shimasaki

⇒ ドリフト項の大きさ分布が指数関数で落ちること

2. Thirring モデルのチェック

- 標本分布：ドリフト項に特異点

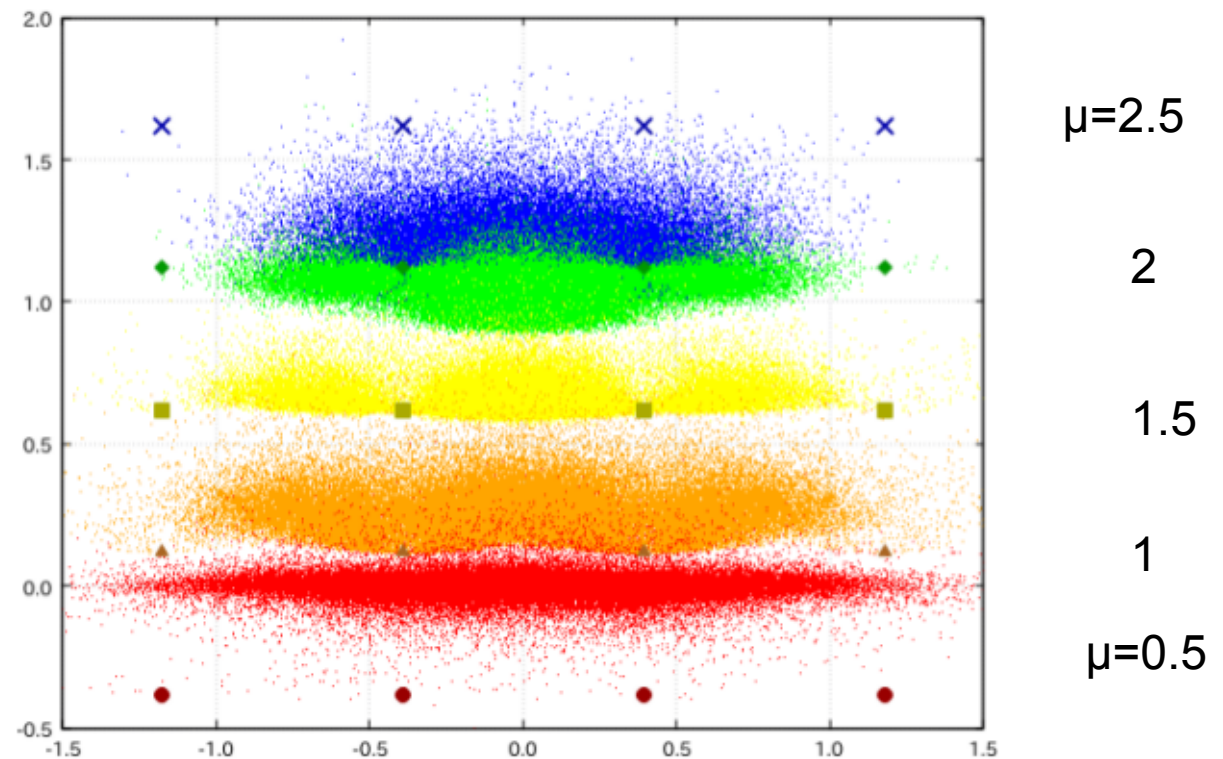
- 標本分布が特異点に触れる

- 部分積分？
- L 演算子の指数？

- 部分積分の正当化のため $P(x,y)$

- 特異点を避ける
- 無限遠を避ける

$$K_\ell(z) = -\frac{\partial S(z)}{\partial z_\ell} = -\beta \sin z_\ell + i \frac{\sinh(L\mu + is)}{\det D(s; \mu)}$$



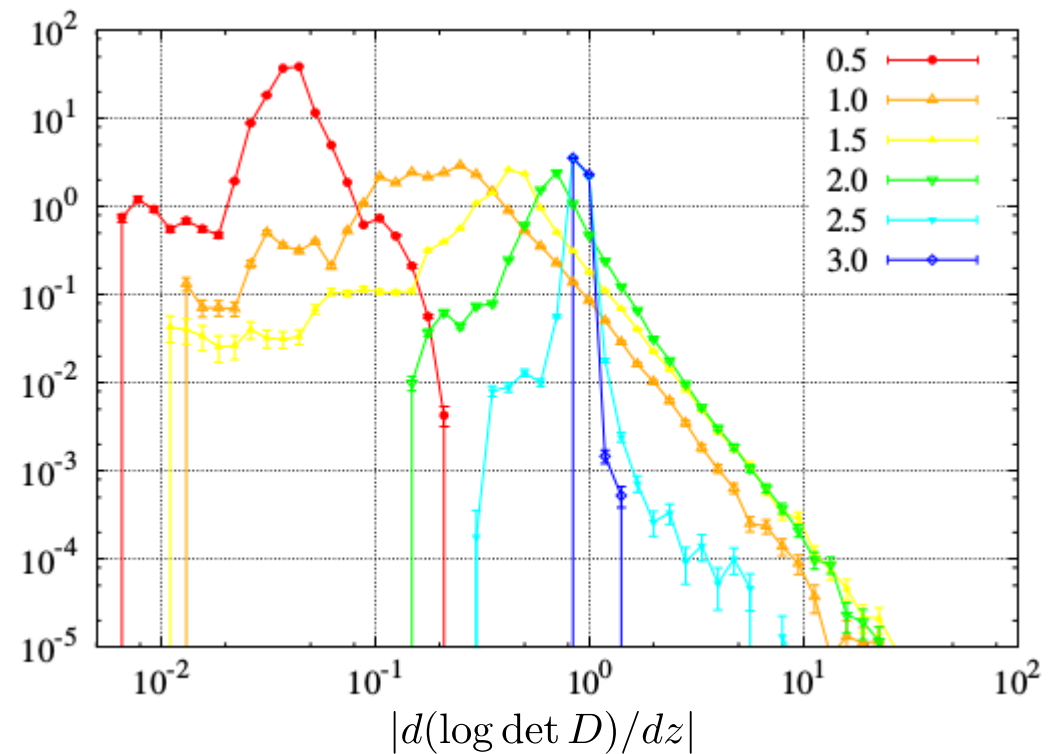
2. Thirring モデルのチェック

- 標本分布：ドリフト項に特異点

- 標本分布が特異点に触れる
 - 部分積分？
 - L 演算子の指数？

- 部分積分の正当化のため $P(x,y)$
 - 特異点を避ける
 - 無限遠を避ける

特異ドリフトの大きさ頻度



2. 対応策0 gauge cooling

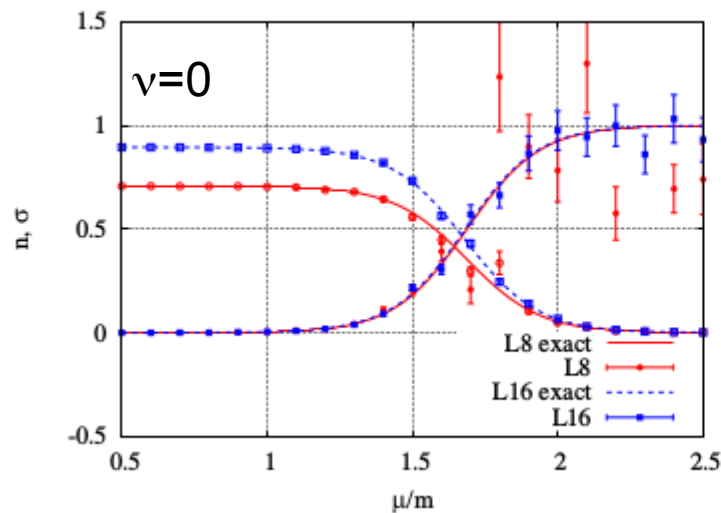
- 理論の対称性の下で、分布を「実配位」近くに留まるように変換しつつ、ランジュバン発展させる
 - $SU(N) \rightarrow CL \rightarrow SL(N, \mathbb{C})$ となって、ユニタリ多様体から容易に離れてしまうため

2. 対応策1 reweighting

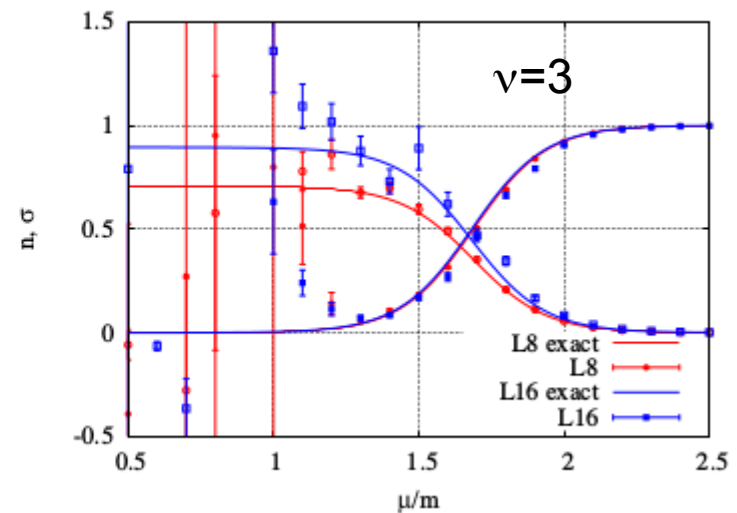
- 複素ランジューバンのうまく摘要する領域で

$$\langle O \rangle_{\mu} \equiv \frac{\left\langle \frac{\det D(\mu)}{\det D(\nu)} O \right\rangle_{\nu, \text{CLE}}}{\left\langle \frac{\det D(\mu)}{\det D(\nu)} \right\rangle_{\nu, \text{CLE}}}$$

(0+1)d model $(\beta, L) = (1, 8), (2, 16)$

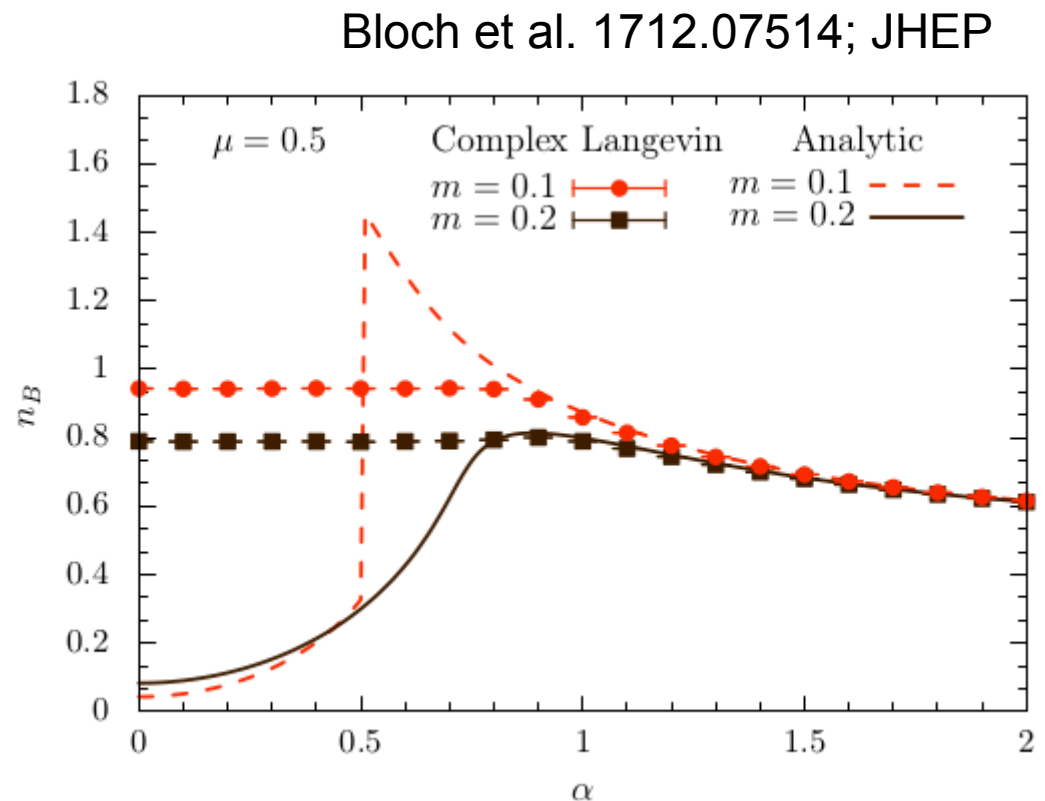


$O(10^6)$ samples



2. 対応策 2 外挿

- パラメタを持ち込んで、複素ランジュバンのうまく摘要する領域から
- カイラルランダム行列模型
 - 温度 α を導入
 - $\alpha = 0$ の値を”相転移”を越えて外挿で予言するのは不可能



