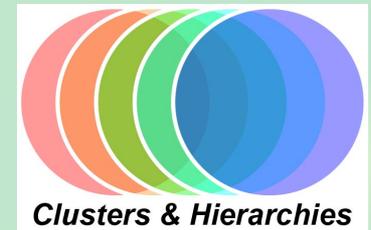


ハドロン共鳴状態と その構造



兵藤 哲雄

東京都立大学



2021, Aug. 10th 1

目次



講義 1 : 導入

- エキゾチックハドロンの現状
- カイラル対称性と有効場の理論



講義 2 : 共鳴状態の記述

- ハミルトニアンの固有状態
- 散乱振幅と共鳴状態

講義 3 : $\Lambda(1405)$ 共鳴の構造

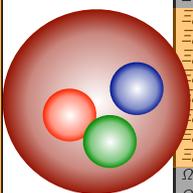
- $\bar{K}N$ 散乱振幅と共鳴状態
- ハドロンの複合性

強い相互作用で不安定なハドロン

安定な/不安定なハドロン

<http://pdg.lbl.gov/>

p	$1/2^+$ ****	$\Delta(1232)$	$3/2^+$ ****	Σ^+	$1/2^+$ ****	Ξ^0	$1/2^+$ ****	Ξ^{++}	***
n	$1/2^+$ ****	$\Delta(1600)$	$3/2^+$ ****	Σ^0	$1/2^+$ ****	Ξ^-	$1/2^+$ ****	Ξ^{*++}	***
$N(1440)$	$1/2^+$ ****	$\Delta(1620)$	$1/2^-$ ****	Σ^-	$1/2^+$ ****	$\Xi(1530)$	$3/2^+$ ****	Λ_b^0	$1/2^+$ ***
$N(1520)$	$3/2^-$ ****	$\Delta(1700)$	$3/2^-$ ****	$\Sigma(1385)$	$3/2^+$ ****	$\Xi(1620)$	*	$\Lambda_b(5912)^0$	$1/2^-$ ***
$N(1535)$	$1/2^-$ ****	$\Delta(1750)$	$1/2^+$ *	$\Sigma(1580)$	$3/2^-$ ****	$\Xi(1690)$	***	$\Lambda_b(5920)^0$	$3/2^-$ ***
$N(1650)$	$1/2^-$ ****	$\Delta(1900)$	$1/2^-$ ***	$\Sigma(1620)$	$1/2^-$ *	$\Xi(1820)$	$3/2^-$ ***	$\Lambda_b(6146)^0$	$3/2^+$ ***
$N(1675)$	$5/2^-$ ****	$\Delta(1905)$	$5/2^+$ ****	$\Sigma(1660)$	$1/2^+$ ***	$\Xi(1950)$	***	$\Lambda_b(6152)^0$	$5/2^+$ ****
$N(1680)$	$5/2^+$ ****	$\Delta(1910)$	$1/2^+$ ****	$\Sigma(1670)$	$3/2^-$ ****	$\Xi(2030)$	$\geq \frac{3}{2}^?$	Σ_b	$1/2^+$ ***
$N(1700)$	$3/2^-$ ***	$\Delta(1920)$	$3/2^+$ ***	$\Sigma(1750)$	$1/2^-$ ***	$\Xi(2120)$	*	Σ_b^+	$3/2^+$ ****
$N(1710)$	$1/2^+$ ****	$\Delta(1930)$	$5/2^-$ ****	$\Sigma(1775)$	$5/2^-$ ****	$\Xi(2250)$	**	$\Sigma_b(6097)^+$	***
$N(1720)$	$3/2^+$ ****	$\Delta(1940)$	$3/2^-$ **	$\Sigma(1780)$	$3/2^+$ *	$\Xi(2370)$	**	$\Sigma_b(6097)^-$	***
$N(1860)$	$5/2^+$ **	$\Delta(1950)$	$7/2^+$ ****	$\Sigma(1880)$	$1/2^+$ **	$\Xi(2500)$	*	Ξ_b^0, Ξ_b^-	$1/2^+$ ****
$N(1875)$	$3/2^-$ ***	$\Delta(2000)$	$5/2^+$ **	$\Sigma(1900)$	$1/2^-$ **			$\Xi_b(5935)$	$1/2^+$ ****
$N(1880)$	$1/2^+$ ***	$\Delta(2150)$	$1/2^-$ *	$\Sigma(1910)$	$3/2^-$ ***	Ω^-	$3/2^+$ ****	$\Xi_b(5945)^0$	$3/2^+$ ****
$N(1895)$	$1/2^-$ ****	$\Delta(2200)$	$7/2^-$ ***	$\Sigma(1915)$	$5/2^+$ ****	$\Omega(2012)$? ****	$\Xi_b(5955)$	$3/2^+$ ****
$N(1890)$	$3/2^+$ ****	$\Delta(2300)$	$9/2^+$ **	$\Sigma(1940)$	$3/2^+$ *	$\Omega(2250)$	***	$\Xi_b(6227)$	***
