

原子核集団現象への平均場アプローチ 第4回 大振幅集団運動理論

日野原 伸生

筑波大学計算科学研究センター
原子核理論研究室



Aug. 8, 2018

2018年度原子核三者若手夏の学校

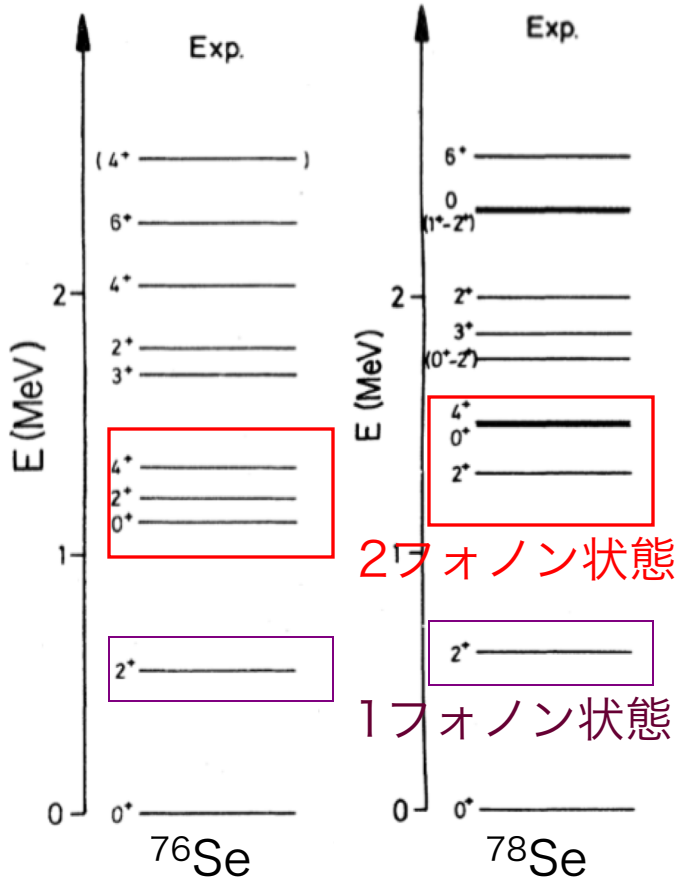
講義計画

- 1. イントロダクション
 - 平均ポテンシャルと一粒子運動・集団運動
 - 対相関
- 2. 平均場理論
 - Hartree-Fock, Hartree-Fock-Bogoliubov
 - 原子核密度汎関数理論
- 3. QRPA
 - RPA, QRPA
 - 線形応答理論
 - 有限振幅法
- 4. 大振幅集団運動の理論
 - ボソン展開法
 - 生成座標法
 - 時間依存Hartree-Fock-Bogoliubov
 - 自己無撞着集団座標法

大振幅集団運動

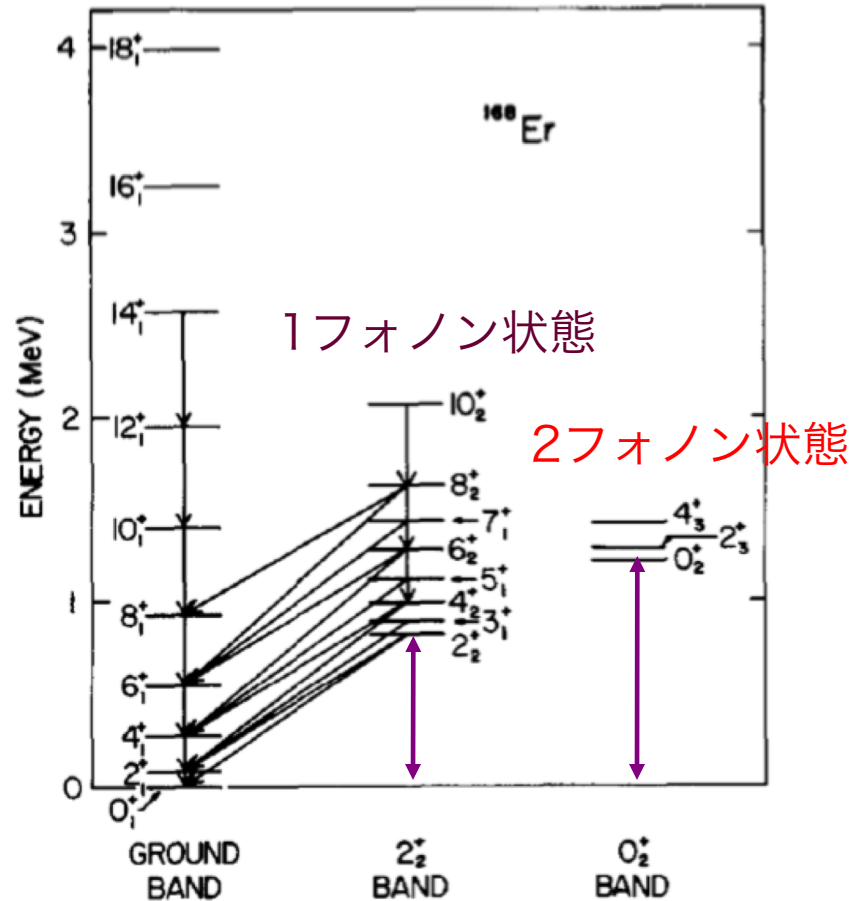
□ 非調和振動

球形核



Lie and Holzwarth, Phys. Rev. C 12,1035(1975)

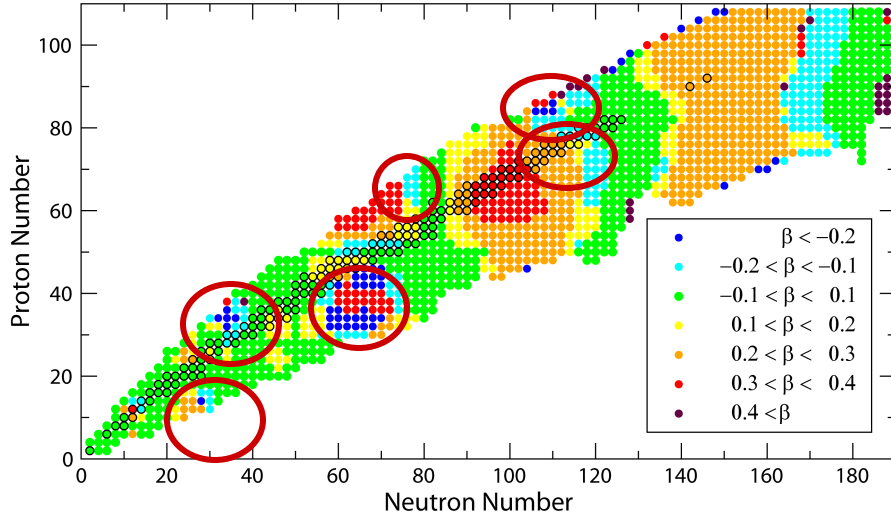
変形核(非調和 γ 振動)



Kotolinski et al. Nucl. Phys. A 517 365 (1990)

大振幅集団運動

変形共存

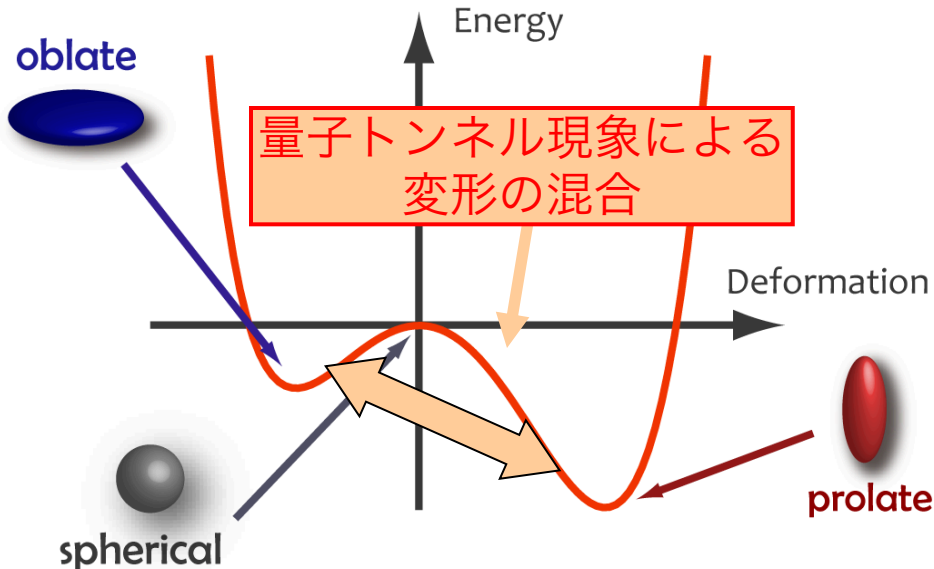


平均場解が同じ原子核で共存

- 核図表で隣の原子核と変形度が突然変わる
- 励起状態に異なる変形状態が現れる場合
- 変形状態は固有状態ではない→変形の混合

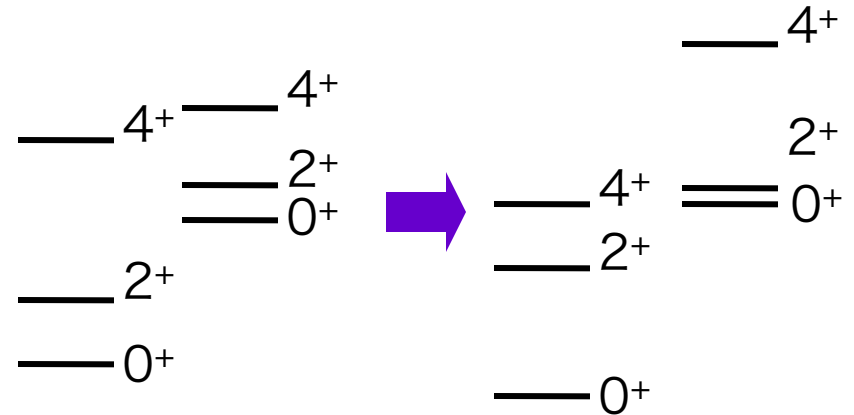
変形の混合

変形ポテンシャル



before mixing

after mixing



エネルギーレベルが不規則に

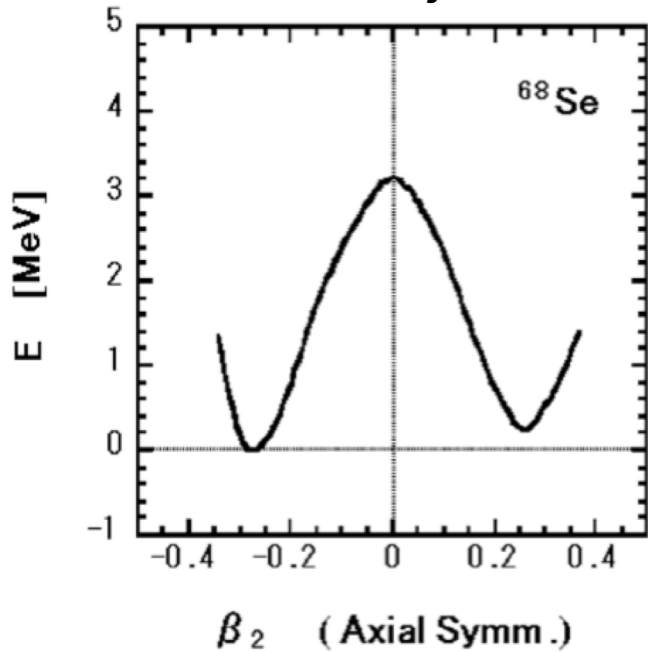
変形共存原子核の実験データ

陽子過剰核Se 同位体でのオブレート・プロレート変形共存

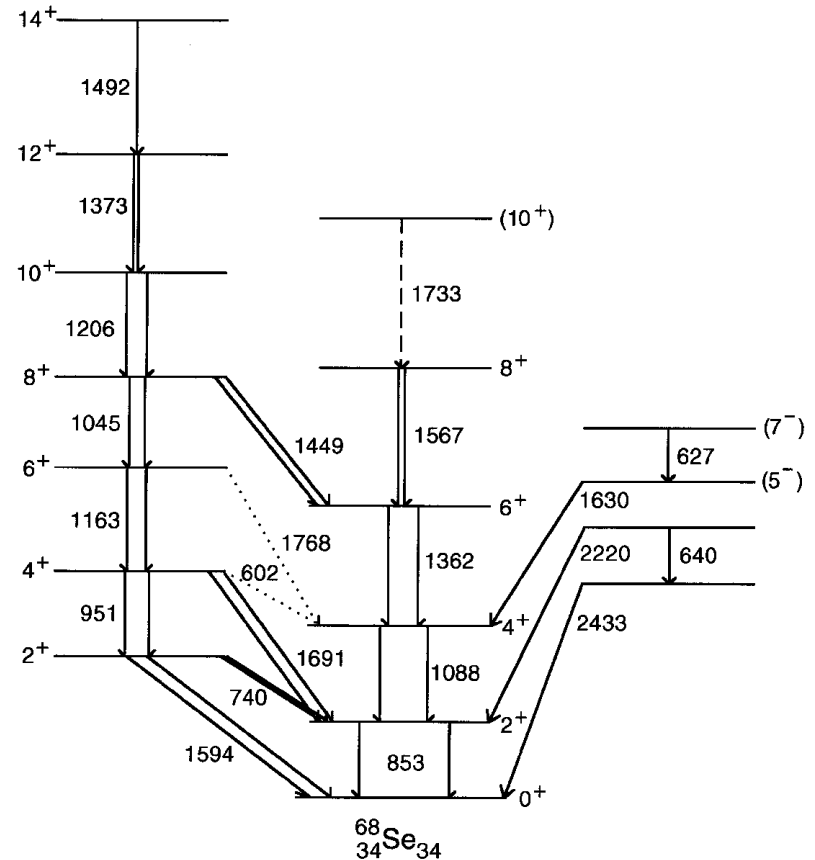
^{68}Se

実験データ

理論計算：Skyrme HFB



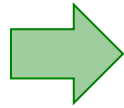
Yamagami, et al., NPA693 (2001) 579



集団運動の理論

小振幅の理論

- QRPAあるいは線形応答理論
 - 平均場の微小変化(2準粒子励起など)を取り扱う



変形共存・変形相転移などは取り扱えない

大振幅の理論

- 摂動論(QRPA+高次効果) (second QRPA, ボソン展開など)
- 非摂動論
 - 生成座標法(GCM)
 - 時間依存平均場理論

ボソン展開法

QRPA: 2準粒子(phペア)で励起フォノンを記述

2準粒子(2フェルミオン演算子) ~ ボソン

例：角運動量演算子 $\hat{J}_k = \sum_{ij} \langle i | \hat{J}_k | j \rangle c_i^\dagger c_j$ $[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hat{J}_z$ $[\hat{J}_z, \hat{J}_+] = \hat{J}_+$