2. 複素 Langevin 方程式の現状

- 摘要するときには、非常に良い！
- 一般に、等価性の条件の成否に注意しつつ使う
- 進展：
 - KEK グループによる QCD 計算

2. 複素 Langevin 方程式の現状

Slide by S.Tsutsui@NFQCD2018

Setup: low temperature region

- $N_f = 4$, staggered fermion
- Lattice size: $8^3 \times 16$ cf) $4^3 \times 8$ results in J. Nishimura's talk
- $\beta = 5.7$
- $\mu a = 0.0 - 0.5$
- Quark mass: $m_q a = 0.01, 0.05$
- Langevin steps = $10^5 - 10^6$
- Computational resource: K computer

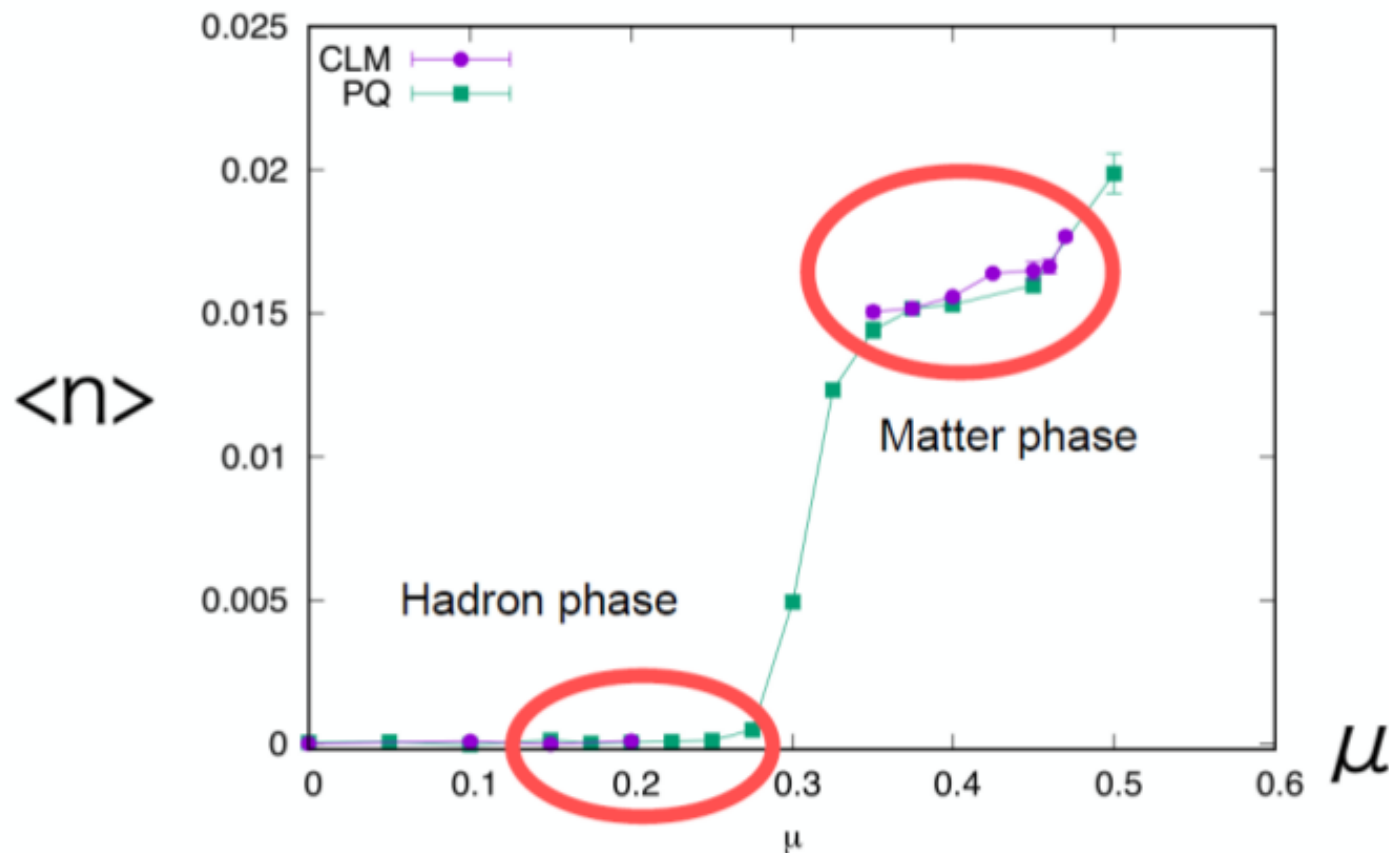
We compare the results with the RHMC results of the phase quenched (PQ) simulation.

2. 複素 Langevin 方程式の現状

Slide by S.Tsutsui@NFQCD2018

Comparison with PQ simulation

$m = 0.05$



Qualitative difference is not observed $\rightarrow$ due to too heavy pion?

3 . Thimble の方法

Airy 関数： 最急降下法

$$y'' - xy = 0$$

• 積分表示
$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(tx + \frac{t^3}{3})} dt$$

- 確かに形式解になっているが、被積分関数が振動する。
- x が少し虚部を持ったら、収束しない!?
- 一方 ODE の解は、 x の解析関数のはず。。。
- 解析関数の積分だから、積分路を上手に歪めて積分を評価しよう

Airy 関数： 最急降下法

$$y'' - xy = 0$$

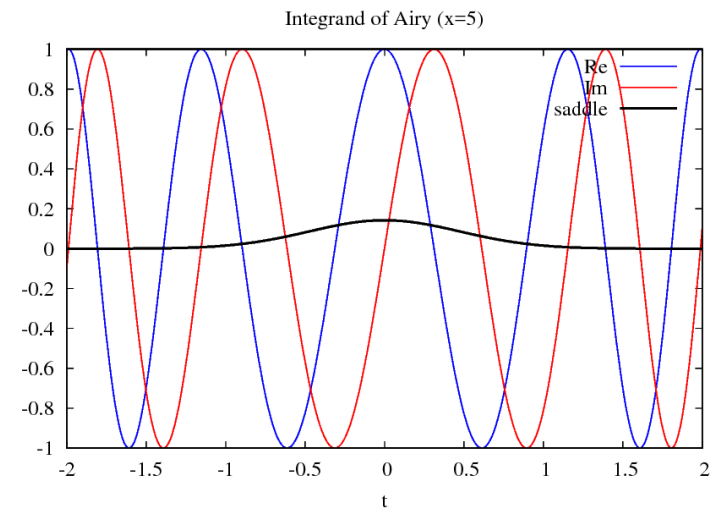
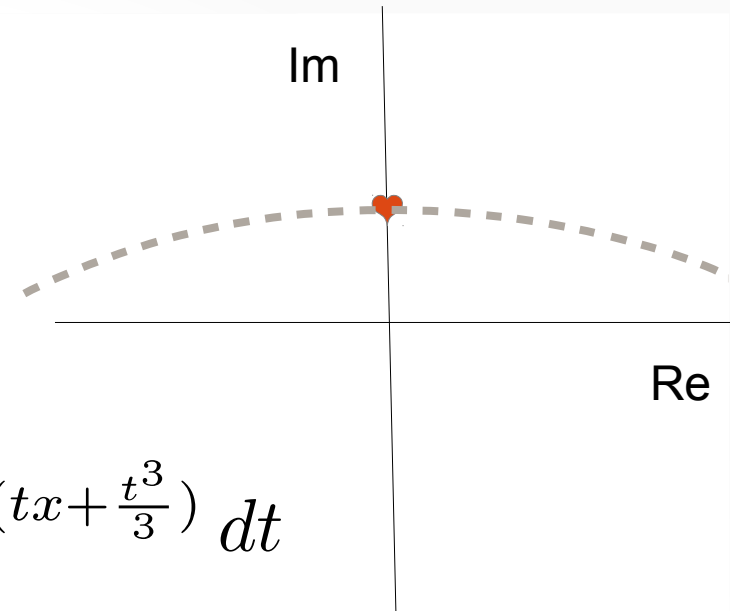
• 積分表示
$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(tx + \frac{t^3}{3})} dt$$

振動積分 $\Rightarrow$ 停留点 (鞍点) で評価

$$h = i(tx + \frac{t^3}{3})$$

$$h' = i(x + t^2) = 0; \quad t_* = \pm i\sqrt{x}$$

$$h'' = 2it \rightarrow h''_* = \mp 2\sqrt{x}$$



$$\text{Ai}(x) \simeq e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}h''_* t^2} dt = \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}$$

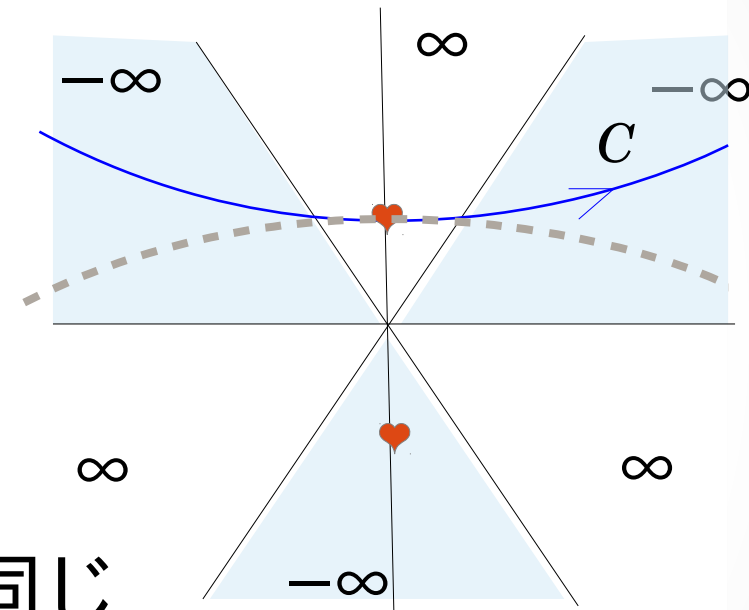
Airy 関数： 最急降下法 (II)