$N(1990)$	$7/2^+$ **	$\Delta(2350)$	$5/2^-$ *	$\Sigma(2010)$	$3/2^-$ *	$\Omega(2380)$	**	Ω_b	$1/2^+$ ****
$N(2000)$	$5/2^+$ **	$\Delta(2390)$	$7/2^+$ **	$\Sigma(2030)$	$7/2^+$ ****	$\Omega(2470)$	**	$P_c(4312)^+$	*
$N(2040)$	$3/2^+$ *	$\Delta(2400)$	$9/2^-$ **	$\Sigma(2070)$	$5/2^+$ **			$P_c(4380)^+$	*
$N(2060)$	$5/2^-$ ***	$\Delta(2420)$	$11/2^+$ ****	$\Sigma(2080)$	$3/2^+$ *	Λ_c^+	$1/2^+$ ****	$P_c(4440)^+$	*
$N(2100)$	$1/2^+$ ****	$\Delta(2750)$	$13/2^-$ **	$\Sigma(2100)$	$7/2^-$ *	$\Lambda_c(2595)^+$	$1/2^-$ ***	$P_c(4457)^+$	*
$N(2120)$	$3/2^-$ ***	$\Delta(2950)$	$15/2^+$ **	$\Sigma(2160)$	$1/2^-$ *	$\Lambda_c(2625)^+$	$3/2^-$ ***		
$N(2190)$	$7/2^-$ ****			$\Sigma(2230)$	$3/2^+$ *	$\Lambda_c(2765)^+$	*		
$N(2220)$	$9/2^+$ ****	Λ	$1/2^+$ ****	$\Sigma(2250)$	***	$\Lambda_c(2860)$	$3/2^+$ ****		
$N(2250)$	$9/2^-$ ****	Λ	$1/2^-$ **	$\Sigma(2455)$	**	$\Lambda_c(2880)^+$	$5/2^+$ ****		
$N(2300)$	$1/2^+$ **	$\Lambda(1405)$	$1/2^-$ ****	$\Sigma(2620)$	**	$\Lambda_c(2940)^+$	$3/2^-$ ****		
$N(2570)$	$5/2^-$ **	$\Lambda(1520)$	$3/2^-$ ****	$\Sigma(3000)$	*	$\Sigma_c(2455)$	$1/2^+$ ****		
$N(2600)$	$11/2^-$ ***	$\Lambda(1600)$	$1/2^+$ ****	$\Sigma(3170)$	*	$\Sigma_c(2520)$	$3/2^+$ ****		
$N(2700)$	$13/2^+$ **	$\Lambda(1670)$	$1/2^-$ ****			$\Sigma_c(2800)$	***		
		$\Lambda(1690)$	$3/2^-$ ****			Ξ_c^+	$1/2^+$ ***		
		$\Lambda(1710)$	$1/2^+$ *			Ξ_c^0	$1/2^+$ ****		
		$\Lambda(1800)$	$1/2^-$ ***			Ξ_c^+	$1/2^+$ **		
		$\Lambda(1810)$	$1/2^+$ ***			Ξ_c^0	$1/2^+$ **		
		$\Lambda(1820)$	$5/2^+$ ****			$\Xi_c(2645)$	$3/2^+$ ****		
		$\Lambda(1830)$	$5/2^-$ ****			$\Xi_c(2790)$	$1/2^-$ ***		
		$\Lambda(1890)$	$3/2^+$ ****			$\Xi_c(2815)$	$3/2^-$ ****		
		$\Lambda(2000)$	$1/2^-$ *			$\Xi_c(2930)$	**		
		$\Lambda(2050)$	$3/2^-$ *			$\Xi_c(2970)$	***		
		$\Lambda(2070)$	$3/2^+$ *			$\Xi_c(3055)$	***		
		$\Lambda(2080)$	$5/2^-$ *			$\Xi_c(3080)$	***		
		$\Lambda(2085)$	$7/2^+$ **			$\Xi_c(3123)$	*		
		$\Lambda(2100)$	$7/2^-$ ****			Ω_c^+	$1/2^+$ ****		
		$\Lambda(2110)$	$5/2^+$ ****			Ω_c^0	$3/2^+$ ****		
		$\Lambda(2325)$							
		$\Lambda(2350)$							
		$\Lambda(2585)$							