ボソン演算子を導入 $[\hat{B}, \hat{B}^\dagger] = 1$ $\hat{B}|0\rangle = 0$ ボソン空間の真空

Holstein-Primakoff表示

Dyson表示

Schwinger表示

$$(J_+)_B = \sqrt{2I} \hat{B}^\dagger \sqrt{1 - \frac{1}{2I} \hat{B}^\dagger \hat{B}}$$

$$(J_-)_B = \sqrt{2I} \sqrt{1 - \frac{1}{2I} \hat{B}^\dagger \hat{B}} \hat{B}$$

$$(J_z)_B = -I + \hat{B}^\dagger \hat{B}$$

$$(J_+)_B = \sqrt{2I} \hat{B}^\dagger \left(1 - \frac{1}{2I} \hat{B}^\dagger \hat{B} \right)$$

$$(J_-)_B = \sqrt{2I} \hat{B}$$

$$(J_z)_B = -I + \hat{B}^\dagger \hat{B}$$

$$(J_+)_B = \hat{B}^\dagger \hat{A}$$

$$(J_-)_B = \hat{A}^\dagger \hat{B}$$

$$(J_z)_B = \frac{1}{2} (\hat{B}^\dagger \hat{B} - \hat{A}^\dagger \hat{A})$$

演算子はエルミート

角運動量の交換関係を満たす

無限個のボソンが必要

(角運動量の場合は高々2I)

演算子はエルミートではない

角運動量の交換関係を満たす

有限個のボソンで表現

二種類のボソン

$$[\hat{A}, \hat{A}^\dagger] = 1$$

$$[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{A}, \hat{B}^\dagger] = 0$$

ボソン空間 : $|0\rangle, \hat{B}^\dagger|0\rangle, \dots (\hat{B}^\dagger)^i|0\rangle, \dots$ で $|IM\rangle$ を表現

Schwinger表示の場合は二次元ボソン空間

ボソン展開法

$$\text{ボソン} \quad \hat{B}_\mu |0\rangle = 0 \quad [\hat{B}_\mu, \hat{B}_{\mu'}^\dagger] = \delta_{\mu\mu'} \quad [\hat{B}_\mu, \hat{B}_{\mu'}] = 0$$

Belyaev-Zelevinsky型ボソン展開

交換関係が保存するようにフェルミオン対 \leftrightarrow ボソンの写像を作る

Marumori型ボソン展開

行列要素が保存するようにフェルミオン対 \leftrightarrow ボソンの写像を作る

$$\hat{O}_B = \sum_{nn'} \langle n | \hat{O}_F | n' \rangle |n\rangle \langle n'|$$

Dyson型ボソン展開

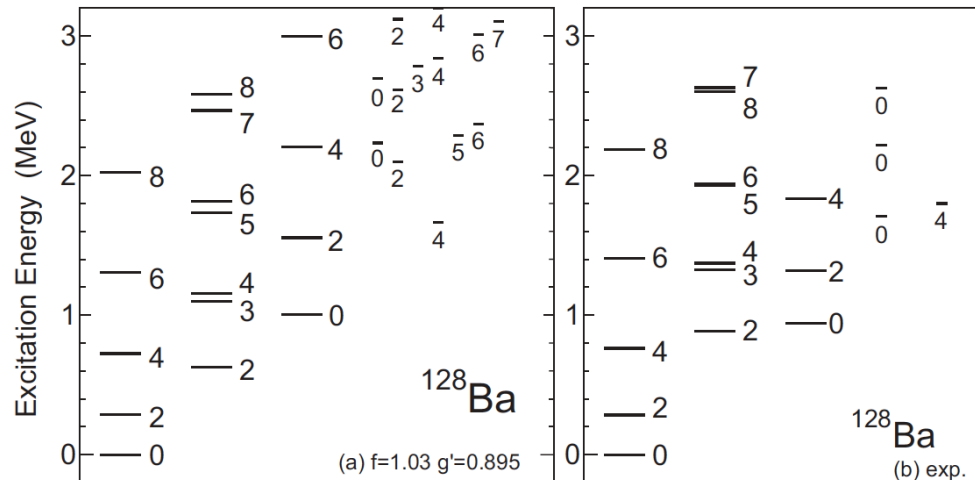
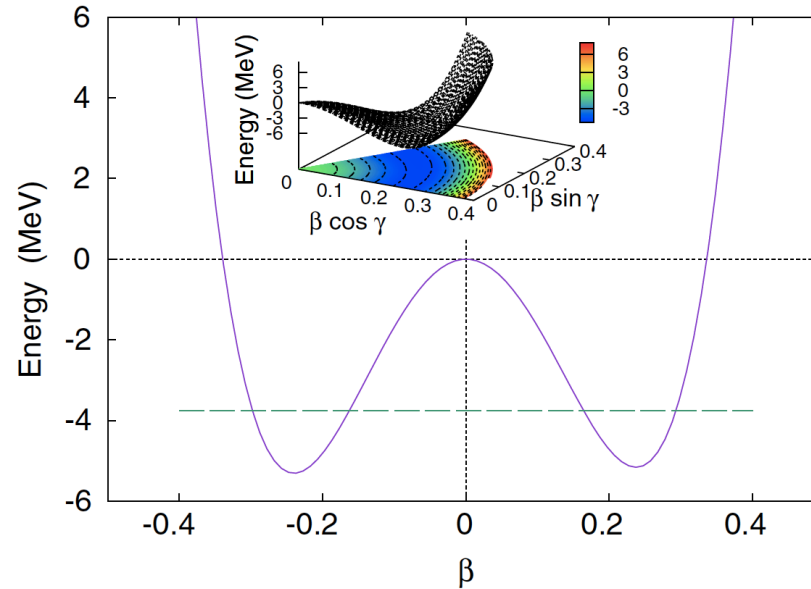
Dyson表示の一般形を用いる。

フェルミオン対としては例えば集団的なものを使う(TDA)

$$\hat{O}_\nu^\dagger = \sum_{ph} C_{ph}^\nu d_p^\dagger b_h^\dagger$$

ボソン展開法の応用例

Kishimoto-Tamuraの方法



生成座標法(generator coordinate method)

平均場(HFB状態)を重ね合わせて状態を作る

$$|\Psi_\alpha\rangle = \int dq f_\alpha(q) |\Phi(q)\rangle$$

q: 生成座標

f(q): 重み関数(weight function)

$|\Phi(q)\rangle$: GCMの基底波動関数(平均場)

生成座標とは

平均場を特徴づける量

$$|\Phi(Z)\rangle = e^{i \sum_{\mu < \nu} Z_{\mu\nu} \alpha_\mu^\dagger \alpha_\nu^\dagger} |\Phi_{\text{HFB}}\rangle \quad (\text{Thoulessの定理})$$

例えばZを生成座標とすれば任意のSlater行列式が表現できる

一般的には**少数の”集団的”で重要なもの**に限定

例：四重極変形の期待値 $q_{20} = \langle \Phi(q_{20}) | \hat{Q}_{20} | \Phi(q_{20}) \rangle$

拘束付きHFB状態として $|\Phi(q)\rangle$ を計算

生成座標自体は理論から決定できない

生成座標法

重み関数 $f(q)$ の決定：変分により決定

$$\delta \frac{\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} = 0 \quad \longrightarrow \quad \int dq' \langle \Phi(q) | \hat{H} | \Phi(q') \rangle f_\alpha(q') = E_\alpha \int dq' \langle \Phi(q) | \Phi(q') \rangle f_\alpha(q')$$

Hill-Wheeler方程式

Norm Kernel (overlap) $\mathcal{N}(q, q') = \langle \Phi(q) | \Phi(q') \rangle$

GCMの基底は直交していない

Hamiltonian Kernel $\mathcal{H}(q, q') = \langle \Phi(q) | \hat{H} | \Phi(q') \rangle$

基底の直交化(Norm Kernelの対角化)

$$\int dq' \mathcal{N}(q, q') u_k(q') = n_k u_k(q) \quad n_k: \text{ノルムの固有値}$$

固有ベクトル $\sum_k u_k(q) u_k^*(q') = \delta(q - q')$ $\int dq u_k^*(q) u_{k'}(q) = \delta_{kk'}$

$$\mathcal{N}^{1/2}(q, q') \equiv \sum_k u_k(q) \sqrt{n_k} u_k^*(q')$$

$$\mathcal{N}^{-1/2}(q, q') \equiv \sum_k u_k(q) \frac{1}{\sqrt{n_k}} u_k^*(q')$$

生成座標法

Hill-Wheeler方程式
$$\int dq' \mathcal{H}(q, q') f_k(q') = E_k \int dq' \mathcal{N}(q, q') f_k(q')$$

Norm Kernelを左辺に移動
$$\int dq''' \int dq'' \int dq' \mathcal{N}^{-1/2}(q, q') \mathcal{H}(q', q'') \mathcal{N}^{-1/2}(q'', q''') g_k(q''') = E_k g_k(q)$$

$$g_k(q) = \int dq' \mathcal{N}^{1/2}(q, q') f_k(q')$$

Norm Kernelにゼロ固有値があると $\mathcal{N}^{-1/2}$ は発散。
小さい固有値は和から除外(natural state)

natural stateで張られる空間(集団空間)でのHamiltonian

$$(\mathcal{H}_{\text{coll}})_{kk'} = \int dqdq' \frac{u_k^*(q)}{\sqrt{n_k}} \mathcal{H}(q, q') \frac{u_{k'}(q')}{\sqrt{n_{k'}}} \quad \sum_{k'} (\mathcal{H}_{\text{coll}})_{kk'} g_{k'\alpha} = E_k g_{k\alpha}$$

$$f_\alpha(q) = \sum_k \frac{g_{k\alpha}}{\sqrt{n_k}} u_k(q) \quad \text{集団波動関数} \quad g_\alpha(q) = \sum_k g_{k\alpha} u_k(q)$$

確率の解釈ができるのは集団波動関数 $g(q)$

重み関数 $f(q)$ は物理的意味のある振る舞いをしない

- ❑ GCMで生成座標について連続極限を取ると問題(ゼロ固有値が無限に出てくる)
- ❑ 通常は積分を離散化、ノルムの固有値が小さくなりすぎないようにすることが多い
- ❑ 複素生成座標を用いないと重心運動が記述できない

量子数射影

GCM基底に使う平均場が対称性を破っている場合量子数射影で対称性を回復させる

$$|\Psi_\alpha\rangle = \int dq f_\alpha(q) |\Phi(q)\rangle$$

量子数射影はGCMの特殊な場合に対応
(平均場の重ね合わせ、重み関数は決まったものを用いる)

粒子数射影演算子 $\hat{P}^N = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{i\phi(\hat{N}-N)}$

$$|\Phi^{N,Z}\rangle = \hat{P}^N \hat{P}^Z |\Phi\rangle \quad \text{粒子数の固有状態}$$

角運動量射影演算子 $\hat{P}_{MK}^J = \frac{2J+1}{8\pi^2} \int d\Omega D_{MK}^{J*}(\Omega) \hat{R}(\Omega)$

Euler角 $\Omega = (\alpha, \beta, \gamma)$ 回転の演算子 $\hat{R}(\Omega) = e^{i\alpha\hat{J}_z} e^{i\beta\hat{J}_y} e^{i\gamma\hat{J}_z}$