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(tx + \frac{t^3}{3})} dt \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_C e^{i(tx + \frac{t^3}{3})} dt$$

x が複素数になると、収束しない？

$$\frac{\pi}{2} + 2n\pi < \arg(it^3) < \frac{3}{2}\pi + 2n\pi$$

$$\frac{2\pi}{3}n < \theta < \frac{2\pi}{3}n + \frac{\pi}{3}$$



- Cauchy の定理から積分値は同じ
- 収束性を保証
- むしろ、積分表示の定義として採用

Airy 関数： 最急降下法 (II)

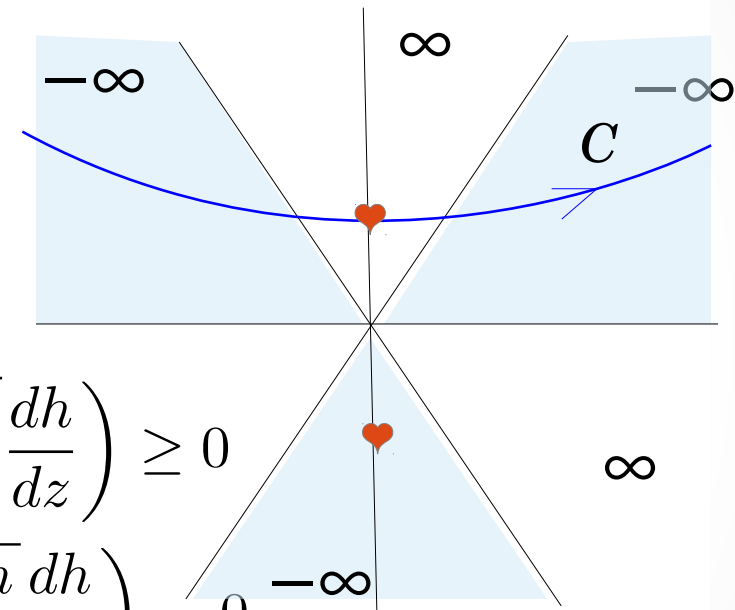
$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(tx + \frac{t^3}{3})} dt \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_C e^{i(tx + \frac{t^3}{3})} dt$$

- 最急降下経路: $h = i(zx + \frac{z^3}{3})$

$$\frac{d}{d\tau} z = -\frac{\overline{dh}}{dz} \quad \dots\dots (\#)$$

$$\frac{d}{d\tau} \text{Re}h = \frac{1}{2} \left(\frac{dh}{dz} \dot{z} + \frac{\overline{dh}}{dz} \dot{\bar{z}} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{dh}{dz} \frac{\overline{dh}}{dz} + \frac{\overline{dh}}{dz} \frac{dh}{dz} \right) \geq 0$$

$$\frac{d}{d\tau} \text{Im}h = \frac{1}{2i} \left(\frac{dh}{dz} \dot{z} - \frac{\overline{dh}}{dz} \dot{\bar{z}} \right) = -\frac{1}{2i} \left(\frac{dh}{dz} \frac{\overline{dh}}{dz} - \frac{\overline{dh}}{dz} \frac{dh}{dz} \right) = 0$$

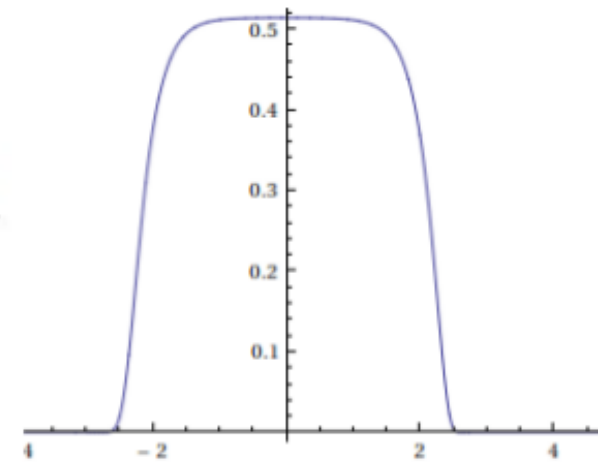
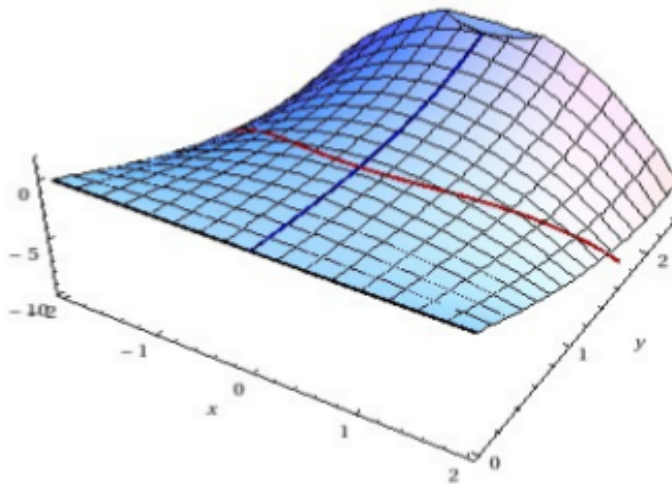
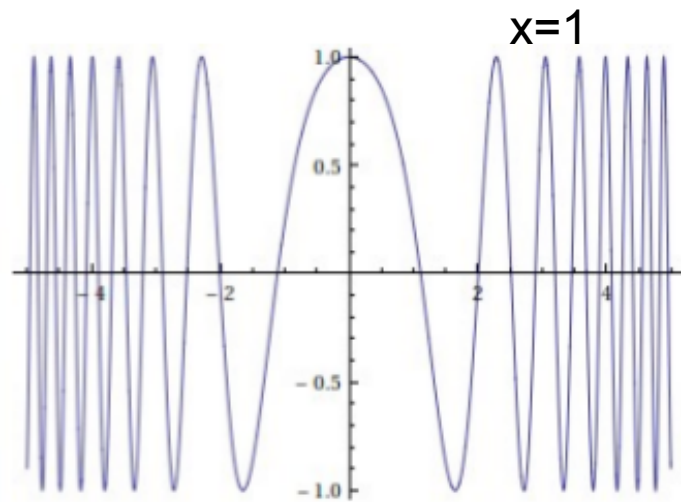


流れ (#) に沿い $\text{Re}h$ は単調減少; $\text{Im}h$ は保存 (ハミルトニアン)

臨界点 ($h'=0$) から伸びる流れを「最急降下経路」という

Airy function

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\frac{t^3}{3} + xt)} = \int_{\gamma} dz e^{i(\frac{z^3}{3} + xz)} = e^{i\phi} \int_{\gamma} dz e^{\text{Re}[i(\frac{z^3}{3} + xz)]}$$



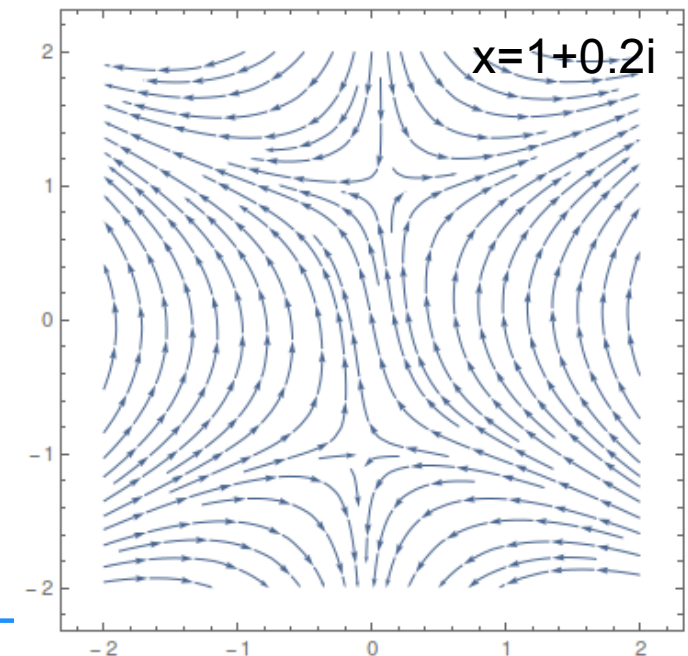
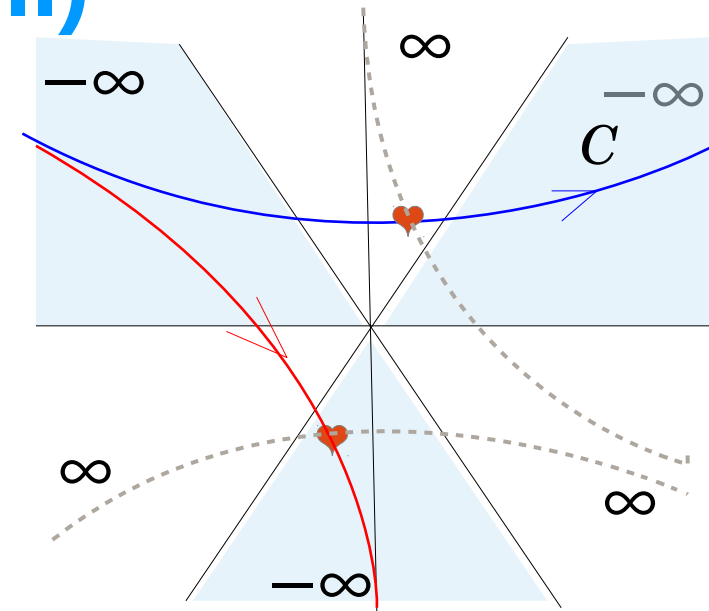
- Choose the relevant saddle point
- Steepest decent for the real part of the exponent
- Imaginary part is constant on the contour
- Jacobian gives the residual complex factor

Airy 関数： 最急降下法 (III)

- 独立な解

$$\text{Ai}_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{J_\sigma} e^{i(tx + \frac{t^3}{3})} dt$$

- ODE を満たす形式解に、二つの独立な積分路が考えられる
 - 二つの独立な解を与える
 - 実軸積分に一致するのは、共役な流れが実軸を横切るもの（これを
変えるためには、積分路の変更中に一度 ∞ を越える必要がある）



Lefschetz thimble

- 多次元空間への拡張

$$\frac{d}{d\tau} z_i = -\overline{\frac{dh}{dz_i}}$$

- 臨界点 σ から流出する点の集合
「Lefschetz thimble」 J_σ

- $\mathbb{R}^N$ 次元: 解析関数の鞍点構造より
- 被積分関数の急減少
- 虚部(位相)は一定



(c) kutani thimble



wikipedia

$$\int_{\mathbb{R}^N} dx e^{-S(x)} = \sum_{\sigma} n_{\sigma} \int_{J_{\sigma}} dz e^{-S(z)}$$

Lefschetz thimble

- 多次元空間への拡張

$$\frac{d}{d\tau} z_i = -\overline{\frac{dh}{dz_i}}$$

- 臨界点 σ から流出する点の集合
「Lefschetz thimble」 J_σ
 - R^N 次元: 解析関数の鞍点構造より
 - 被積分関数の急減少
 - 虚部(位相)は一定



(c) kutani thimble



wikipedia

Thimble 上で、被積分関数を用いた重点サンプリングが可能では!?