バリオン162種

LIGHT UNFLAVORED ($S=C=B=0$)		STRANGE ($S=\pm 1, C=B=0$)		CHARMED, STRANGE ($C=S=\pm 1$)		$c\bar{c}$ continued $\psi(\psi^c)$	
$f(\psi^c)$		$f(\psi^c)$		$f(\psi^c)$		$f(\psi^c)$	
π^+	$1(0^-)$	$\pi_2(1670)$	$1(2^-)$	K^+	$1/2(0^-)$	D_s^+	$0(0^-)$
π^0	$1(0^-)$	$\rho(1690)$	$1(1^-)$	K^0	$1/2(0^-)$	D_s^0	$0(0^-)$
π^-	$1(0^-)$	$\rho_3(1690)$	$1^-(3^-)$	K_S^0	$1/2(0^-)$	$D_{s1}^+(2317)$	$0(0^+)$
η	$0^+(0^+)$	$\rho(1700)$	$1^-(1^-)$	K_L^0	$1/2(0^-)$	$D_{s1}^*(2460)$	$0(1^+)$
$\eta(500)$	$0^+(0^+)$	$\omega(1700)$	$1(2^+)$	$K_S^*(700)$	$1/2(0^+)$	$D_{s1}^*(2536)$	$0(1^+)$
$\eta(770)$	$1^-(1^-)$	$\omega(1770)$	$1^-(0^+)$	$K^*(892)$	$1/2(1^-)$	$D_{s2}^*(2573)$	$0(2^+)$
$\eta(980)$	$0^+(0^+)$	$\omega(1780)$	$0^+(0^+)$	$K_1(1270)$	$1/2(1^+)$	$D_{s1}^*(2700)$	$0(1^-)$
$\eta(1295)$	$0^+(0^+)$	$\omega(1835)$	$?^-(0^+)$	$K_1(1400)$	$1/2(1^+)$	$D_{s1}^*(2860)$	$0(1^-)$
$\eta(1370)$	$0^+(0^+)$	$\omega(1880)$	$1^-(2^-)$	$K^*(1410)$	$1/2(1^-)$	$D_{s1}^*(2860)$	$0(3^-)$
$\eta(1420)$	$0^+(0^+)$	$\omega(1990)$	$1^-(1^-)$	$K_S^*(1430)$	$1/2(0^+)$	$D_{s1}^*(3040)$	$0(2^?)$
$\eta(1450)$	$1^-(1^-)$	$\omega(2005)$	$1^-(2^-)$	$K_S^*(1430)$	$1/2(2^+)$	BOTTOM ($B=\pm 1$)	
$\eta(1475)$	$0^+(0^+)$	$\omega(2050)$	$1^-(3^-)$	$K(1630)$	$1/2(2^+)$	B^+	$1/2(0^-)$
$\eta(1500)$	$0^+(0^+)$	$\omega(2100)$	$0^+(0^+)$	$K_1(1650)$	$1/2(1^+)$	B^0	$1/2(0^-)$
$\eta(1510)$	$0^+(0^+)$	$\omega(2150)$	$0^+(0^+)$	$K_1(1680)$	$1/2(1^+)$	B^+ / B^0 ADMIXTURE	
$\eta(1525)$	$0^+(2^+)$	$\omega(2190)$	$0^+(0^+)$	$K_2^*(1770)$	$1/2(2^-)$	B^+ / B^0 / B_s^+ / B_s^0 b-baryon ADMIXTURE	
$\eta(1565)$	$0^+(2^+)$	$\omega(2200)$	$1^-(4^+)$	$K_S^*(1780)$	$1/2(3^-)$	V_{cb} and V_{cb} CKM Matrix Elements	
$\eta(1575)$	$0^+(2^+)$	$\omega(2250)$	$1^-(3^-)$	$K_S^*(1820)$	$1/2(2^+)$	B^+	
$\eta(1580)$	$0^+(2^+)$	$\omega(2300)$	$1^-(2^-)$	$K(1830)$	$1/2(0^-)$	B^0	
$\eta(1645)$	$0^+(2^+)$	$\omega(2350)$	$1^-(1^-)$	$K_2^*(1950)$	$1/2(0^+)$	B_c^+	
$\omega(1650)$	$0(1^-)$	$\omega(2400)$	$1^-(2^-)$	$K_2^*(1980)$	$1/2(2^+)$	B_c^0	