WignerのD関数(行列) $D_{MK}^{J*}(\Omega) = \langle JM | \hat{R}(\Omega) | JK \rangle$

$$|\Phi_{JMK}\rangle = \hat{P}_{MK}^J |\Phi\rangle \quad \text{角運動量の固有状態}$$

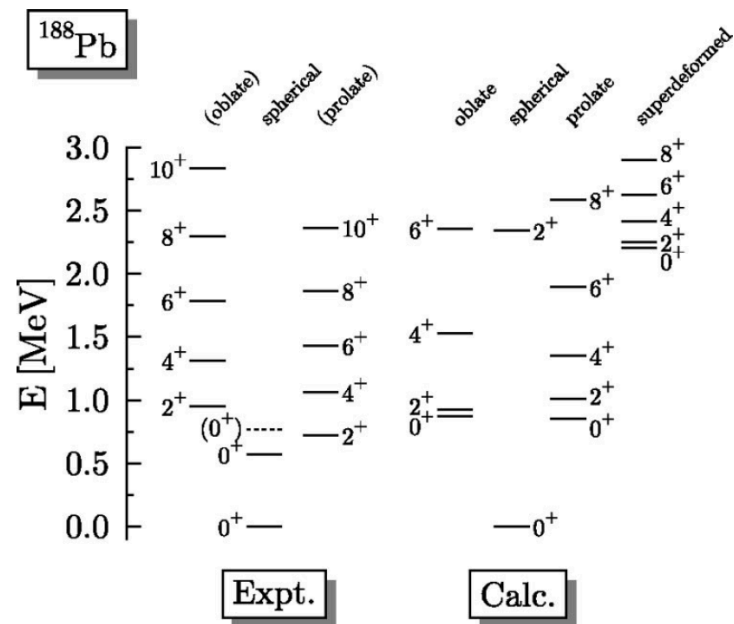
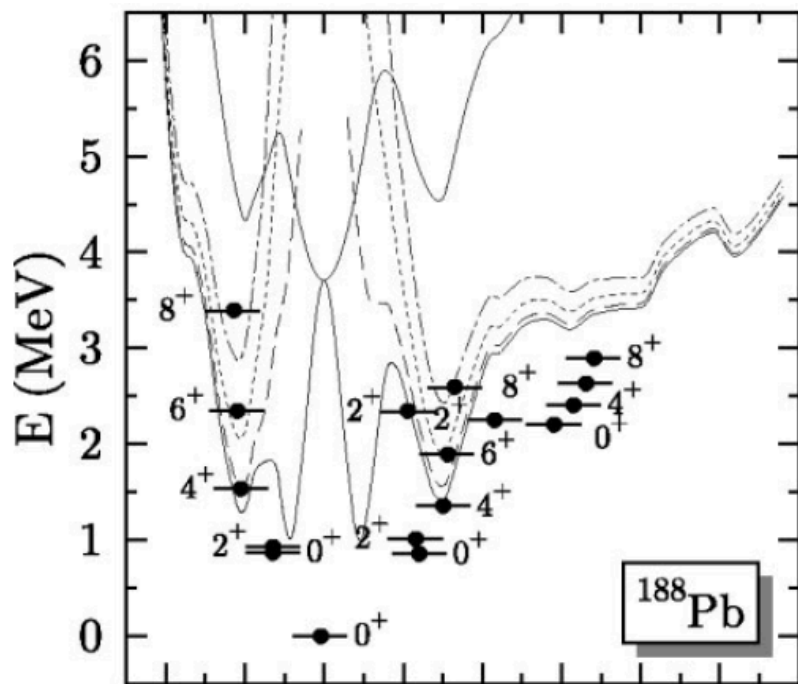
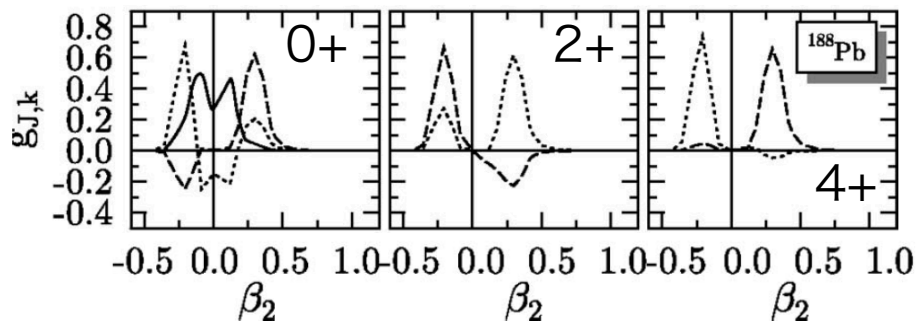
GCM基底としては $|\Phi_{JMK}^{NZ}\rangle = \hat{P}_{MK}^J \hat{P}^N \hat{P}^Z |\Phi\rangle$

GCMの計算例

生成座標： β (軸対称四重極変形)

GCM基底：Skyrme HF+BCS

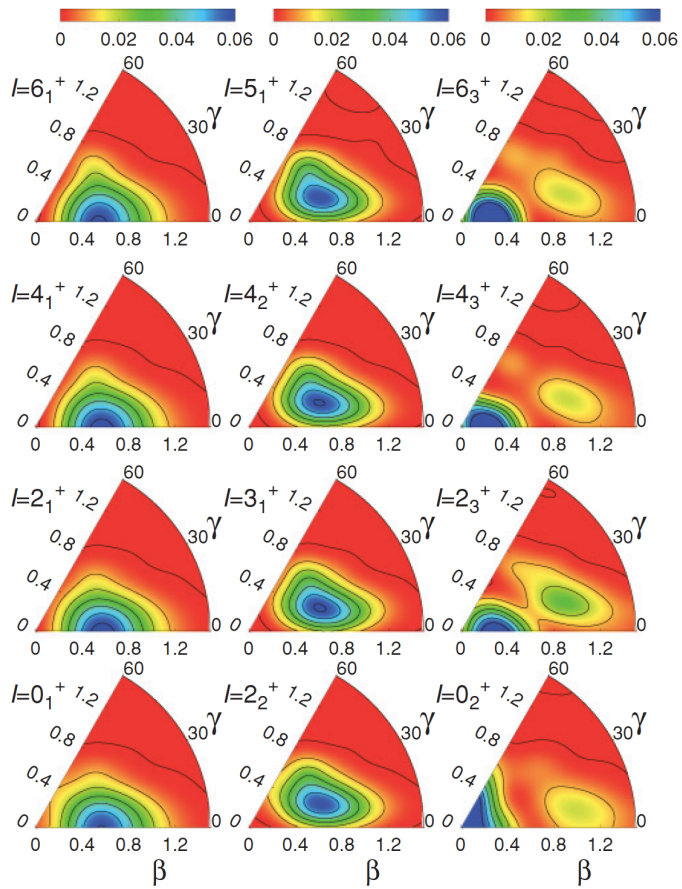
集団波動関数



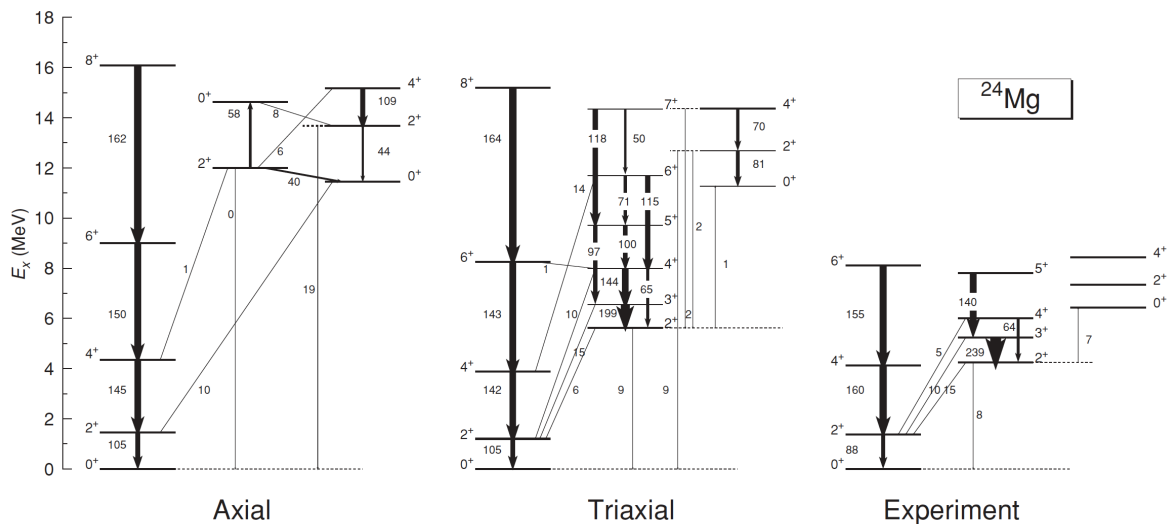
GCMの計算例

生成座標： β 、 γ (四重極変形)
Gogny HFB

集団波動関数 $g(\beta, \gamma)$



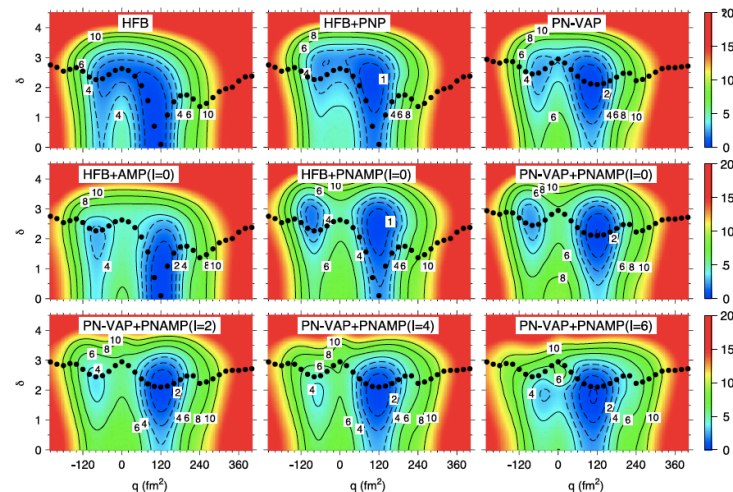
励起エネルギー



GCMの計算例

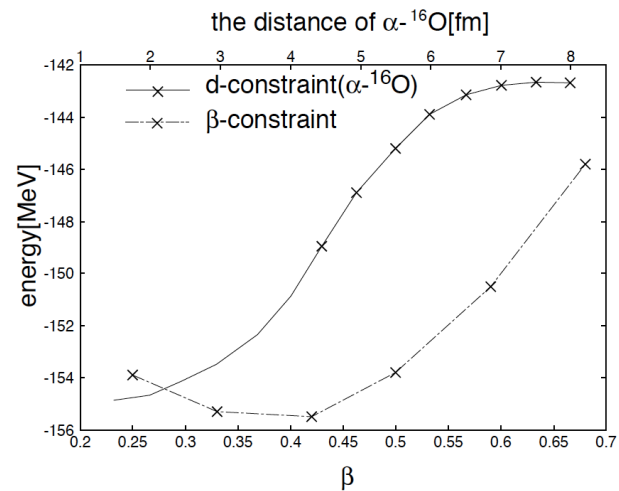
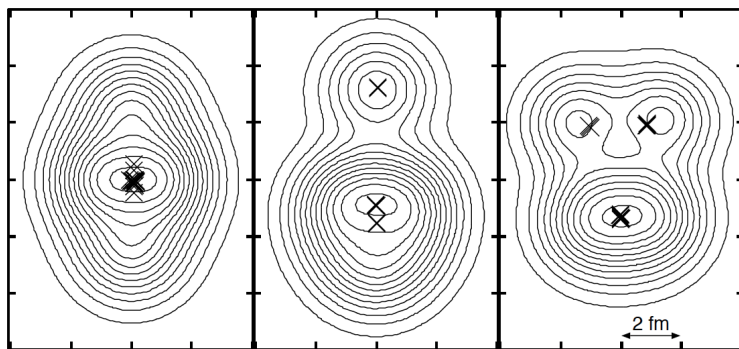
生成座標にpairingを用いた計算(Gogny)

$$\langle \phi | \hat{Q}_{20} | \phi \rangle = q, \quad \langle \phi | (\Delta \hat{N})^2 | \phi \rangle^{1/2} = \delta$$



Vaquero et al., Phys. Lett. B 704, 520 (2011)

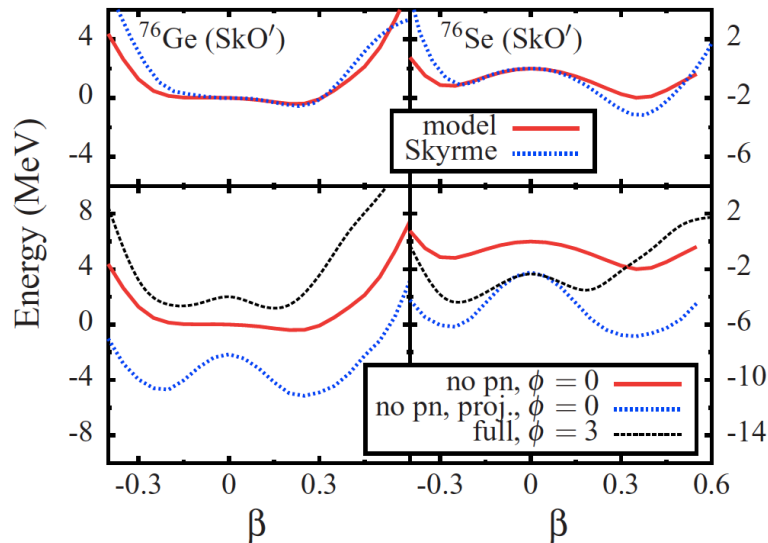
クラスター間の相対距離を生成座標に用いた計算 (AMD+GCM)



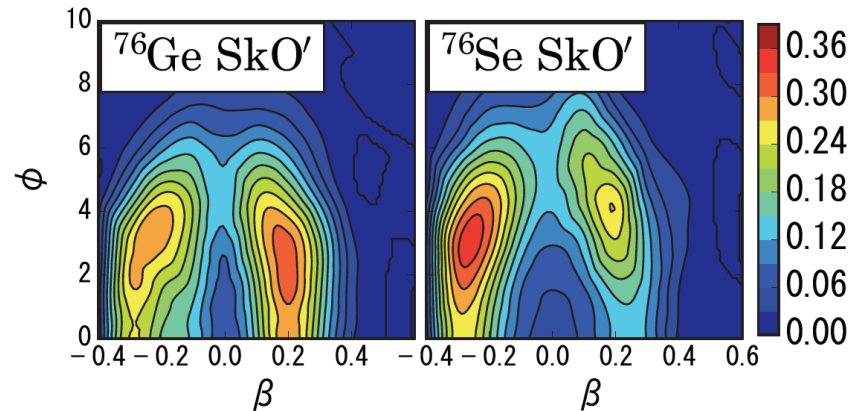
Taniguchi et al., Prog. Theor. Phys. 112, 475 (2004)

GCMの計算例

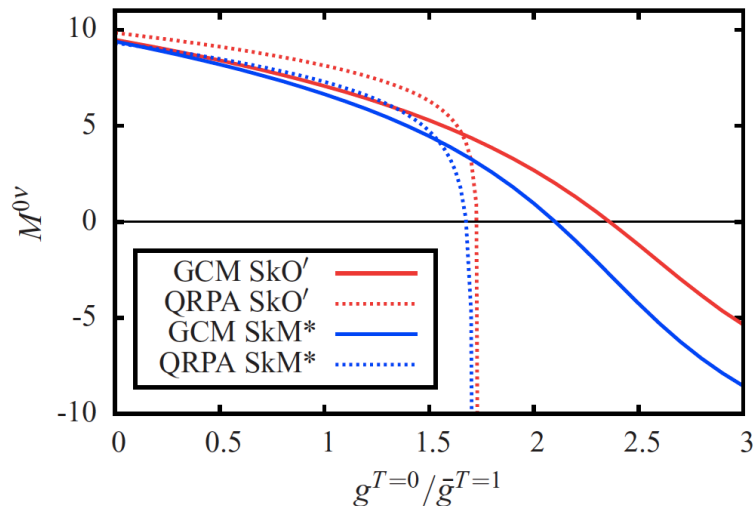
生成座標にneutron-proton pairingを入れたもの(schematic model)