AuroraScience coll. 2012
Komaba group 2013

3. 荷電 ϕ^4 理論への適用

$$S = \int_0^\beta d^4x \left[|\partial_\nu \phi|^2 + (m^2 - \mu^2) |\phi|^2 + \mu (\phi^* \partial_4 \phi + \partial_4 \phi^* \phi) \right]$$

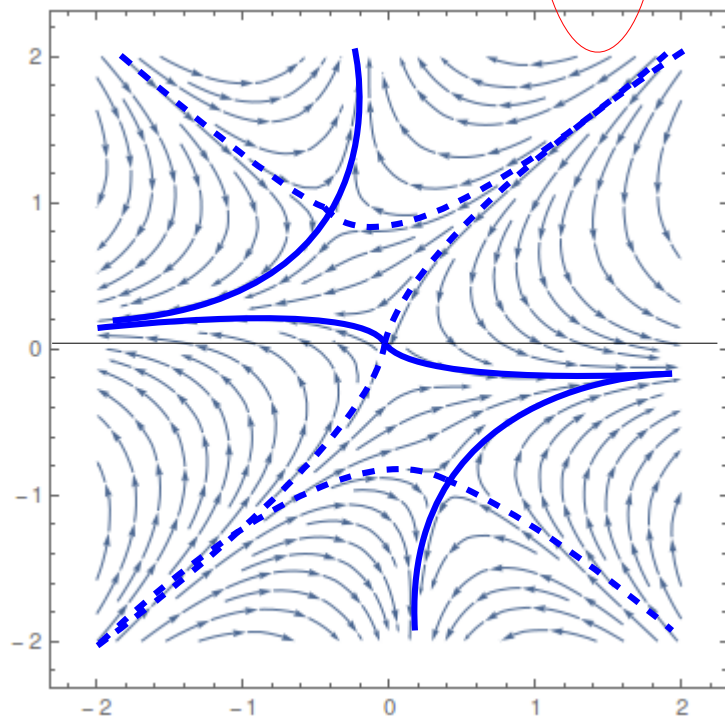
- Thimble 構造はどうなっているのか？
 - 臨界点の数、
- どの thimble の上で MC を行うか？
- すべてを尽くすことは、困難か

3. 荷電 Φ^4 理論への適用

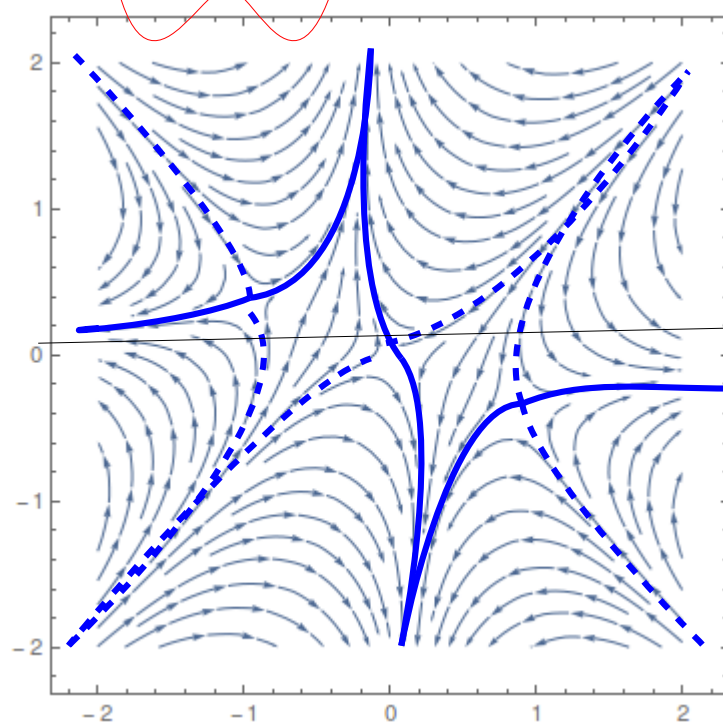
- 1 変数モデル (参考)

$$S = \frac{\kappa}{2}x^2 + \frac{\lambda}{4}x^4 \rightarrow \frac{\kappa}{2}z^2 + \frac{\lambda}{4}z^4 \in \mathbb{C}$$

$$\kappa = e^{i\pi/4}$$



$$\kappa = e^{3i\pi/4} \quad \lambda = 1$$



3. 荷電 ϕ^4 理論への適用

Komaba group 2013

- 主要な thimble を一つだけ採って、MC
- 曲がった空間の上での積分
 - どのようにパラメトライズするか
 - Jacobian が複素数になる (残る符号問題)。

$$\begin{aligned}\langle O \rangle &= \frac{\int_{R^n} dx e^{-S[x]} O[x]}{\int_{R^n} dx e^{-S[x]}} = \frac{\sum_{\sigma} e^{-i\text{Im}S[z_{\sigma}]} \int_{\mathcal{J}_{\sigma}} dz e^{-\text{Re}S[z]} O[z]}{\sum_{\sigma} e^{-i\text{Im}S[z_{\sigma}]} \int_{\mathcal{J}_{\sigma}} dz e^{-\text{Re}S[z]}} \\ &\rightarrow \frac{e^{-i\text{Im}S[z_{\sigma}]} \int_{\mathcal{J}_{\sigma}} |dz| e^{i\phi} e^{-\text{Re}S[z]} O[z]}{e^{-i\text{Im}S[z_{\sigma}]} \int_{\mathcal{J}_{\sigma}} |dz| e^{i\phi} e^{-\text{Re}S[z]}} = \frac{\langle e^{i\phi} O[z] \rangle'_{\mathcal{J}_{\sigma}}}{\langle e^{i\phi} \rangle'_{\mathcal{J}_{\sigma}}}\end{aligned}$$

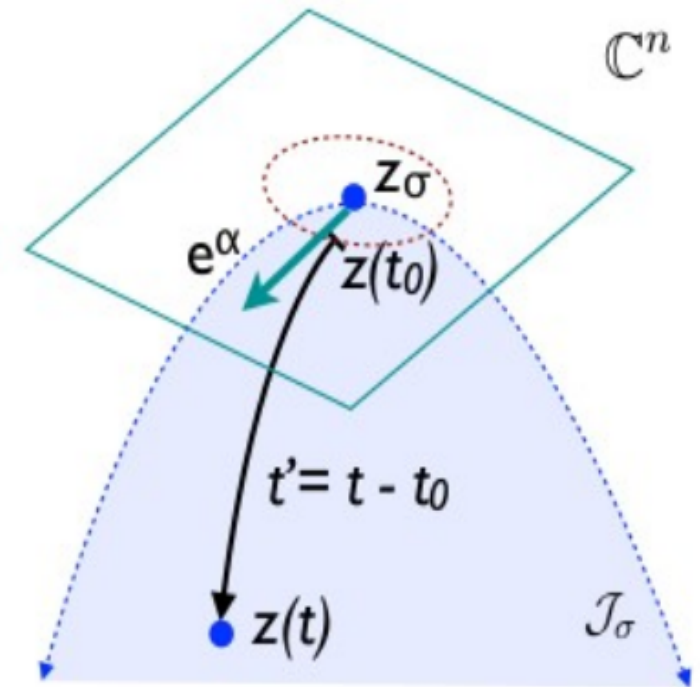
3. 荷電 Φ^4 理論への適用

Komaba group 2013

- thimble の座標
 - 接空間 Tz_σ から J への写像
$$(e^\alpha, t - t_0) \rightarrow z \in \mathcal{J}_\sigma$$
 - 接ベクトルの用意
 - MC で z 近傍に遷移のため
 - Jacobian の評価

$$V^\alpha(e, 0) \rightarrow V_z^\alpha(e, t - t_0) \in T_z$$

- 空間内に留まるため、thimble 上の点を数値的に解きつつ、MC を行う(とても重たい)



HMC result ($L=4$)