$\omega(1670)$	$0(3^-)$	$\omega(2450)$	$0^+(0^+)$	$K_S^*(2045)$	$1/2(4^+)$	B_c^+	
		$\omega(2500)$	$0^+(0^+)$	$K_S^*(2050)$	$1^-(2^-)$	B_c^0	
		$\omega(2550)$	$0^+(0^+)$	$K_2^*(2250)$	$1/2(2^-)$	B_c^+	
		$\omega(2600)$	$0^+(0^+)$	$K_2^*(2300)$	$1/2(3^+)$	B_c^0	
		$\omega(2650)$	$0^+(0^+)$	$K_2^*(2380)$	$1/2(5^-)$	B_c^+	
		$\omega(2700)$	$0^+(0^+)$	$K_2^*(2500)$	$1/2(4^-)$	B_c^0	
		$\omega(2750)$	$0^+(0^+)$	$K(3100)$	$?^?(2^?)$	B_c^+	
		$\omega(2800)$	$0^+(0^+)$	CHARMED ($C=\pm 1$)		BOTTOM, STRANGE ($B=\pm 1, S=\pm 1$)	
		$\omega(2850)$	$0^+(0^+)$	D^+	$1/2(0^-)$	D^+	
		$\omega(2900)$	$0^+(0^+)$	D^0	$1/2(0^-)$	D^0	
		$\omega(2950)$	$0^+(0^+)$	D^*	$1/2(1^-)$	B_c^+	
		$\omega(3000)$	$0^+(0^+)$	D^*	$1/2(1^-)$	B_c^0	
		$\omega(3050)$	$0^+(0^+)$	D_S^*	$1/2(0^+)$	B_{cb}^+	
		$\omega(3100)$	$0^+(0^+)$	D_S^*	$1/2(0^+)$	B_{cb}^0	
		$\omega(3150)$	$0^+(0^+)$	D_S^*	$1/2(1^+)$	B_{cb}^+	
		$\omega(3200)$	$0^+(0^+)$	D_S^*	$1/2(1^+)$	B_{cb}^0	
		$\omega(3250)$	$0^+(0^+)$	D_S^*	$1/2(2^+)$	B_{cb}^+	
		$\omega(3300)$	$0^+(0^+)$	D_S^*	$1/2(2^+)$	B_{cb}^0	
		$\omega(3350)$	$0^+(0^+)$	D_S^*	$1/2(2^+)$	B_{cb}^+	
		$\omega(3400)$	$0^+(0^+)$	D_S^*	$1/2(2^+)$	B_{cb}^0	
		$\omega(3450)$	$0^+(0^+)$	D_S^*	$1/2(2^+)$	B_{cb}^+	
		$\omega(3500)$	$0^+(0^+)$	D_S^*	$1/2(2^+)$	B_{cb}^0	
		$\omega(3550)$	$0^+(0^+)$	D_S^*	$1/2(2^+)$	B_{cb}^+	
		$\omega(3600)$	$0^+(0^+)$	D_S^*	$1/2(2^+)$	B_{cb}^0	
		$\omega(3650)$	$0^+(0^+)$	D_S^*	$1/2(2^+)$	B_{cb}^+	
		$\omega(3700)$	$0^+(0^+)$	D_S^*	$1/2(2^+)$	B_{cb}^0	
		$\omega(3750)$	$0^+(0^+)$	D_S^*	$1/2(2^+)$	B_{cb}^+	
		$\omega(3800)$	$0^+(0^+)$	D_S^*	$1/2(2^+)$	B_{cb}^0	
		$\omega(3850)$	$0^+(0^+)$	D_S^*	$1/2(2^+)$	B_{cb}^+	
		$\omega(3900)$	$0^+(0^+)$	D_S^*	$1/2(2^+)$	B_{cb}^0	
		$\omega(3950)$	$0^+(0^+)$	D_S^*	$1/2(2^+)$	B_{cb}^+	
		$\omega(4000)$	$0^+(0^+)$	D_S^*	$1/2(2^+)$	B_{cb}^0	
		$\omega(4050)$	$0^+(0^+)$	D_S^*	$1/2(2^+)$	B_{cb}^+	
		$\omega(4100)$	$0^+(0^+)$	D_S^*	$1/2(2^+)$	B_{cb}^0	
		$\omega(4150)$	$0^+(0^+)$	D_S^*	$1/2(2^+)$	B_{cb}^+	