集団波動関数 $g(\beta, \phi)$



二重ベータ崩壊の原子核行列要素($^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$)



アイソスカラー型対生成演算子

$$\hat{P}_\mu^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_l \sqrt{2l+1} [c_l^\dagger c_l^\dagger]_{L=0, S=1, T=0}^{L_z=0, S_z=\mu, T_z=0}$$

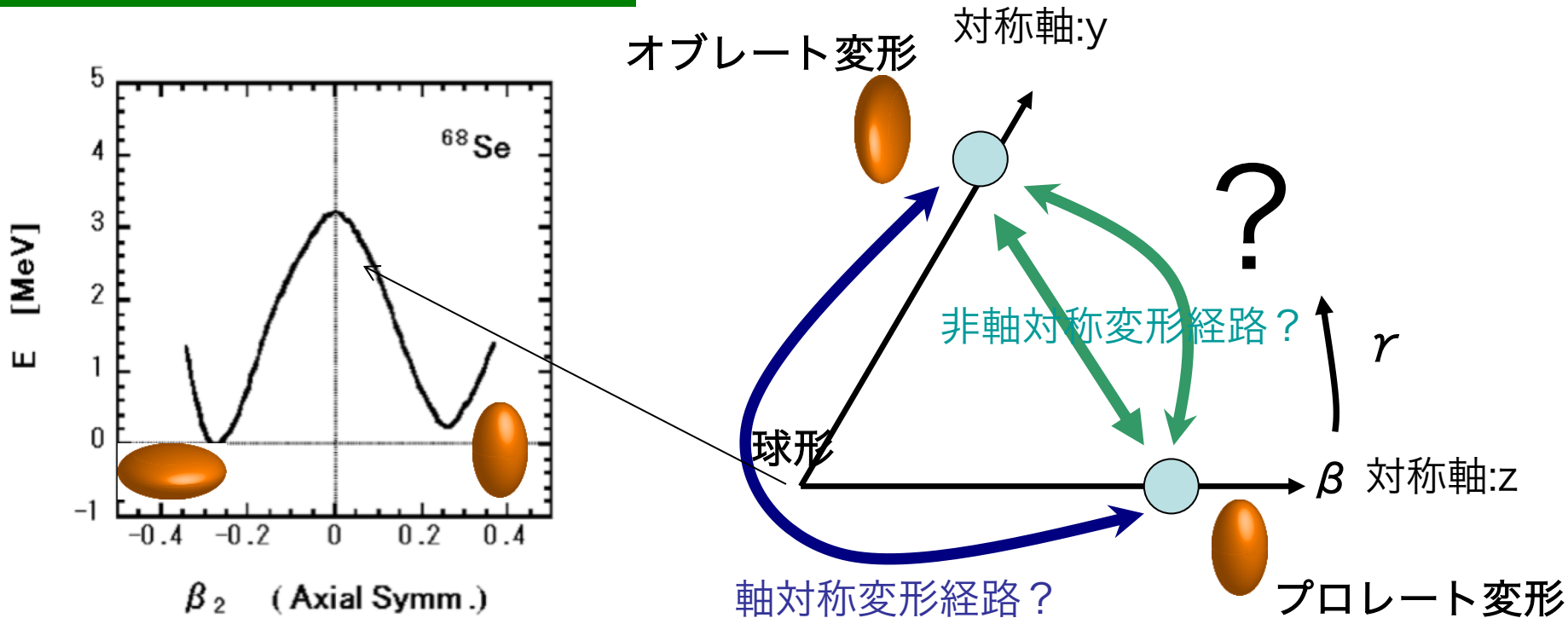
アイソスカラー型対の生成座標

$$\phi = \frac{1}{2} \langle \hat{P}_0 + \hat{P}_0^\dagger \rangle$$

集団的な自由度

- 集団座標(GCMでは生成座標)
 - 系の集団的振る舞いを表す少数のパラメター
 - 変形のパラメター ($\beta_2, \gamma, \beta_3, \dots$), 対ギャップ, etc
- 集団経路
 - 集団座標で書かれたスレーター行列式のセット

オブレート・プロレート変形共存



集団経路を理論から決められないだろうか？

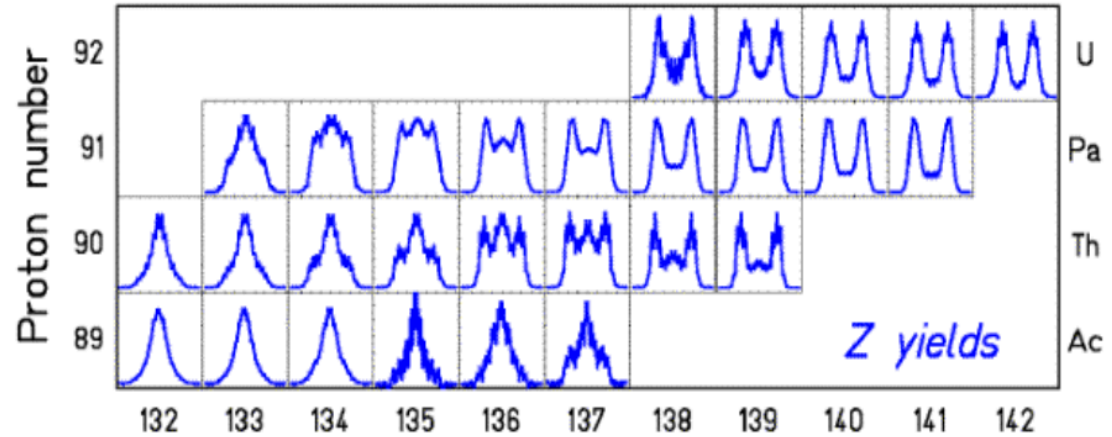
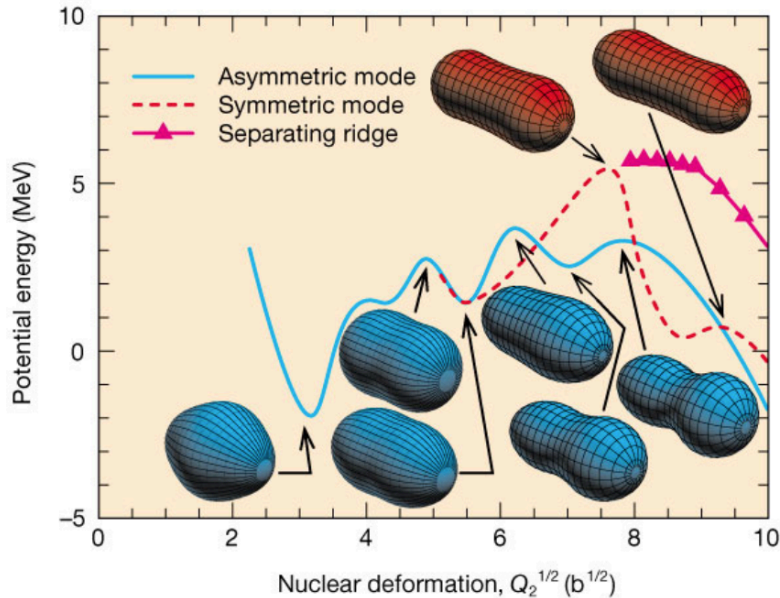
集団的な自由度

自発的核分裂

量子力学的トンネル現象で原子核が2つに分裂
 重い核の厳密計算は不可能：平均場理論が唯一の微視的理論

対称核分裂vs非対称核分裂

分裂片の陽子数分布

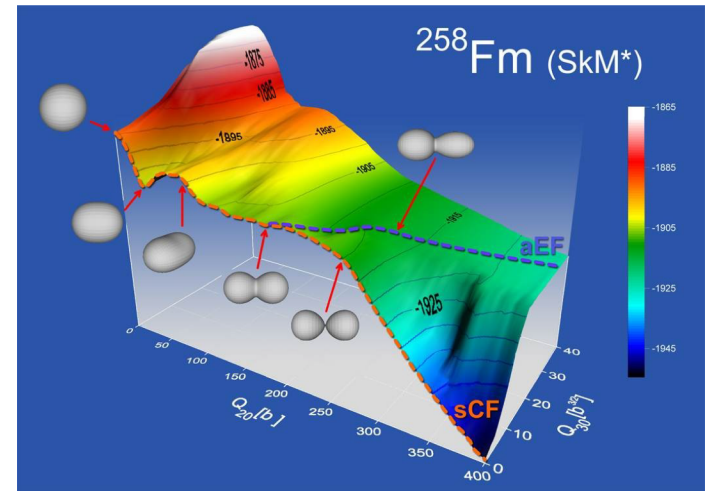


K-H Schmidt et al., Nucl. Phys. A **665**, 221 (2000)

Moller et al., Nature **409**, 785 (2001)

変形の自由度(八重極変形 β_3)沿いの性質が
 分裂片の対称・非対称分布に影響

集団経路→核分裂経路



集団経路を理論から決められないだろうか？

集団的な自由度

^{264}Fm の自発的核分裂

$$S(L) = \int_{s_{\text{in}}}^{s_{\text{out}}} \frac{1}{\hbar} \sqrt{2\mathcal{M}_{\text{eff}}(s)(V_{\text{eff}}(s) - E_0)} ds$$

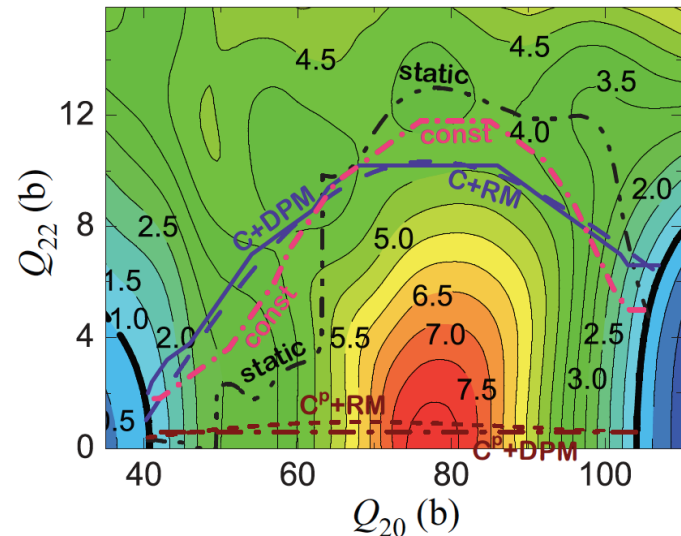
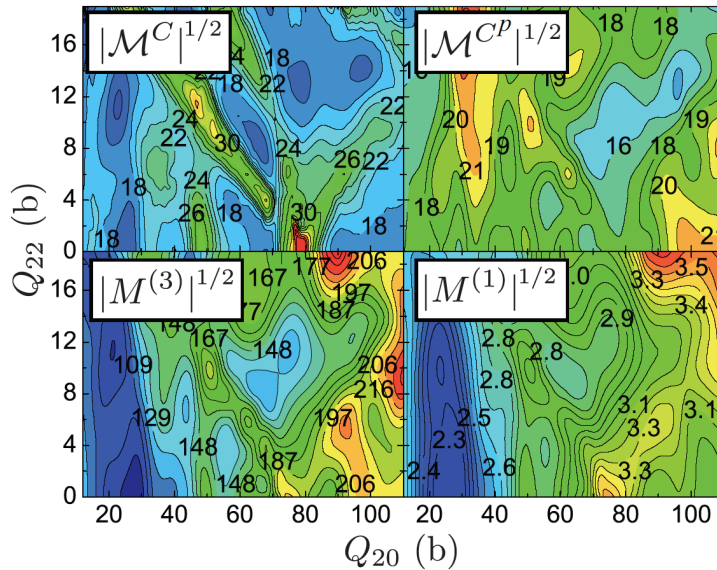
$$\mathcal{M}_{\text{eff}}(s) = \sum_{ij} \mathcal{M}_{ij} \frac{dq_i}{ds} \frac{dq_j}{ds}$$

作用積分を最小化するように集団経路を決定

Sadhukhan, et al., Phys. Rev. C **88**, 064314 (2013)

TABLE I. Values of the action integral (2) and half-lives for different spontaneous fission paths shown in Fig. 5.