- $\mu < \mu_c$: history of the residual phase

$$\kappa = \lambda = 1$$

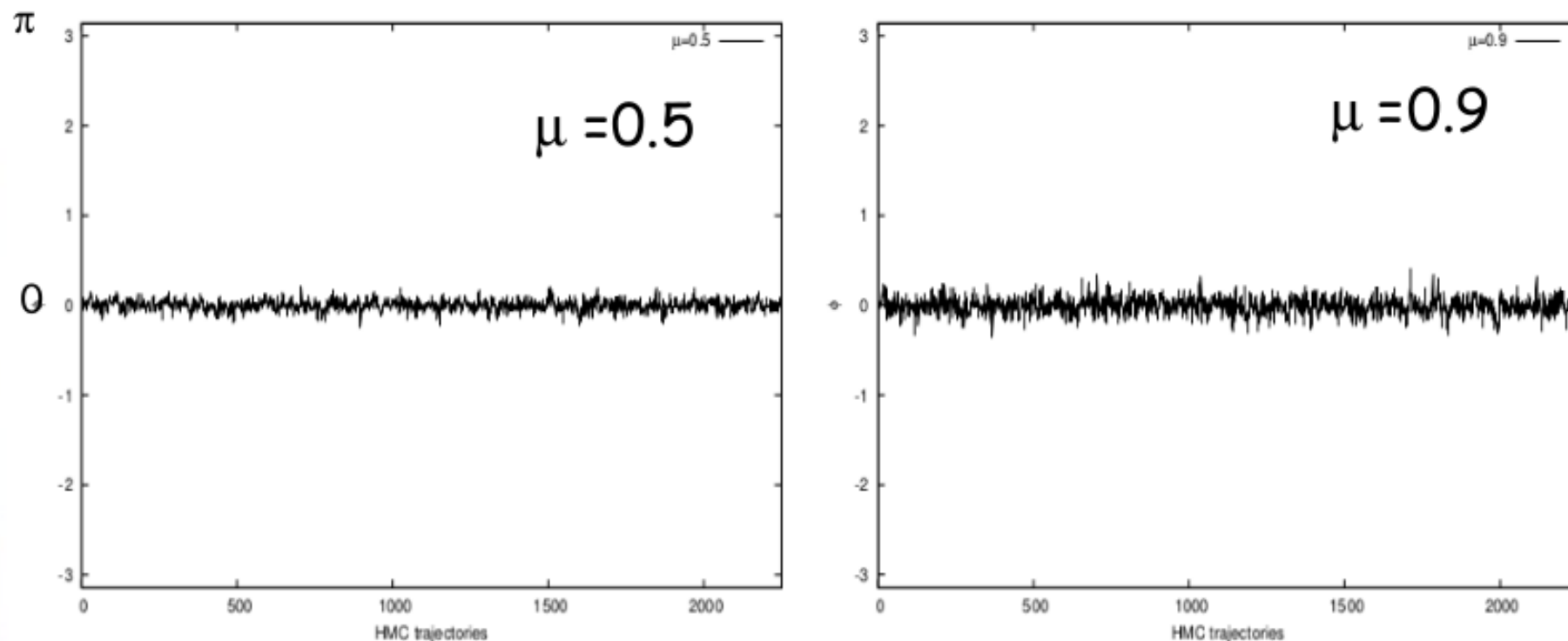
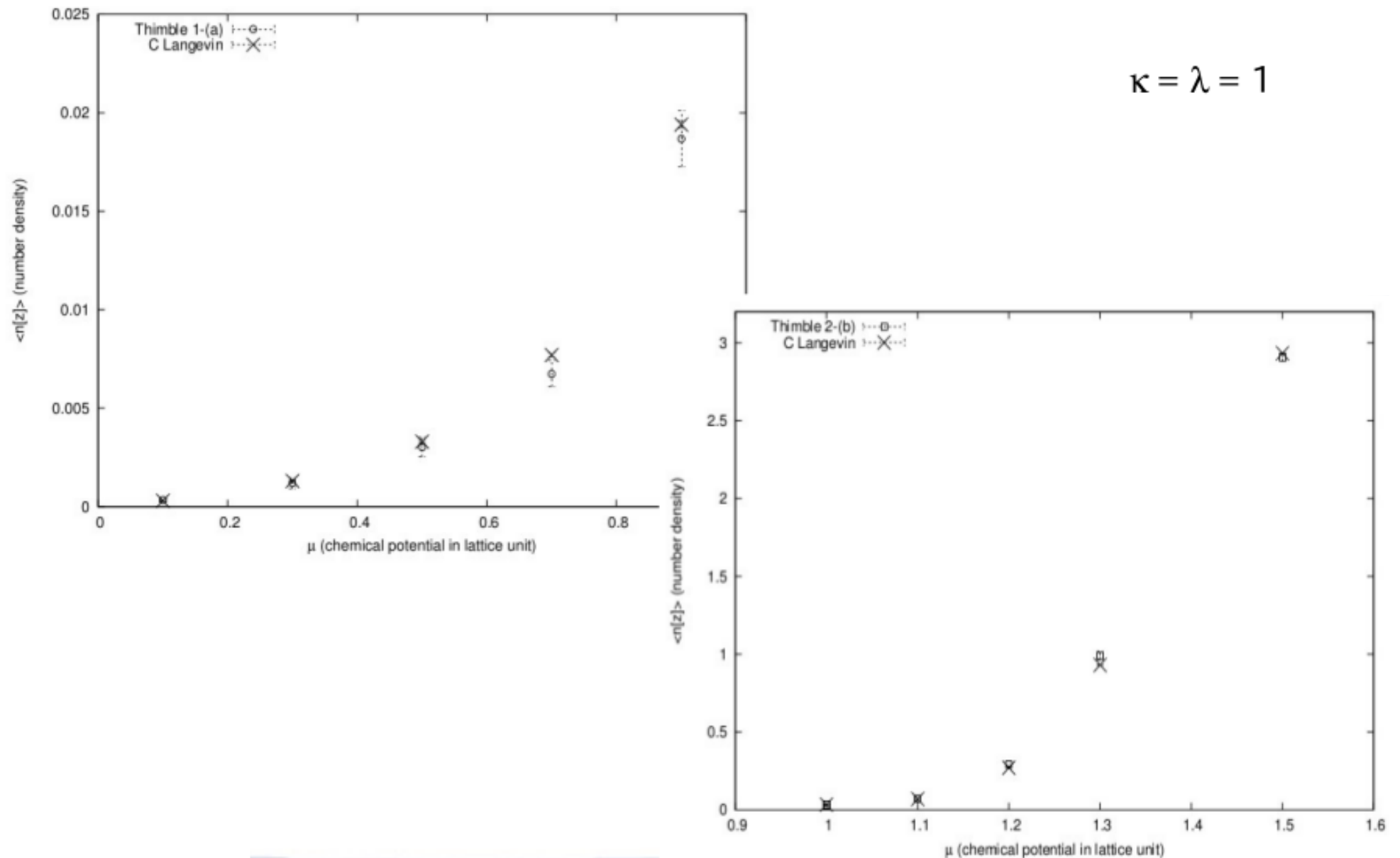


Figure 3. Monte Carlo histories of ϕ_z for $\mu = 0.5$ and 0.9 ($\kappa = 1.0$, $\lambda = 1.0$, $L = 4$).

HMC result vs CLE result



3. 荷電 Φ^4 理論への適用

- 残る符号問題は再荷重で考慮できる(正しい補正)

Reweighting works well for residual phase

$$\langle O[z] \rangle_{\mathcal{J}_\sigma} = \frac{\langle e^{i\phi z} O[z] \rangle'_{\mathcal{J}_\sigma}}{\langle e^{i\phi z} \rangle'_{\mathcal{J}_\sigma}} \quad \langle o[z] \rangle'_{\mathcal{J}_\sigma} = \frac{1}{N_{\text{conf}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{conf}}} o[z^{(k)}]$$

μ	Re $\langle n[z] \rangle_{\mathcal{J}_{\text{vac}}}$ (j.-k. error)		Re $\langle e^{i\phi z} n[z] \rangle'_{\mathcal{J}_{\text{vac}}}$	Re $\langle n[z] \rangle'_{\mathcal{J}_{\text{vac}}}$
0.1	3.34e-04	(9.2e-05)	3.35e-04	2.15e-04
0.3	1.20e-03	(2.7e-04)	1.19e-03	8.56e-04
0.5	3.02e-03	(5.0e-04)	3.01e-03	2.44e-03
0.7	6.74e-03	(6.7e-04)	6.71e-03	5.91e-03
0.9	1.89e-02	(1.4e-03)	1.85e-02	1.73e-02
1.0	3.14e-02	(4.3e-03)	3.12e-02	3.00e-02
1.1	7.17e-02	(1.3e-02)	7.12e-02	7.01e-02
1.2	2.92e-01	(1.8e-02)	2.90e-01	2.90e-01
1.3	9.88e-01	(2.6e-02)	9.85e-01	9.87e-01
1.5	2.91e-00	(2.7e-02)	2.90e-00	2.90e-00

3. Thirring 模型への適用

- Fermion 系の新しい側面 $\det D=0$

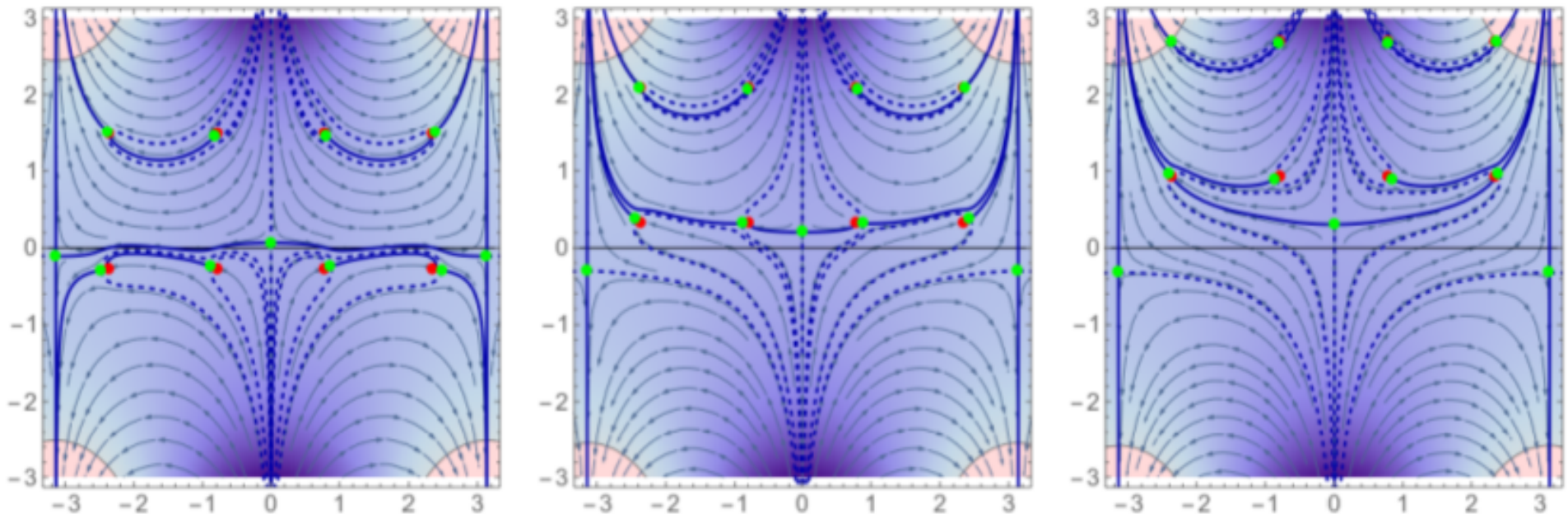
$$Z = \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{n=1}^L \frac{dA_n}{2\pi} e^{-\beta \sum_{n=1}^L (1 - \cos A_n)} \det D[A]$$

3. Thirring 模型への適用

- Fermion 系の新しい側面 $\det D=0$

$$Z = \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{n=1}^L \frac{dA_n}{2\pi} e^{-\beta \sum_{n=1}^L (1 - \cos A_n)} \det D[A]$$

sections at uniform A ($\beta=3, L=4$)



(a) $\hat{\mu} = 0.6$

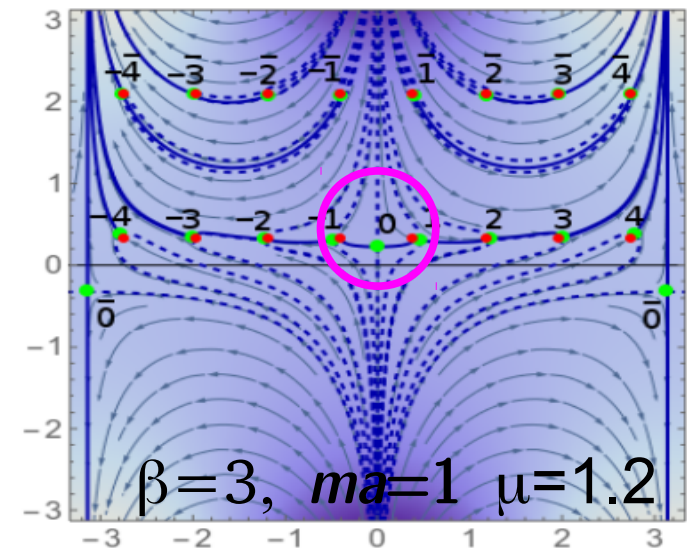
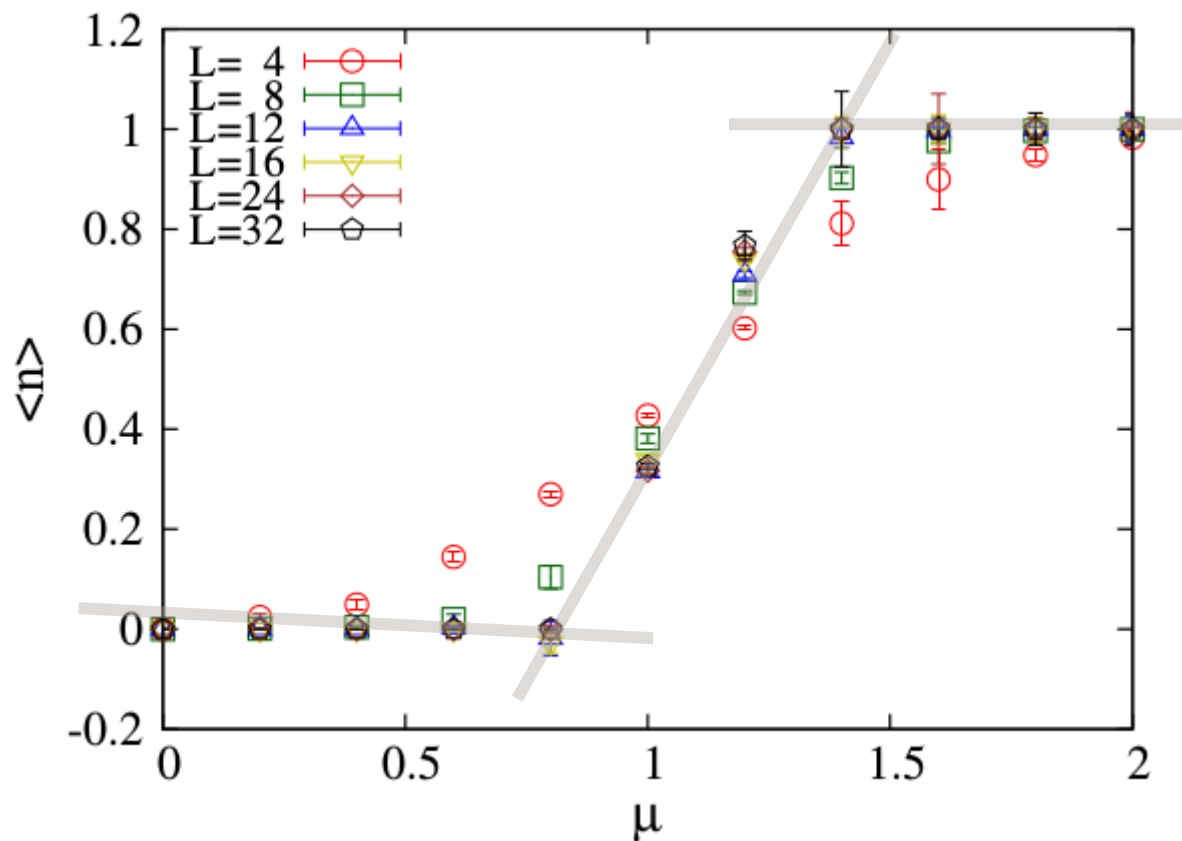
(b) $\hat{\mu} = 1.2$