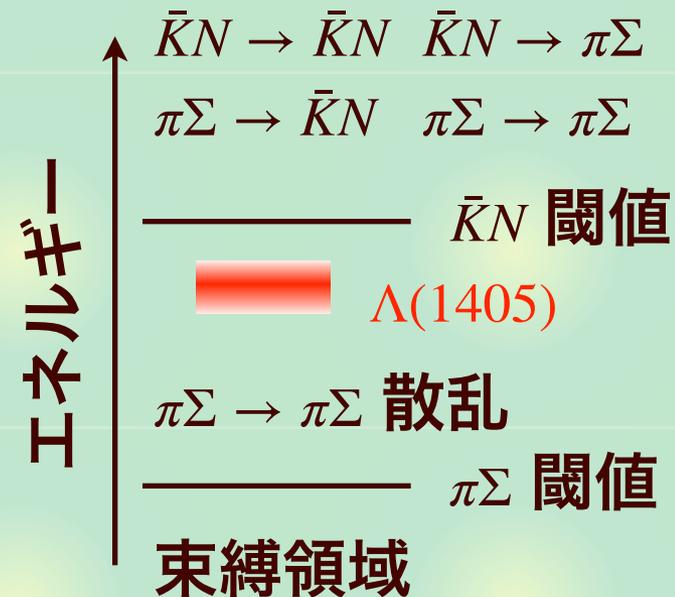
共鳴状態と散乱問題

共鳴状態とは？

- 量子力学的に準安定な”状態”
- 時間がたつと**崩壊**する

散乱問題の用語

- 弾性散乱：始状態 = 終状態
- 閾値：散乱が始まる最低エネルギー
- 共鳴状態：閾値より上のエネルギーを持つ



非弾性散乱

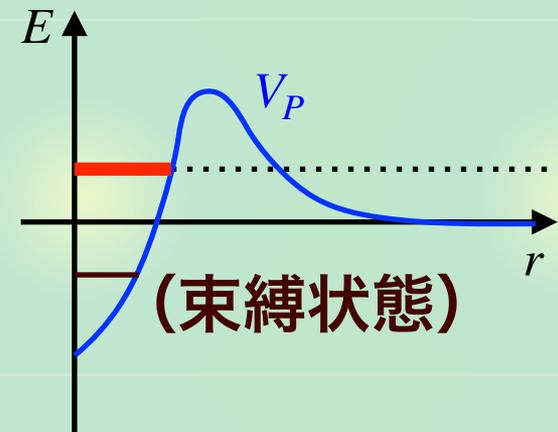
- 同じ量子数を持つ異なる終状態へ遷移 ($\pi\Sigma \rightarrow \bar{K}N, \dots$)
- チャンネル：遷移できる状態 ($\pi\Sigma, \bar{K}N, \dots$)