Path	$S(L)$	$\log_{10}(T_{1/2}/\text{yr})$
Static + \mathcal{M}^C	23.4	-7.7
Static + \mathcal{M}^{CP}	20.8	-10.0
DPM + \mathcal{M}^C	19.1	-11.4
RM + \mathcal{M}^C	18.9	-11.6
DPM + \mathcal{M}^{CP}	16.8	-13.4
RM + \mathcal{M}^{CP}	16.8	-13.4



集団経路はポテンシャルの形だけで決まるわけではない
 集団質量の評価も重要

時間依存平均場理論

時間依存平均場理論(TDHF(B))

時間依存変分原理
$$\delta \langle \phi(t) | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} | \phi(t) \rangle = 0$$

HF軌道または準粒子が時間依存
$$|\phi(t)\rangle = \prod_i a_i^\dagger(t) |0\rangle \quad |\phi(t)\rangle = \prod_\mu \alpha_\mu(t) |0\rangle$$

一般化密度行列
$$\mathcal{R}(t) = \begin{pmatrix} \rho(t) & \kappa(t) \\ \kappa^*(t) & 1 - \rho^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^*(t) \\ U^*(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^T(t) & U^T(t) \end{pmatrix}$$

$$\rho_{ij}(t) = \langle \phi(t) | c_j^\dagger c_i | \phi(t) \rangle \quad \kappa_{ij}(t) = \langle \phi(t) | c_j c_i | \phi(t) \rangle$$

TDHFB方程式
$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{R}(t) = [\mathcal{H}, \mathcal{R}(t)] \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} h[\rho] & \Delta[\kappa] \\ -\Delta^*[\kappa] & -h^*[\rho] \end{pmatrix}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} U_\mu(t) \\ V_\mu(t) \end{pmatrix} = \mathcal{H} \begin{pmatrix} U_\mu(t) \\ V_\mu(t) \end{pmatrix}$$

粒子数の拘束項- λN は出てこない

時間依存平均場理論

TDHFB方程式の性質

定常解はHFB
$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{R}(t) = [\mathcal{H}, \mathcal{R}(t)]$$

時間発展：初期値問題(依存)

運動の定数
$$i \frac{d}{dt} \langle \phi(t) | \hat{F} | \phi(t) \rangle = \langle \phi(t) | [\hat{F}, \hat{H}] | \phi(t) \rangle$$

エネルギー $\langle H \rangle$, Hamiltonianと可換な量は時間発展中保存

→トンネル現象はTDHFBでは起きない

→粒子数拘束は時間発展中いらぬ

古典系との対応

TDHFの一粒子軌道
$$|\phi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \det[\psi_1(t)\psi_2(t)\cdots\psi_n(t)]$$

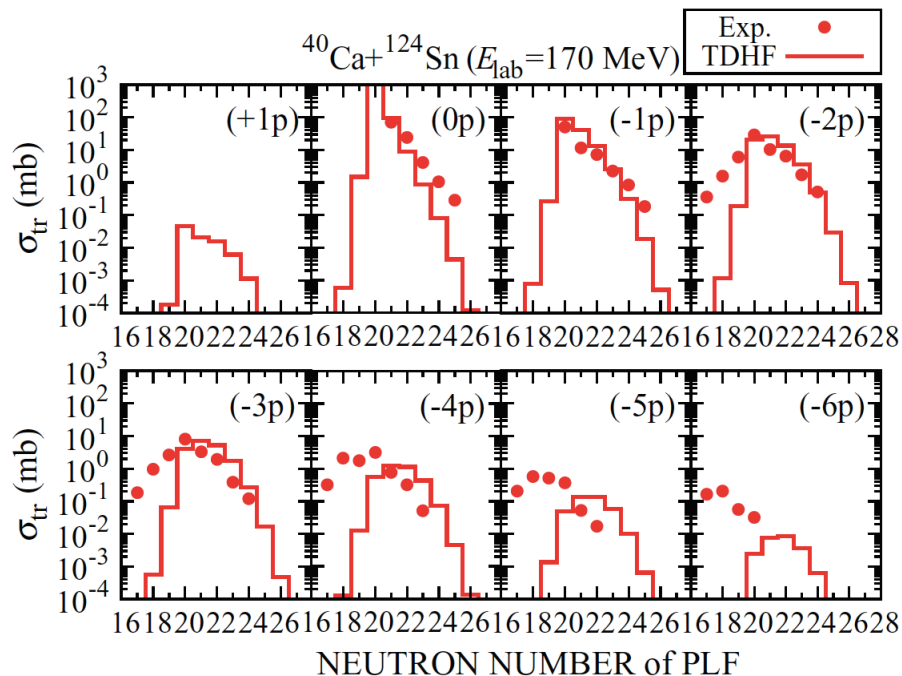
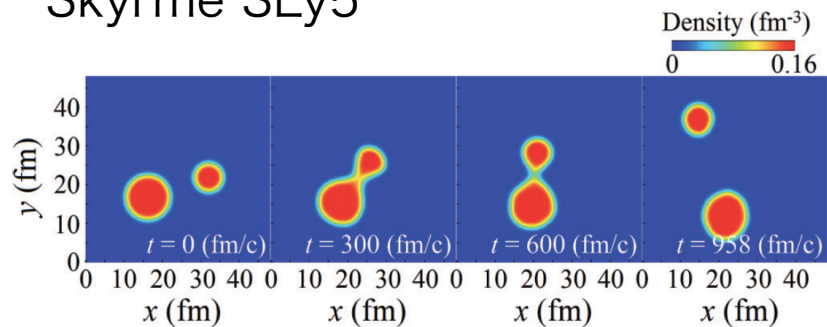
$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_i(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_i^*} \quad i \frac{\partial}{\partial t} \psi_i^*(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_i}$$

古典系Hamiltonの運動方程式と同じ形式
(ψ, ψ^*)は正準変数になっている

小振幅近似：RPAまたはQRPAに帰着

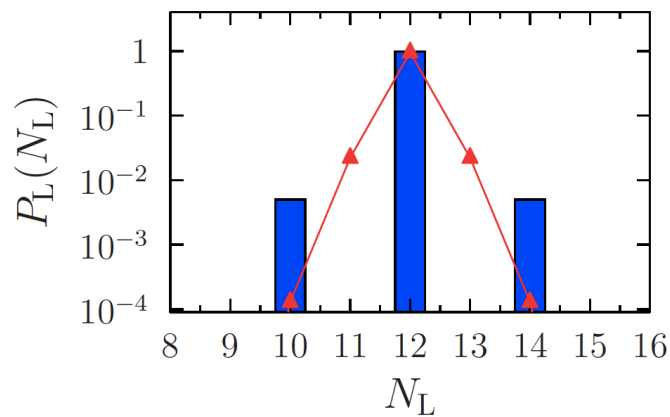
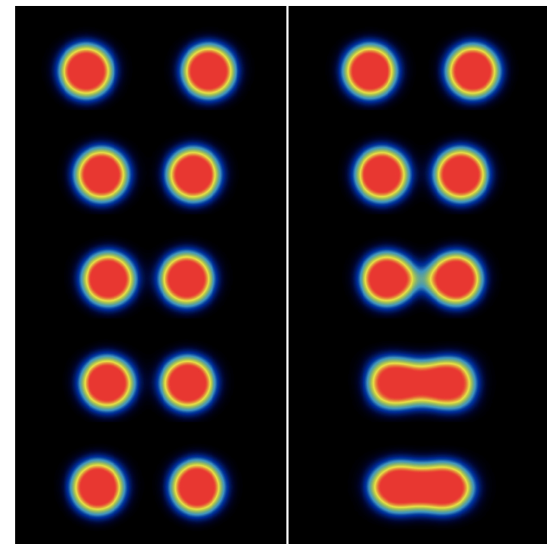
TDHF(B)の計算例

Skyrme SLy5



Sekizawa and Yabana, Phys. Rev. C **88**, 014614 (2013)

Gogny TDHFB $^{20}\text{O} + ^{20}\text{O}$



Hashimoto and Scamps, Phys. Rev. C **94**, 014610 (2016)
 Scamps and Hashimoto, Phys. Rev. C **96**, 031602(R) (2017)

大振幅集団運動理論

集団座標を理論で決められないか？

Marumori et al., Prog. Theor. Phys. **64**, 1294 (1980)
Matsuo, Prog. Theor. Phys. **76**, 372 (1986)

$$\text{時間依存変分原理} \quad \delta \langle \phi(t) | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} | \phi(t) \rangle = 0$$

系の時間変化：集団変数の時間変化 $|\phi(t)\rangle = |\phi(q(t), p(t), \varphi(t), n(t))\rangle = e^{-i\varphi(t)\tilde{N}} |\phi(q(t), p(t), n(t))\rangle$

(q,p): 1次元の集団座標・集団運動量 $\tilde{N} = \hat{N} = N_0$
(ϕ, n): ゲージ空間での回転角、粒子数ゆらぎ(pairingがある場合)

自己無撞着集団座標法(self-consistent collective coordinate method)

SCC基本方程式I: 集団経路の方程式

$$\delta \langle \phi(q, p, n) | \hat{H} - i \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial n} \tilde{N} \right) | \phi(q, p, n) \rangle = 0$$

SCC基本方程式II: 正準変数条件

$$\langle \phi(q, p, n) | i \frac{\partial}{\partial q} | \phi(q, p, n) \rangle = p + \frac{\partial S}{\partial q} \quad \langle \phi(q, p, n) | \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial p} | \phi(q, p, n) \rangle = -\frac{\partial S}{\partial p}$$

$$\langle \phi(q, p, n) | \tilde{N} | \phi(q, p, n) \rangle = n + \frac{\partial S}{\partial \varphi} \quad \langle \phi(q, p, n) | \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial n} | \phi(q, p, n) \rangle = -\frac{\partial S}{\partial n}$$

SCC基本方程式III: 集団Hamiltonian

$$\mathcal{H}(q, p, n) = \langle \phi(q, p, \varphi, n) | \hat{H} | \phi(q, p, \varphi, n) \rangle = \langle \phi(q, p, n) | \hat{H} | \phi(q, p, n) \rangle$$

SCC基本方程式の解法

(η^*, η) 展開法 (Marumori) $|\phi(q, p, n)\rangle = e^{i\hat{G}(q,p,n)}|\phi_{\text{HFB}}\rangle$

$(\eta^*, \eta, (n))$ に関して4次までG, Hを展開: 非調和振動の記述が可能 ($\eta = q + ip$)

- 球形核の2-フォノン状態: $^{100-104}\text{Ru}$, $^{76-78}\text{Se}$ (Aiba et al.)
- 非調和 γ 振動 $^{164-168}\text{Er}$ (Matsuo et al.)
- Backbending phenomena (Shimizu et al.)
- 回転運動 (Terasaki et al., Kaneko)
- 球形-変形相転移 $^{148-152}\text{Sm}$ (Yamada et al.)

(η^*, η) -展開法 では1つの平均場(HFB状態)を仮定
平均場ゆらぎの大きな現象の記述は困難

- Q,P: 集団変数のシフト演算子
- 小振幅近似でRPAを含んでいる。
- 集団変数は正準変数である。

断熱的大振幅集団運動理論

ボソン展開・ (n^*, n) 展開

- 摂動展開
- q, p の両方に関して展開

断熱近似

- p の2次までで理論を展開
- q に関しては展開なし
- 集団経路を決定することが目的

TDHFB状態の断熱展開 $|\phi(q, p, n)\rangle = e^{ip\hat{Q}(q)+in\hat{\Theta}(q)}|\phi(q)\rangle$

$$\hat{Q}(q) = \sum_{\mu < \nu} [Q_{\mu\nu}(q)\alpha_{\mu}^{\dagger}\alpha_{\nu}^{\dagger} + Q_{\mu\nu}^*(q)\alpha_{\nu}\alpha_{\mu}]$$

$$\hat{\Theta}(q) = i \sum_{\mu < \nu} [\Theta_{\mu\nu}(q)\alpha_{\mu}^{\dagger}\alpha_{\nu}^{\dagger} - \Theta_{\mu\nu}^*(q)\alpha_{\nu}\alpha_{\mu}]$$

準粒子は q に依存して定義 $\alpha_{\mu}(q)|\phi(q)\rangle = 0$

集団Hamiltonianの断熱展開

$$\mathcal{H}(q, p, n) = V(q) + \frac{1}{2}B(q)p^2 + \lambda(q)n$$

集団ポテンシャル $V(q) = \mathcal{H}(q, p, n)|_{p=n=0} = \langle\phi(q)|\hat{H}|\phi(q)\rangle$

集団質量(逆数) $B(q) = \left.\frac{\partial^2\mathcal{H}(q, p, n)}{\partial p^2}\right|_{p=n=0} = -\langle\phi(q)|[[\hat{H}, \hat{Q}(q)], \hat{Q}(q)]|\phi(q)\rangle$

化学ポテンシャル $\lambda(q) = \left.\frac{\partial\mathcal{H}(q, p, n)}{\partial n}\right|_{p=n=0} = \langle\phi(q)|[\hat{H}, i\hat{\Theta}(q)]|\phi(q)\rangle$

ASCC法

集団経路の方程式を集団運動量 p の2次までで展開

Moving-frame HFB方程式 (p のゼロ次より)

$$\delta \langle \phi(q) | \hat{H}_M(q) | \phi(q) \rangle = 0$$

moving-frame (動座標系での) Hamiltonian

$$\hat{H}_M(q) = \hat{H} - \lambda(q)\hat{N} - \frac{\partial V}{\partial q}\hat{Q}(q)$$

Moving-frame QRPA方程式 (p の1,2次より)

$$\delta \langle \phi(q) | [\hat{H}_M(q), \hat{Q}(q)] - \frac{1}{i}B(q)\hat{P}(q) | \phi(q) \rangle = 0$$

$$\delta \langle \phi(q) | [\hat{H}_M(q), \hat{P}(q)] - iC(q)\hat{Q}(q) - \frac{1}{2B(q)} [[\hat{H}_M(q), \frac{\partial V}{\partial q}\hat{Q}(q)], i\hat{Q}(q)] - i\frac{\partial \lambda}{\partial q}\tilde{N} | \phi(q) \rangle = 0$$

$$C(q) = \frac{\partial^2 V}{\partial q^2} + \frac{1}{2B(q)} \frac{\partial B}{\partial q} \frac{\partial V}{\partial q}$$

$$\hat{P}(q)|\phi(q)\rangle = i\frac{\partial}{\partial q}|\phi(q)\rangle$$

$$\langle \phi(q) | \hat{Q}(q) | \phi(q) \rangle = 0$$

$$\langle \phi(q) | \hat{P}(q) | \phi(q) \rangle = 0$$

$$\langle \phi(q) | \tilde{N} | \phi(q) \rangle = 0$$

$$\langle \phi(q) | \hat{\Theta}(q) | \phi(q) \rangle = 0$$

$$\langle \phi(q) | [\hat{\Theta}(q), \tilde{N}] | \phi(q) \rangle = i$$

$$\langle \phi(q) | [\hat{Q}(q), \hat{\Theta}(q)] | \phi(q) \rangle = 0$$

正準変数条件(p の1次までで展開)