(c) $\hat{\mu} = 1.8$

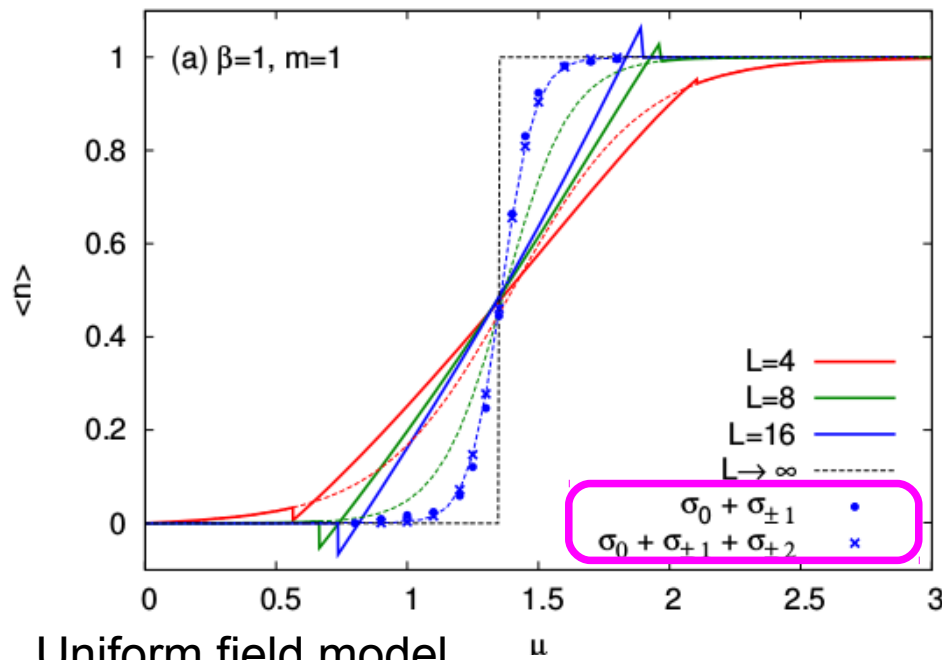
$\det=0$ ($S=\infty$) で Thimble が分断。複数 thimble が原理的に寄与

3. Thirring 模型への適用

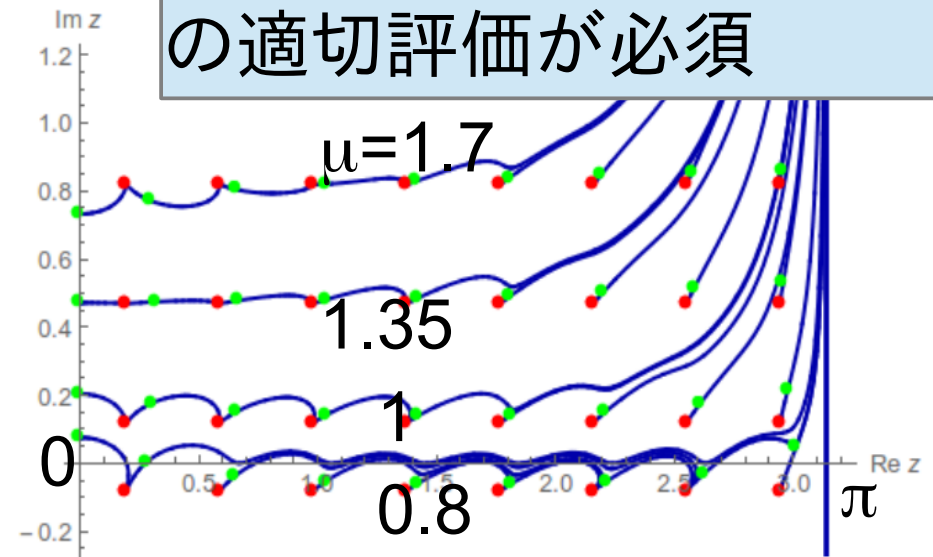
- 1 thimble での HMC シミュレーション
 - 1 次相転移に近づかない! $\Rightarrow$ 不十分



3. Thirring 模型 : 0 次元版の解析



複数 thimble の干渉効果
の適切評価が必須



Uniform field model

$\hat{\mu}$	$Z_0, \langle n \rangle_0$	0	1	2	3	4
0.8	2.04 1.3E-4	1.19 -7.33E-3	(0.43, 0.04) (3.73E-3, -7.351E-2)	— —	— —	— —
1.0	2.05 3.2E-3	1.50 0.1186	(0.28, -0.42) (-0.0508, -0.0774)	(-0.005, -0.021) (-6.9E-3, 0.6E-3)	(-1E-4, -1E-4) (-5E-5, 5E-5)	(-3E-7, -2E-7) (-9E-8, 2E-7)
1.35	3.80 0.46	9.09 1.17	(-2.72, -0.39) (-0.37, 0.23)	(0.07, 0.05) (0.016, -0.008)	(1E-3, -4E-4) (-9E-5, -4E-5)	(-3E-7, -2E-7) (-11E-8, 2E-7)
1.7	474.2 1.00	374.7 0.67	(51.0, 80.7) (0.16, 0.09)	(-1.3, 0.9) (-1E-4, 4E-3)	(1E-3, -2E-3) (-4E-6, -5E-6)	(-7E-7, -2E-7) (-7E-10, 2E-9)
1.35	54.91 0.47	569.97 5.05	(-298.63, -30.39) (-2.72, 0.84)	(42.60, 13.20) (0.45, -0.20)	(-1.51, -1.27) (-0.025, 6.6E-3)	(51.0, 80.7) (4.0, 0.0)

L=16

L=32

3. 複数 thimbles の必要と課題

- $\det D = 0$ ($S = \infty$) の点で、thimbles が分断される
- フェルミオン系の 1 次相転移では複数 thimbles の干渉が、Silver Blaze 現象の創出に本質的に大切
- Thimble 上の MC では、 $S = \infty$ の障壁を越えられない
 - 如何にして、複数 thimbles の効果を MC に載せるか？
- 複数 thimbles の干渉は、符号問題の再来ではないか (global sign problem) ?