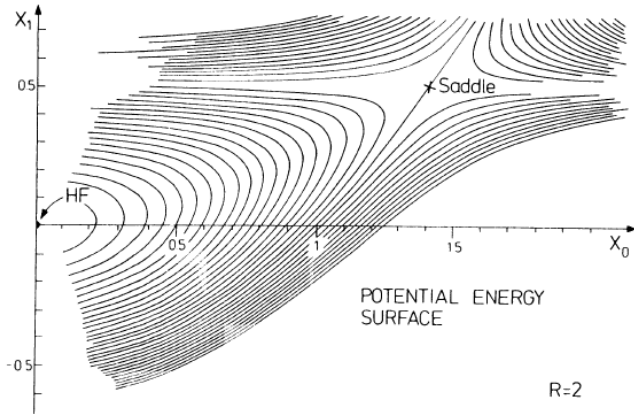
$$\langle \phi(q) | [\hat{Q}(q), \hat{P}(q)] | \phi(q) \rangle = i$$

$$\langle \phi(q) | [\tilde{N}, \hat{P}(q)] | \phi(q) \rangle = 0$$

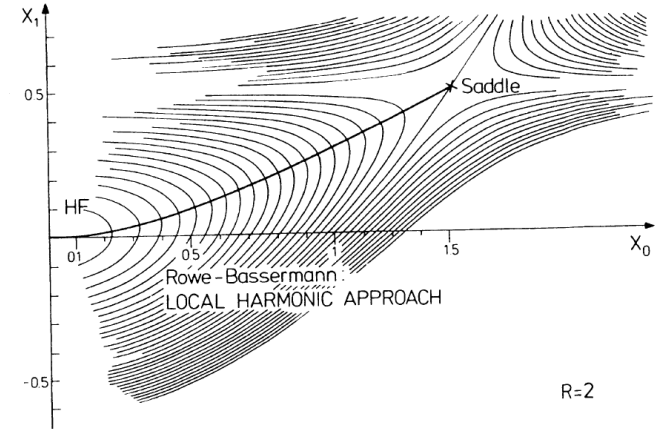
$$\langle \phi(q) | \frac{\partial \hat{Q}}{\partial q} | \phi(q) \rangle = -1$$

ATDHF理論

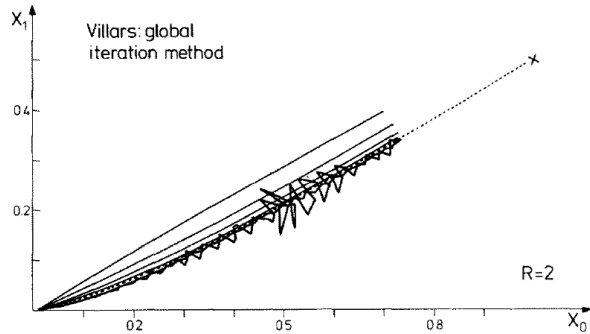
1970年代にいろいろなバージョンが提案される
簡単なポテンシャルモデルでの比較計算



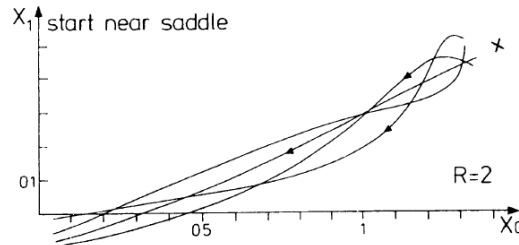
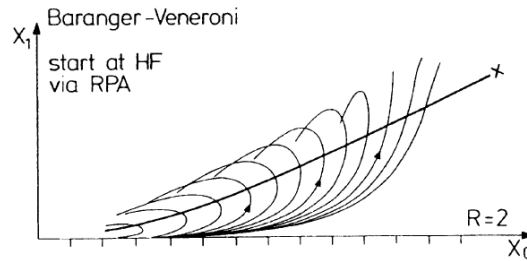
Goeke, Reinhard, Rowe Nucl. Phys. A **359**,408 (1981)



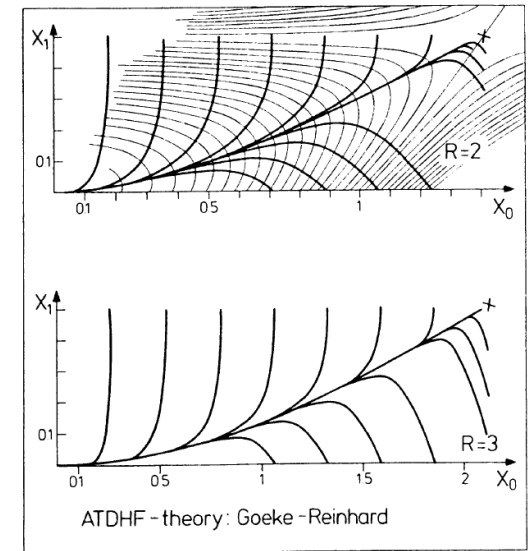
Rowe and Bassermann, Can. J. Phys. **54**, 1941 (1976)
Marumori, Prog. Theor. Phys. **57**, 112 (1977)



Villars, Nucl. Phys. A **285**, 269 (1977)



Baranger and Veneroni, Ann. Phys. **114**, 123 (1978)



Goeke and Reinhard, Ann. Phys. **112**, 328 (1978)

ATDHFのレビュー : G. Do Dang, A. Klein and N.R. Walet, Phys. Rep. **335** (2000), 93.

一次元集団的自由度の決定

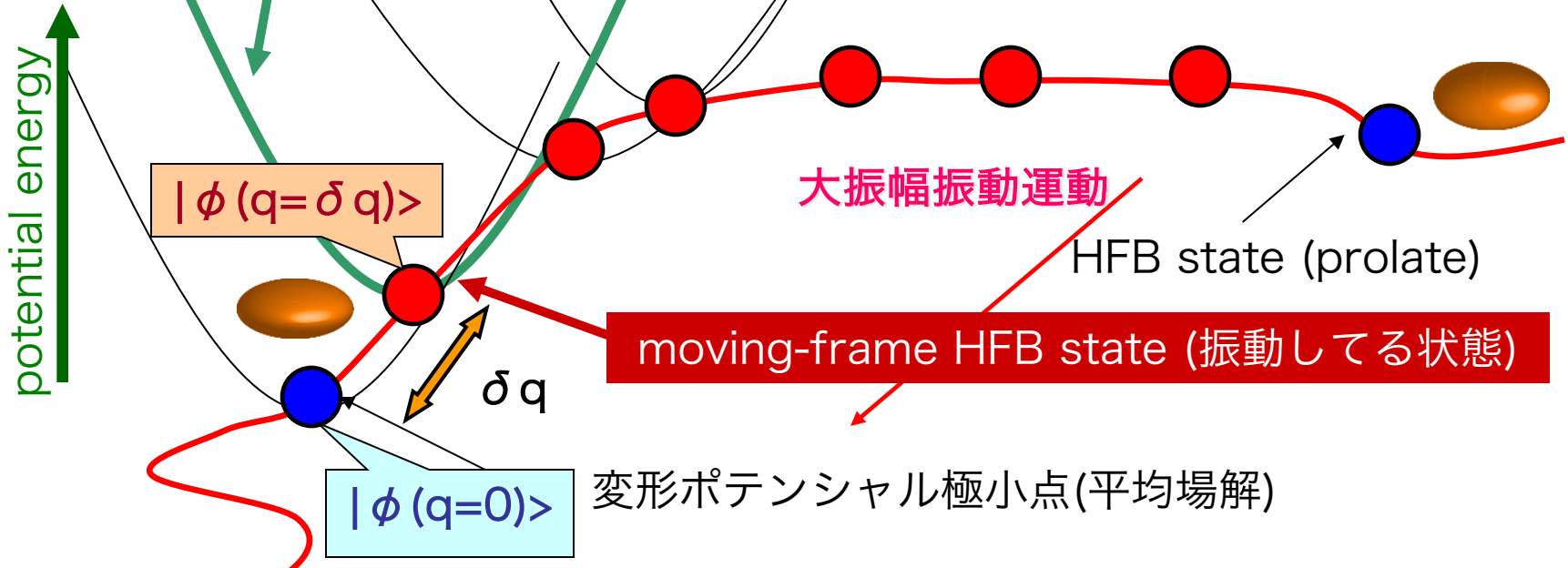
ASCC方程式

Moving-frame HFB eq.

Moving-frame QRPA eq.

Double iteration for each q

moving-frame QRPAによる小振幅振動

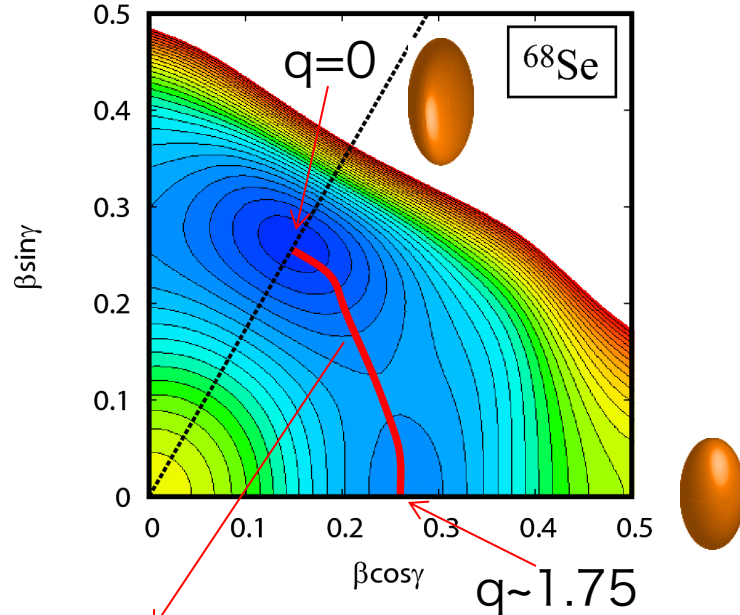


- 平均場計算(moving-frame HFB)と小振幅振動計算(m-f QRPA)を自己無撞着に実行
- 系が最も集団的な方法を決定、小振幅振動によって進め、最終的に大振幅になる
- 得られた経路は四重極演算子など既知の演算子の期待値としては求まらない

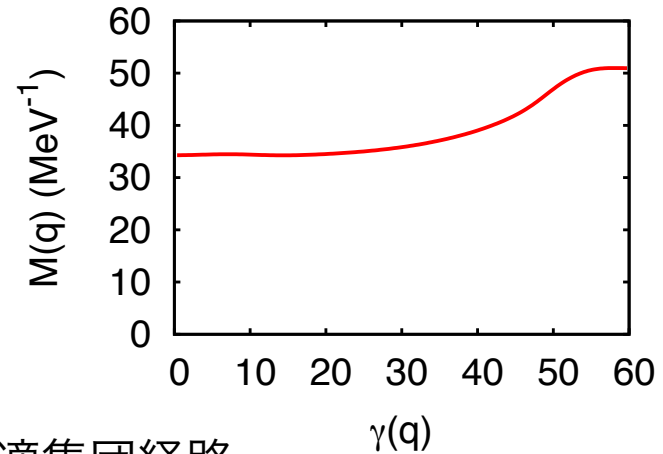
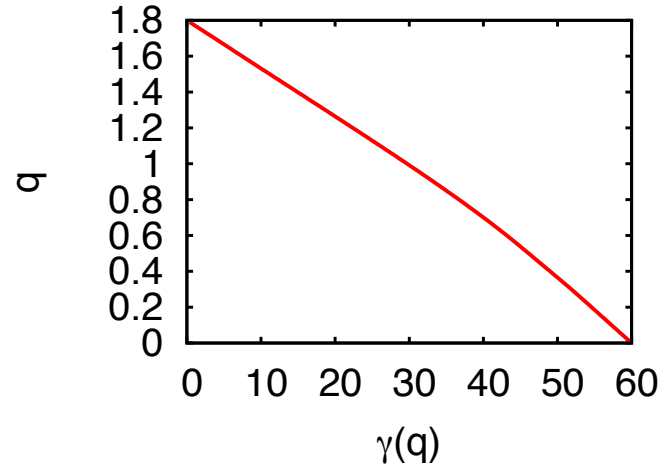
ASCCの計算例(^{68}Se)

NH, Nakatsukasa, Matsuo, Matsuyanagi, Phys. Rev. C **80**, 014305 (2009)

Pairing + Quadrupole Model



β - γ 四重極変形曲面に射影した
集団経路



- オブレート・プロレート変形共存の最適集団経路
- 非軸対称変形の自由度がオブレートとプロレートの平均場をつなぐ
- もう一つの自由度：集団質量(座標のスケーリング)

$$M[s(q)] = B^{-1}(q) \left[\left(\frac{d\beta}{dq} \right)^2 + \beta^2(q) \left(\frac{d\gamma}{dq} \right)^2 \right]$$

ASCC法の四重極集団運動への応用

完全自己無撞着な2次元集団部分空間計算：まだ誰も行っておらず困難

一般化された5次元四重極集団Hamiltonian

Próchniak and Rohoziński, J. Phys. G36, 123101 (2009)

四重極の5つの自由度(変形パラメータ β , γ と3つのオイラー角 Ω)をすべて取り入れた最も一般的な断熱的古典Hamiltonian

小振幅近似：四重極振動、回転、 β 、 γ 振動

$$\mathcal{H}_{\text{coll}} = V(\beta, \gamma) + T_{\text{vib}} + T_{\text{rot}}$$

$V(\beta, \gamma)$ 集団ポテンシャル

$$T_{\text{vib}} = \frac{1}{2} D_{\beta\beta}(\beta, \gamma) \dot{\beta}^2 + D_{\beta\gamma}(\beta, \gamma) \dot{\beta} \dot{\gamma} + \frac{1}{2} D_{\gamma\gamma}(\beta, \gamma) \dot{\gamma}^2$$

$D(\beta, \gamma)$ 振動の慣性質量

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \mathcal{J}_k(\beta, \gamma) \omega_k^2$$

$J(\beta, \gamma)$ 回転の慣性モーメント

- 集団的な自由度：四重極の5つの自由度
- 慣性質量の計算：ASCCを利用(CHFB+LQRPA)

NH, K. Sato, T. Nakatsukasa, M. Matsuo, K. Matsuyanagi, Phys. Rev. C 82, 064313 (2010)

$V(\beta, \gamma)$: 拘束HFB方程式で計算

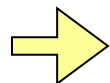
$J(\beta, \gamma)$: 拘束HFB状態でのThouless-Valatinの慣性モーメント(QRPA)