3 . Flowing with flow

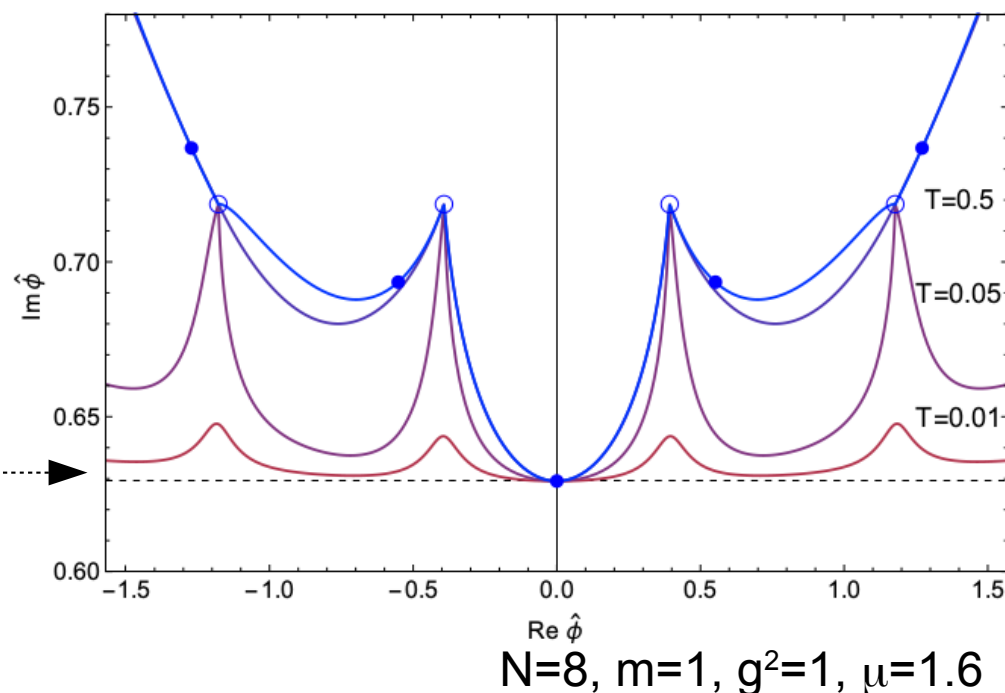
- 極を横切らない限り、複素積分路変形の下、積分値は不変

⇒ Thimble 直上に拘泥する必然はない

主要臨界点の接平面と、
thimbles の間を flow によ
って、自動的に！ 1パラメ
ータで繋ごう！

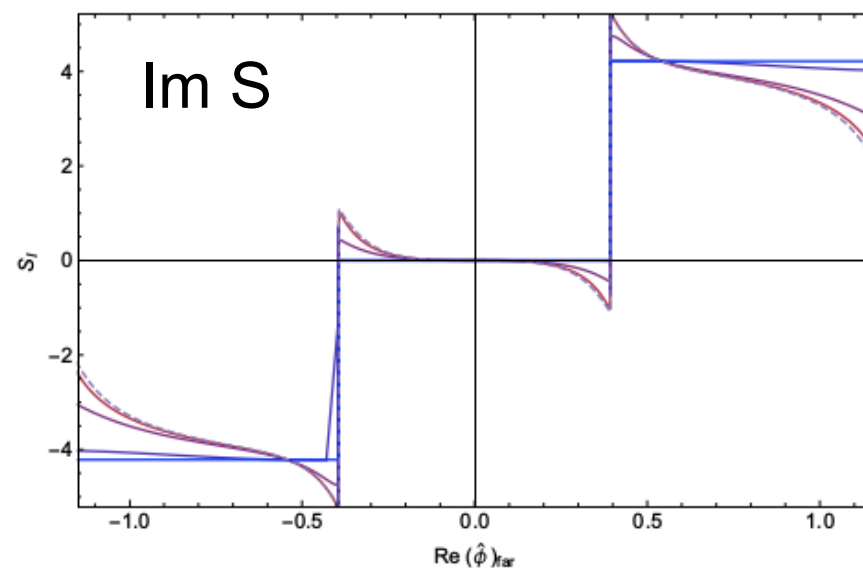
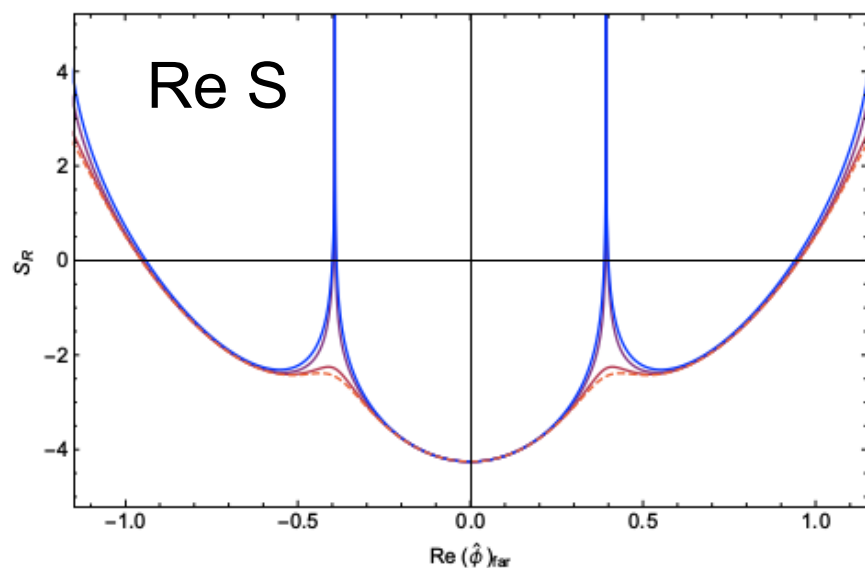
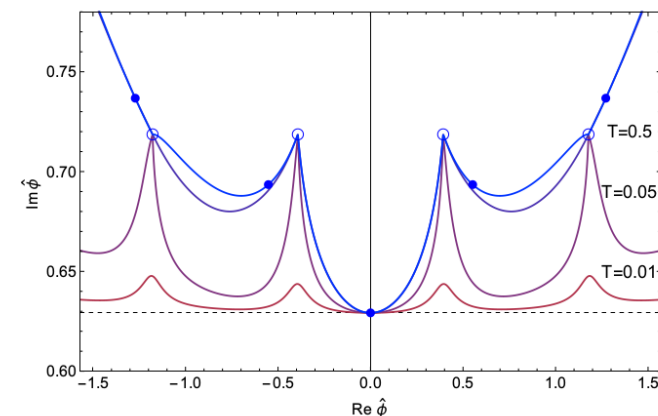
$$\frac{d}{d\tau} z_i = - \overline{\frac{dh}{dz_i}} \quad \text{接平面}$$

関係する臨界点を予め知
っておく必要がない



3 . Flowing with flow

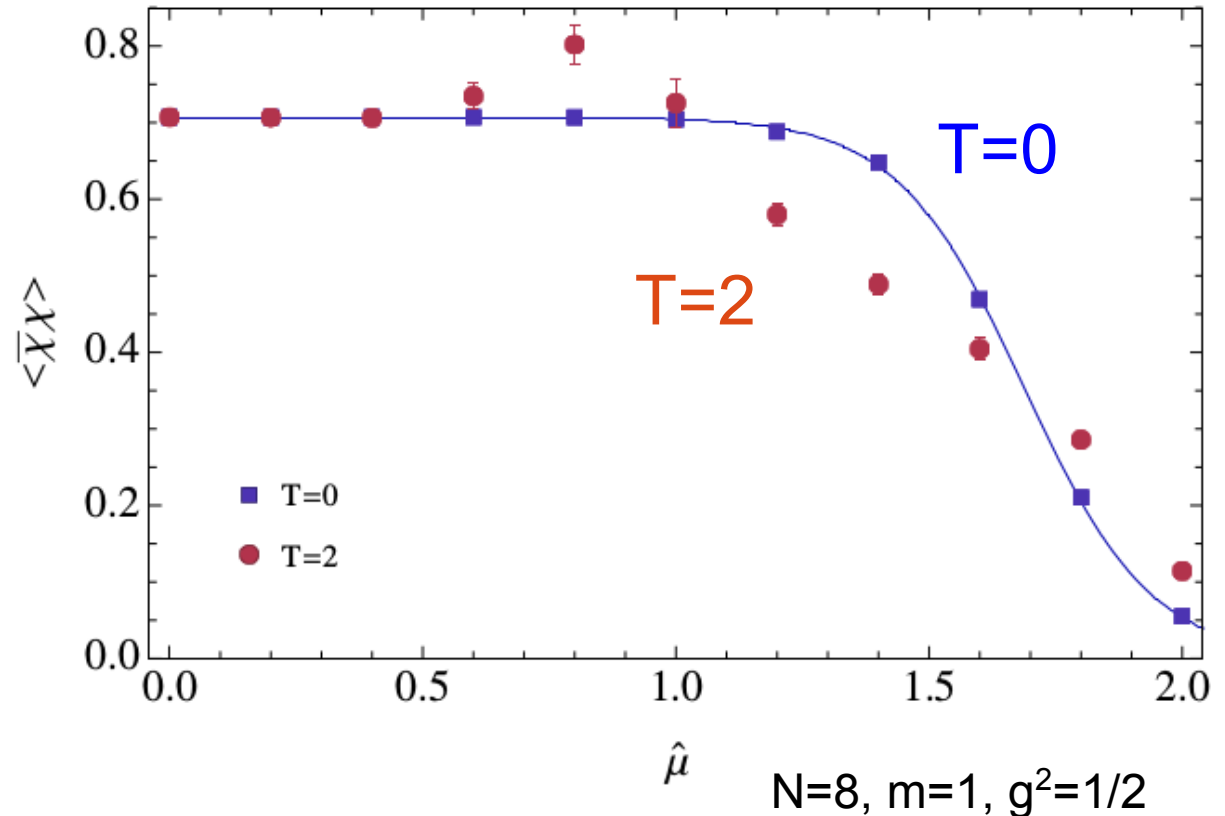
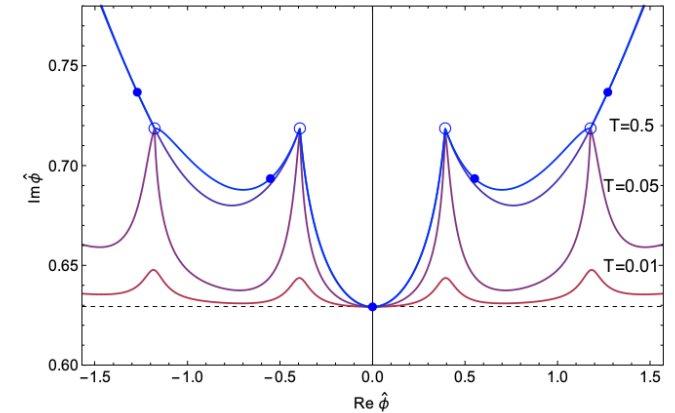
- Thimble から距離を保つことで、作用の障壁が下がる
- 接平面で、位相は既にある程度揃っている



場の振幅 $\text{Re } A$

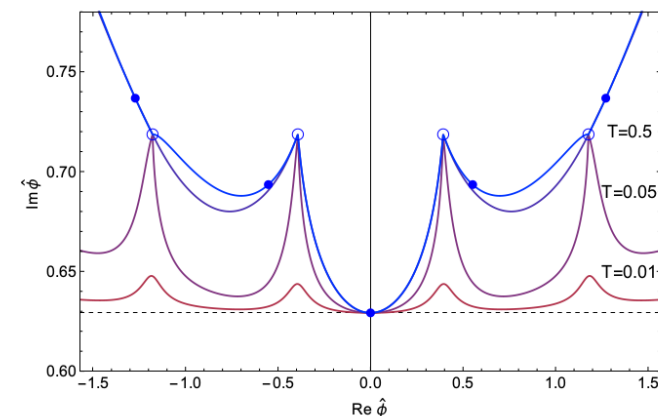
3 . Flowing with flow

- 接平面でのシミュレーションの
ほうが物理結果を再現する
- $T=2$ では厳密解
を再現しない。
 $\Rightarrow$ thimble 間を
遷移しないから