$D(\beta, \gamma)$: 拘束HFB状態でQRPA

集団Hamiltonianの再量子化

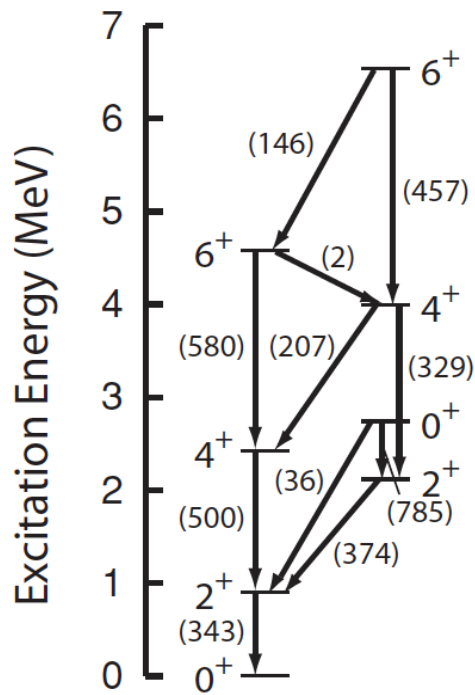
Kumar and Baranger, Nucl. Phys. A 92, 608 (1967)

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{coll}} \Phi_{IM\alpha}(\beta, \gamma, \Omega) = E_{I\alpha} \Phi_{IM\alpha}(\beta, \gamma, \Omega)$$

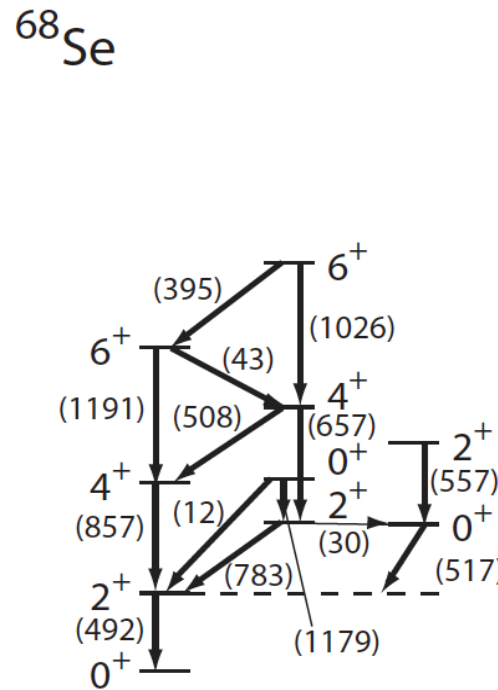


励起エネルギー、電磁遷移、電気四重極モーメント、波動関数など

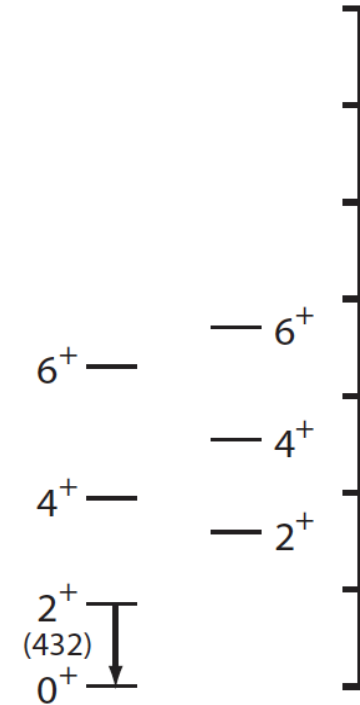
CHFB+LQRPAの計算例(変形共存)



1-dim ASCC

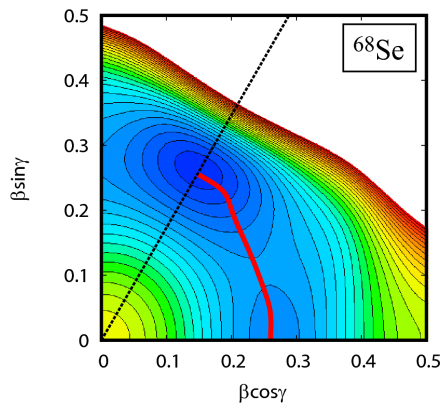


2-dim ASCC (LQRPA)
5D collective Hamiltonian



Experimental data

() B(E2) $e^2 \text{ fm}^4$



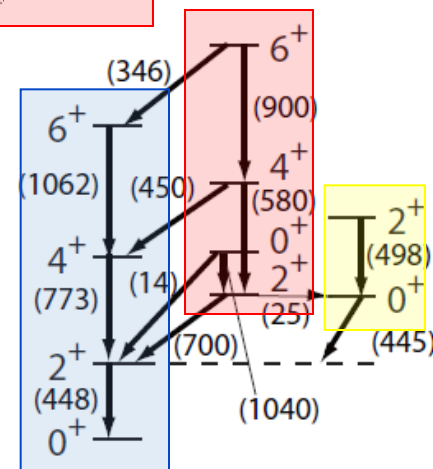
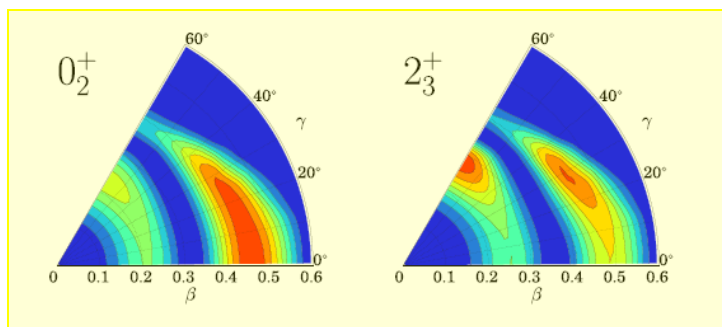
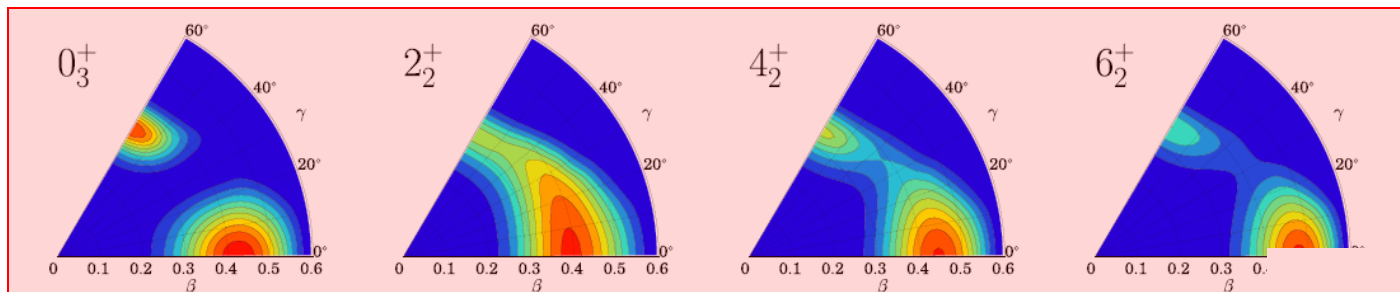
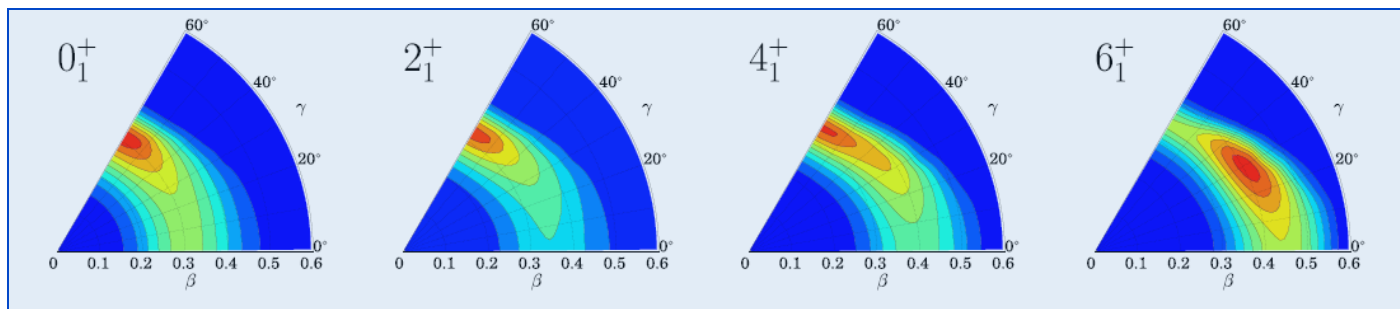
EXP : Fischer et al., Phys.Rev.C67 (2003) 064318.

B(E2; $2_1^+ \rightarrow 0_1^+$) Obertelli et al, Phys.Rev.C80 (2009)031304(R)

effective charge $e_n = 0.4$, $e_p = 1.4$ is used for B(E2)

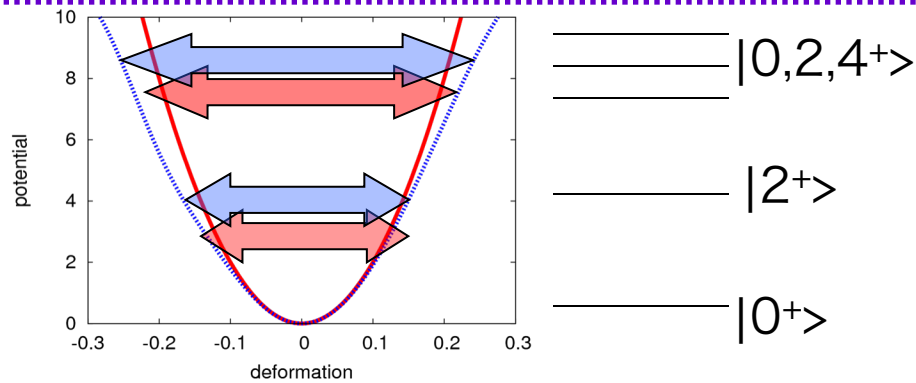
^{68}Se 変形混合

$\beta^4 \times$ collective wave function squared

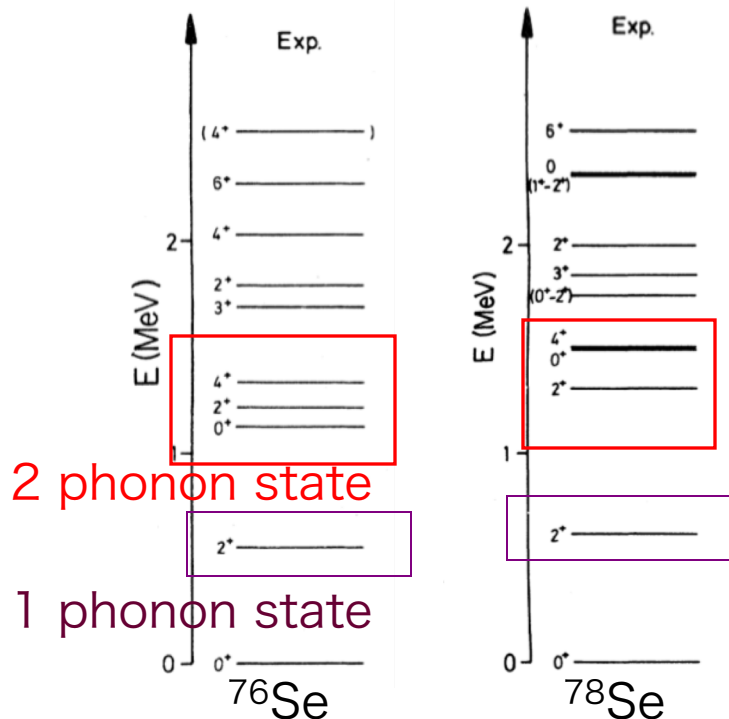
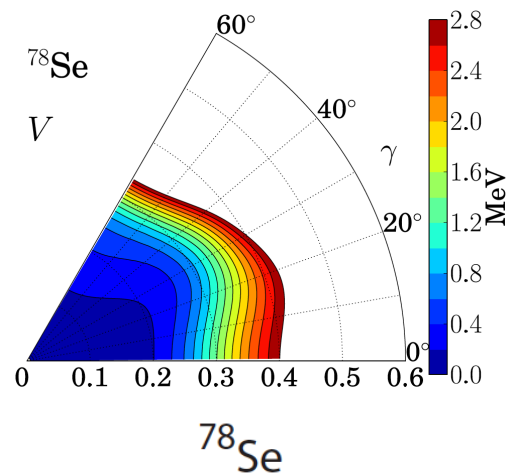


- 波動関数は非軸対称変形領域に広がる
- 主要成分 基底回転バンド: オブレート変形, 励起回転バンド: プロレート変形
- 0_2^+ , 2_3^+ 状態: 大振幅な γ 振動と β -振動の混ざったもの

^{78}Se 非調和振動(球形核)



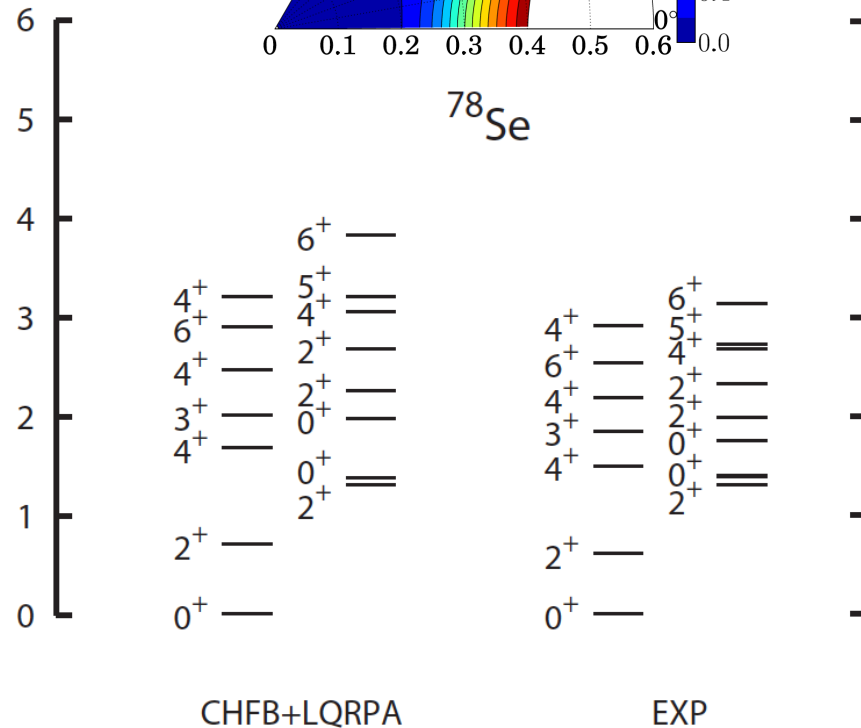
NH et al., Mod. Phys. Lett. A25, 1796 (2010)



2 phonon state

1 phonon state

Excitation Energy (MeV)



Lie and Holzwarth, Phys. Rev. C 12, 1035 (1975)

□ ボソン展開法など摂動論で記述可能

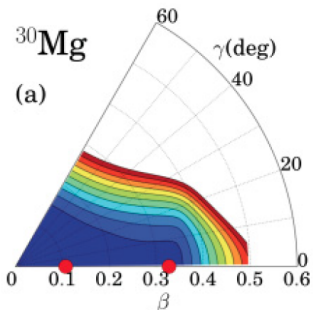
□ 5次元集団Hamiltonianで2-フォノン状態、3フォノン状態の順番を再現

中性子過剰Mg同位体での変形相転移, 0^+ 状態

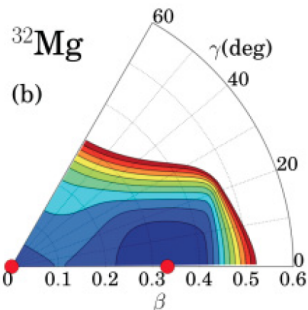
NH, et al, Phys. Rev. C84, 061302 (2011)

球形からプロレート変形への転移 N=20

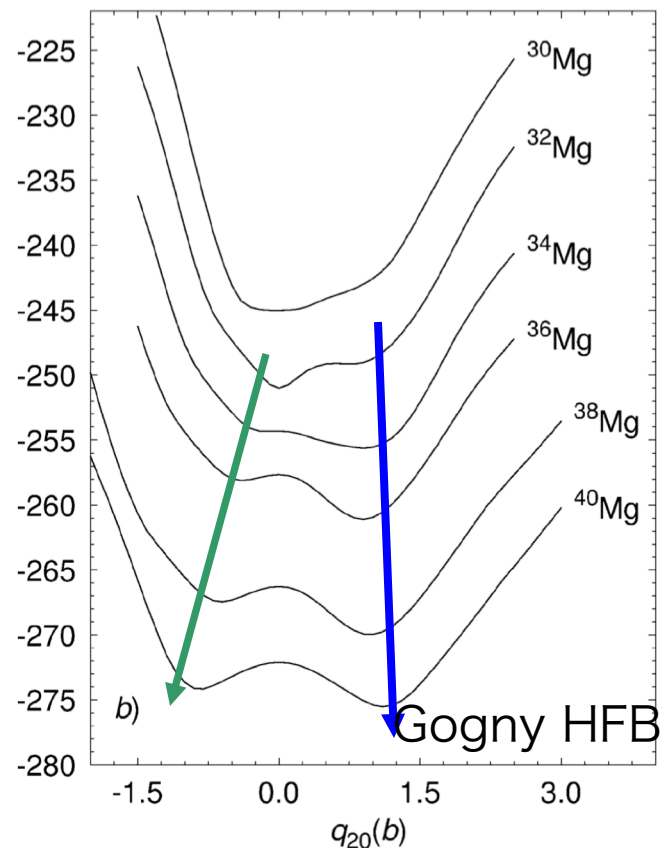
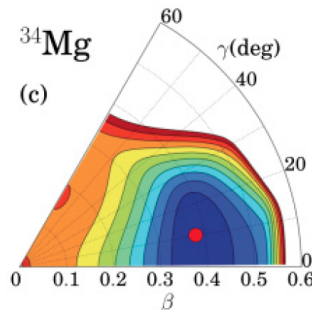
^{30}Mg



^{32}Mg



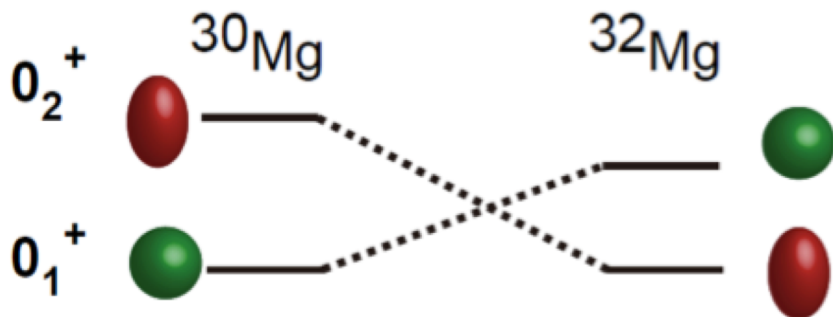
^{34}Mg



励起 0^+ 状態の発見

^{30}Mg : 1789keV Phys. Rev. Lett. 103, 012501 (2009)

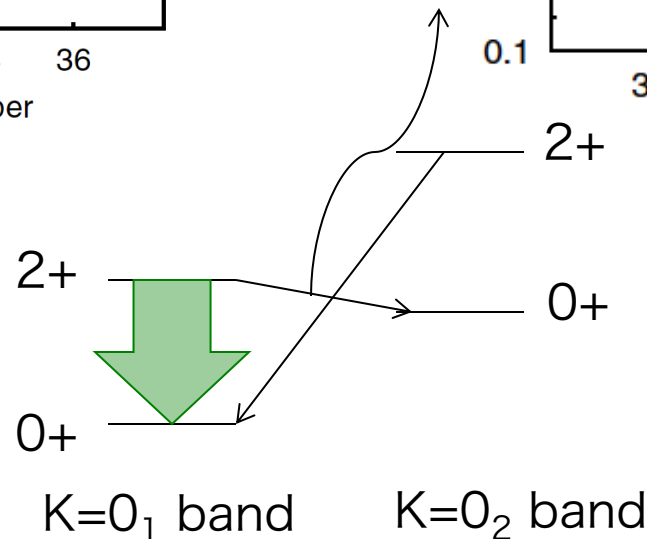
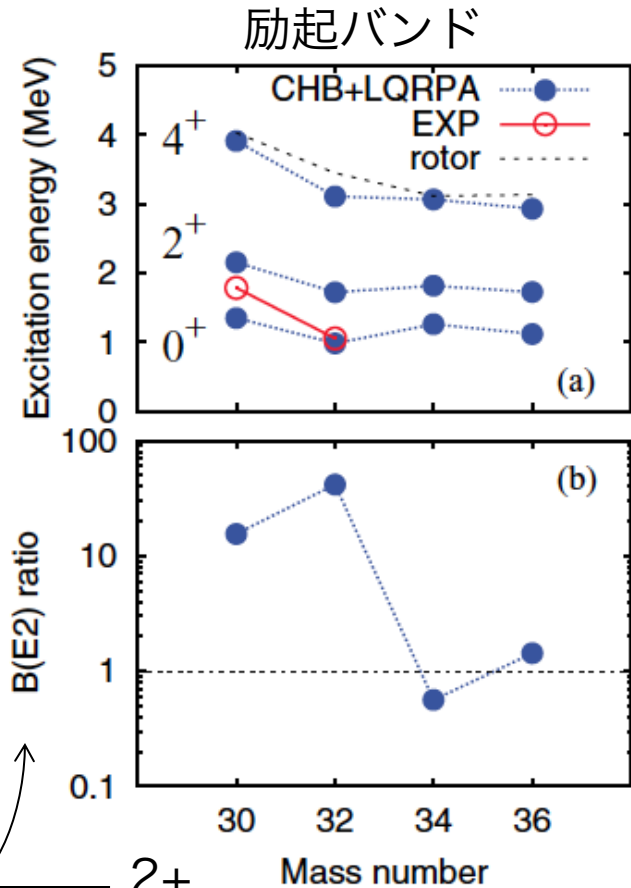
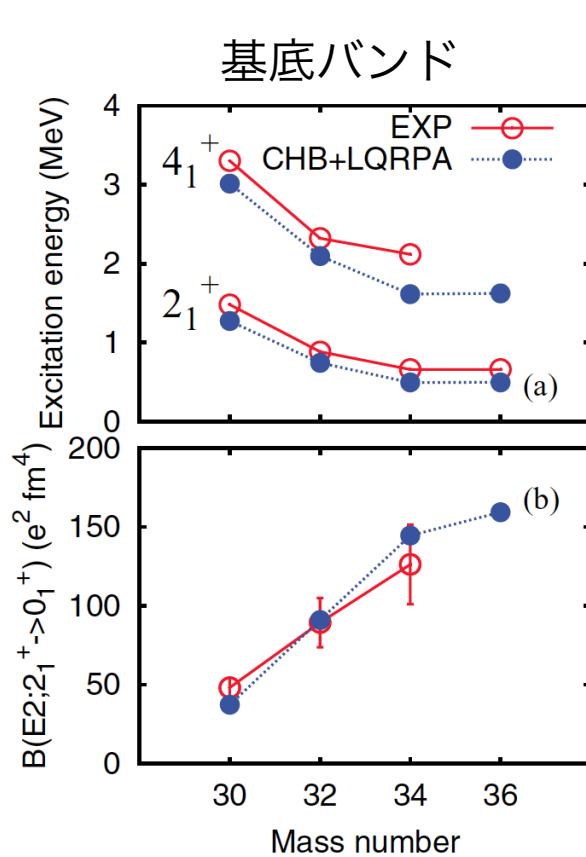
^{32}Mg : 1058keV Phys. Rev. Lett. 105, 252501 (2010)



Rodríguez-Guzmán et al., Nucl. Phys. A 709 201 (2002)

0^+ 状態での変形混合は？

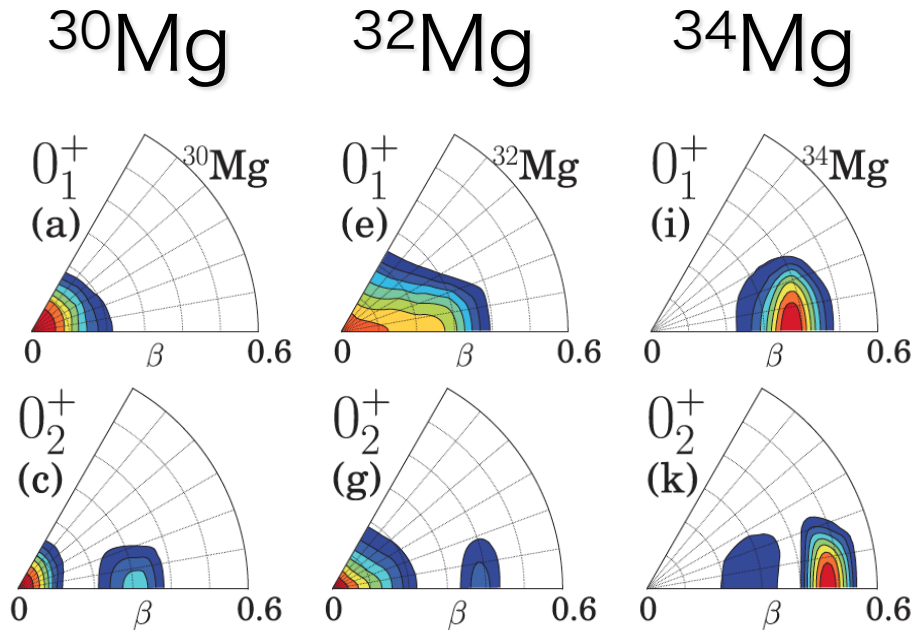
中性子過剰Mg同位体での変形相転移、 0^+ 状態



$B(E2)$ ratio = 1
if the two bands have
same intrinsic structure

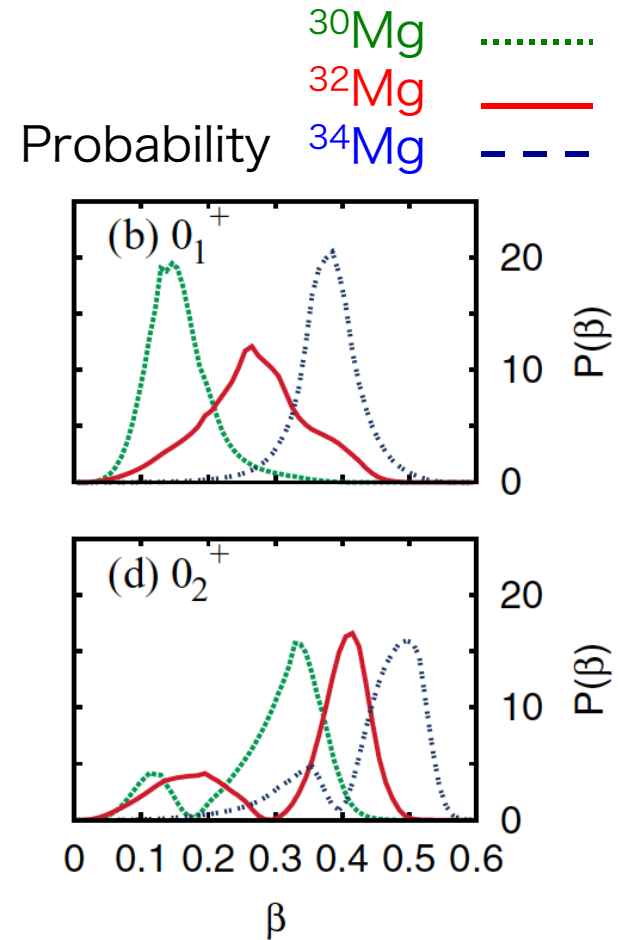
中性子過剰Mg同位体での変形相転移、 0^+ 状態

集団波動関数二乗



プロレート変形状態

β -振動



^{30}Mg : 球形の基底 0^+ 状態、変形励起 0^+ 状態
 ^{32}Mg : 大振幅の変形ゆらぎが起こっている

まとめ

□ 原子核大振幅集団運動

- 非調和振動・変形転移

- 変形共存

□ 大振幅集団運動の理論

- ボソン展開法

- 生成座標法

- 時間依存平均場理論

- 自己無撞着集団座標法

- 5次元集団Hamiltonianによる四重極集団運動