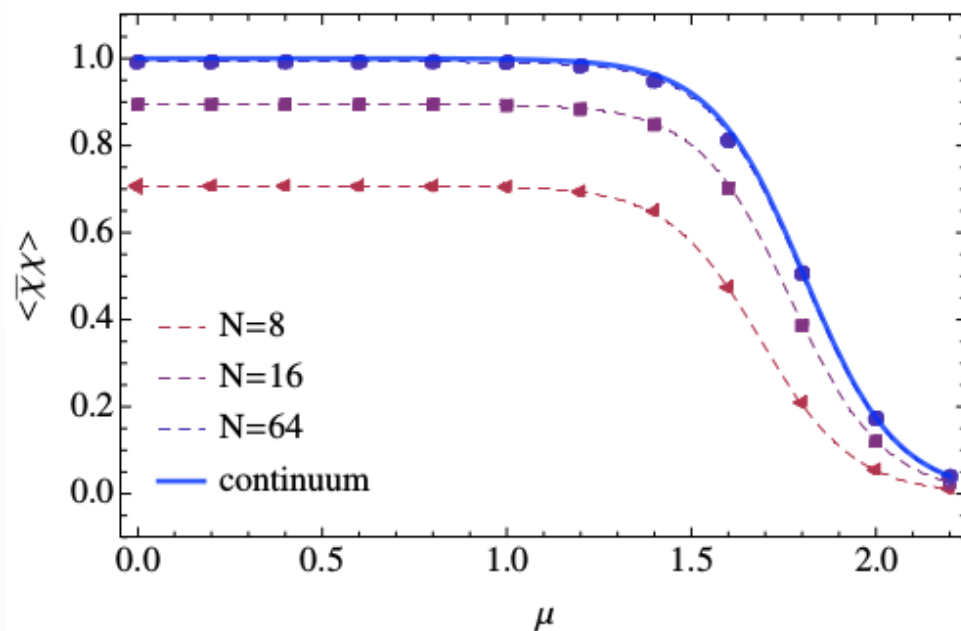


3 . Flowing with flow

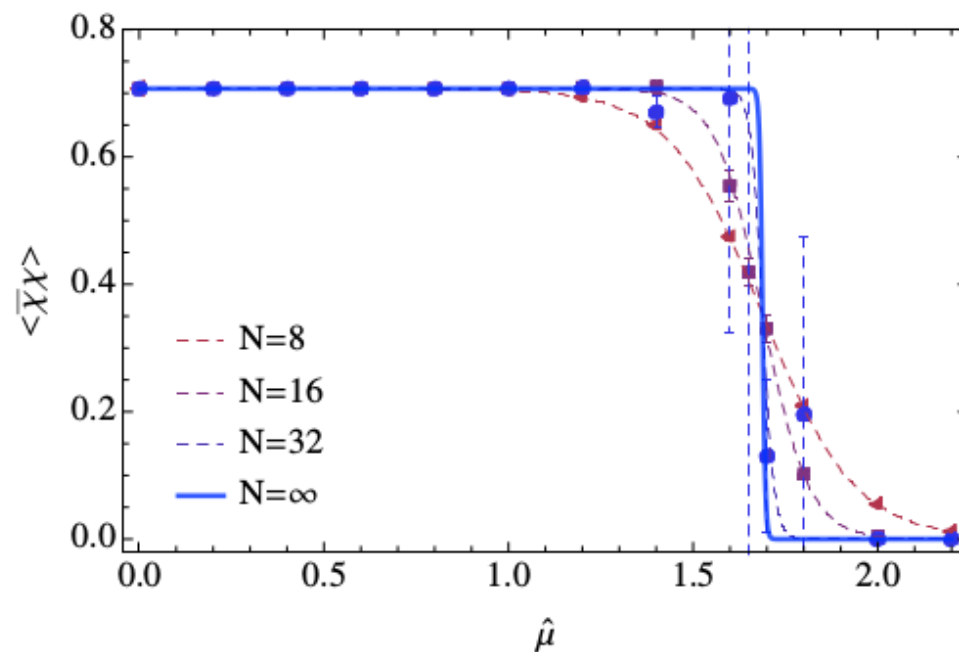
- 複数 Thimbles を考慮
⇒ 物理結果を再現



連続極限 $g^2N, mN, \mu N$ fixed



低温極限



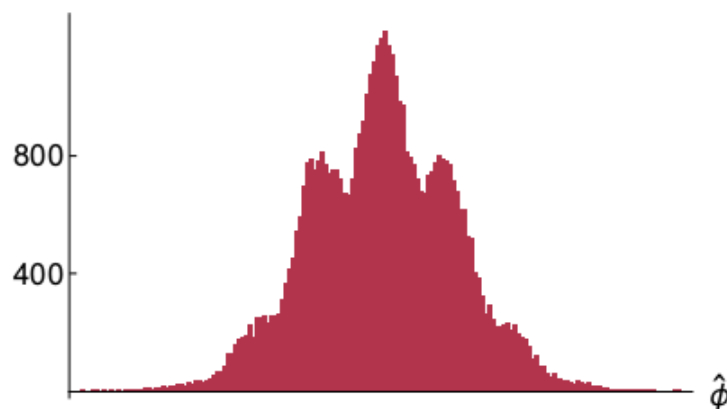
$T=0.5$

$N=8, m=1, g^2=1/2$

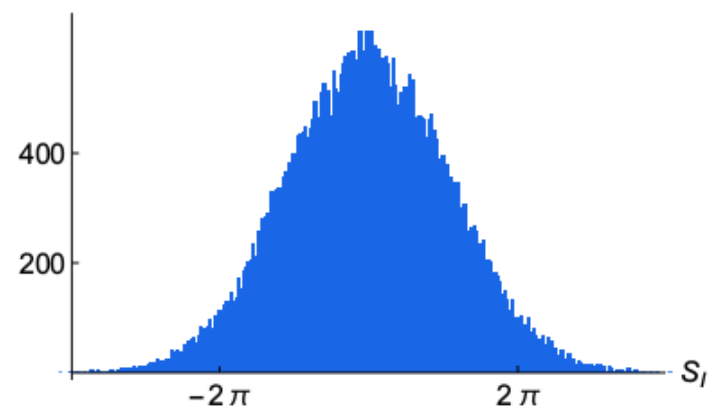
3 . Flowing with flow

- 複数 Thimbles を考慮

$T=0$

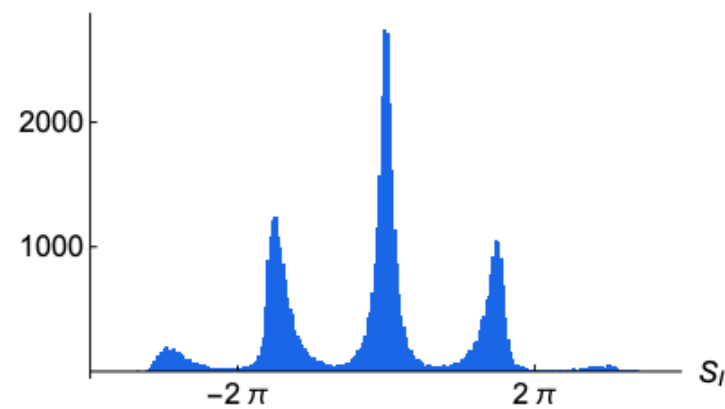
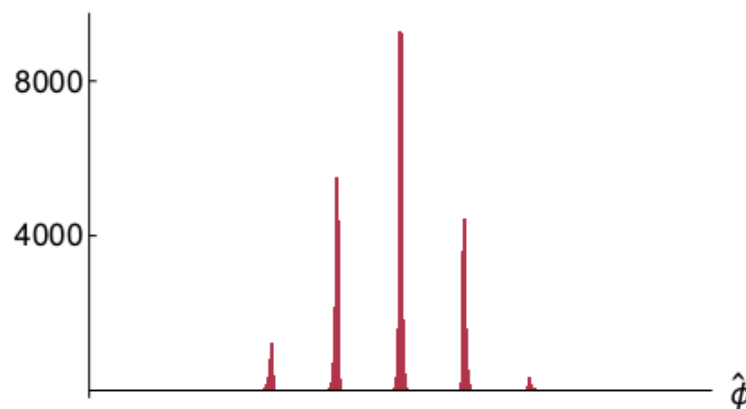


配位の度数分布



位相の度数分布

$T=0.5$



3 . Flowing with flow その後の進展

- 複数 Thimbles を系統的に取り込む
 - Paralell tempering (Umeda-Fukuma)
- 複素空間内で、積分路の最適化条件を課して、積分路を設定する (Mori-Kashiwa-Ohnishi)
 - 平均位相因子が大きくなるように選ぶ
 - Deep learning の手法

3. (一般化) Thimble の方法

- 理論的基礎づけがある方法
 - ただしく評価すると、正しい結果を与える
- Jacobian の計算を含むことから、重たい
 - 軽減策の工夫
- フェルミオン一次相転移には、複数 thimbles 間の相殺が必要(そう)
 - MC で評価できるか？
 - 系のサイズ依存性はどうか？

4. 展望: 実時間量子シミュレーション

- 非平衡量子現象の記述にむけて

Berges-Stamatescu, PRL95 ('05)
Koike-Tanizaki, Ann.Phys.351 ('14)
Alexandru et al. PRL117('16)

$$\text{Tr}[\rho\phi(t)\phi(t')] = \text{Tr}[\rho e^{iHt}\phi(0)e^{-iH(t-t')}\phi(0)e^{-iHt'}]$$

$$\begin{aligned} Z[J; \rho] &= \text{Tr}\{\rho T_C e^{i \int_C J(x)\Phi(x)}\} \\ &= \int d\varphi_1 d\varphi_2 \rho(\varphi_1, \varphi_2) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [d\varphi] e^{i \int_C (L(x) + J(x)\varphi(x))} \end{aligned}$$

- 指数関数の肩が“純虚数”

4. 展望: 実時間量子シミュレーション

- 非平衡量子現象の記述にむけて

$$C(\hat{t}) = \left\langle \frac{1}{N_s^3} \sum_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{\phi}(1, \hat{\mathbf{x}}) \hat{\phi}(\hat{t}, \hat{\mathbf{x}}) \right\rangle$$

Berges-Stamatescu, PRL95 ('05)

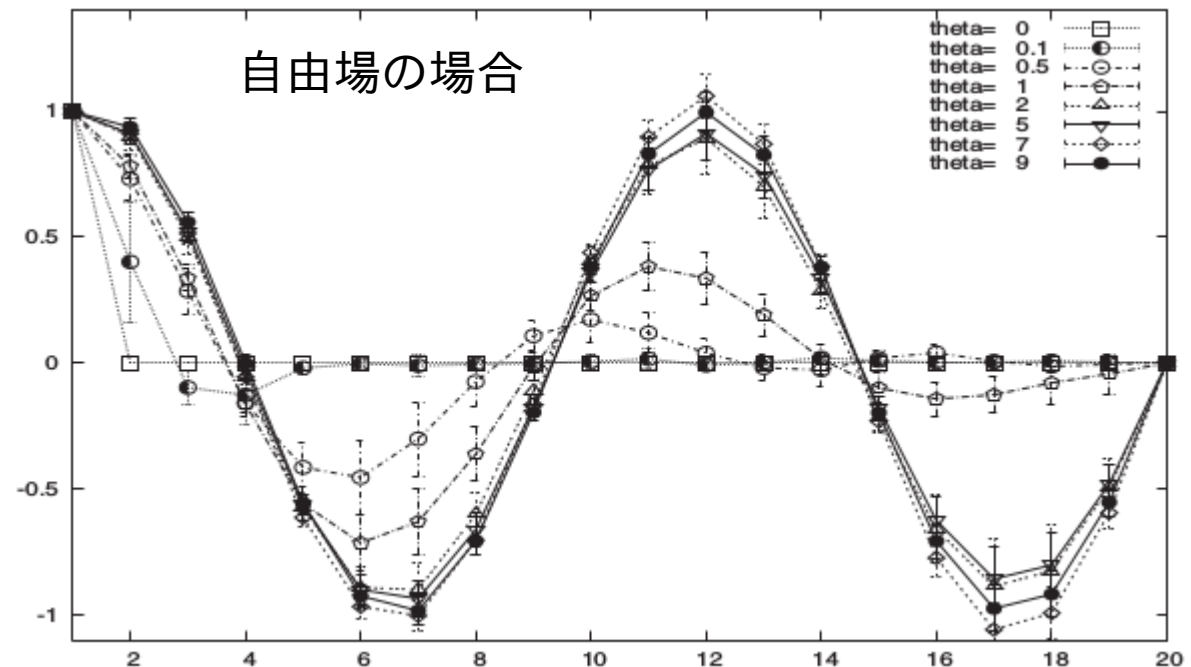
(3+1)+1シミュレーション

$8^3 \times 20$, $\theta=0-9$

振動解を再現!

$\Phi 4$ もやっている

問題; 長時間シミュレーションが不安定解に向かう



まとめ

- 複素ランジュバン方程式
 - シンプルで強力なツール
 - (1次)相転移領域で注意が必要: 特異ドリフト問題
- Thimble 積分および一般化
 - 基礎づけはあるが、数値計算が重い
 - (1次)相転移と複数 thimbles の符号問題(再来?否?)
 - QCD へ?
- 将来性
 - 複素ランジュバンの方法と Thimble の方法: 関係?
 - 相図の解明
 - 実時間シミュレーション