共鳴状態の分類

$E > 0$ の状態を実現する方法

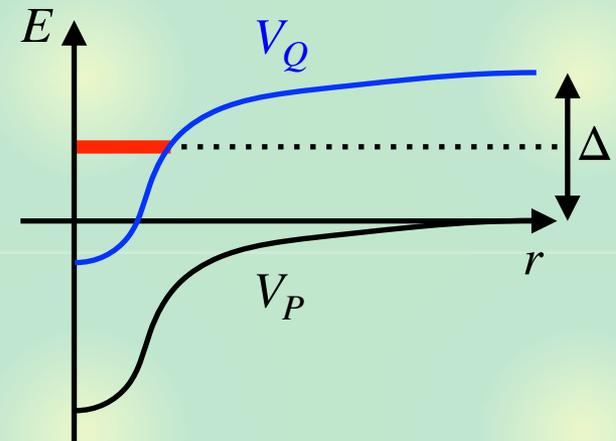
1) 形状（ポテンシャル）共鳴

- 1チャンネル問題 (P)
- ポテンシャル障壁で $E > 0$
- **トンネル効果**で崩壊



2) フェッシュバッハ共鳴

- チャンネル結合問題 ($P+Q$)
- Q の束縛状態だが $E_P > 0$
- **チャンネル遷移**で崩壊



起源が異なる両者を区別する方法？ → 講義3の複合性

共鳴をどう特徴づけるか

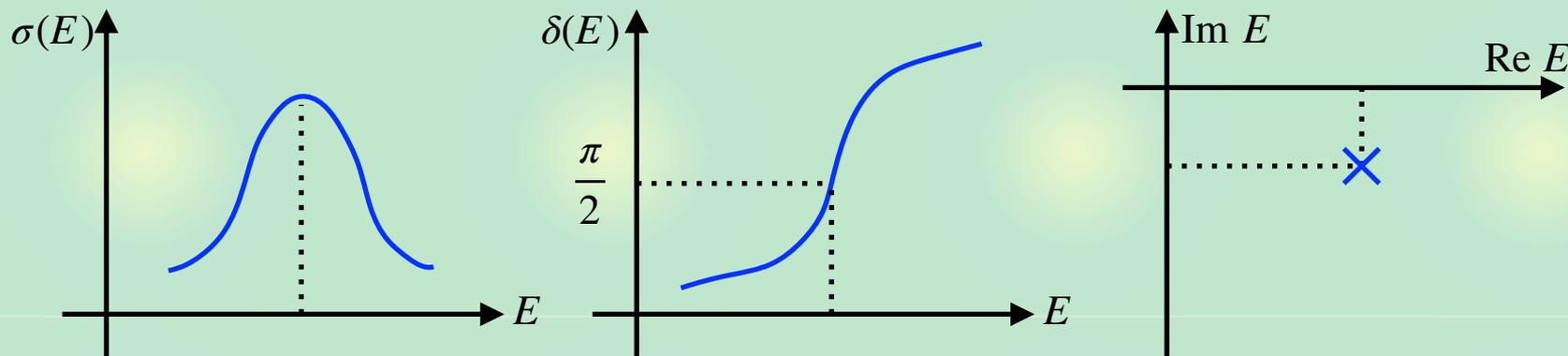
共鳴状態の様々な定義

1) スペクトル、散乱断面積のピーク

2) 位相差が $\pi/2$ を切るエネルギー

3) 複素エネルギー固有状態： $H|R\rangle = E_R|R\rangle$, $E_R \in \mathbb{C}$

4) 散乱振幅の極



示すこと

- 3) と 4) は等価で理論的に**不定性のない定義**

- 1) と 2) は理想的な極限でのみ 3) と 4) に一致

ガモフ理論

ハミルトニアンの“固有状態”としての共鳴状態

- 複素エネルギー

G. Gamow, Z. Phys. 51, 204 (1928)

Zur Quantentheorie des Atomkernes.

Von G. Gamow, z. Zt. in Göttingen.

Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 2. August 1928.)

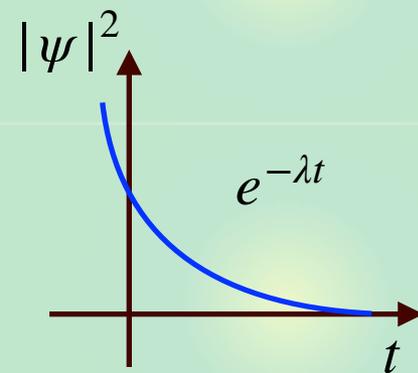
Um diese Schwierigkeit zu überwinden, müssen wir annehmen, daß die Schwingungen gedämpft sind, und E komplex setzen:

$$E = E_0 + i \frac{\hbar \lambda}{4\pi},$$

wo E_0 die gewöhnliche Energie ist und λ das Dämpfungsdekrement (Zerfallskonstante). Dann sehen wir aber aus den Relationen (2a) und (2b),

- 時間依存性：存在確率が時間とともに減少

$$\psi = \Psi(q) \cdot e^{+ \frac{2\pi i E}{\hbar} t}, \quad \propto e^{+2\pi i E_0 t / \hbar} e^{-(\lambda/2)t}, \quad |\psi|^2 \propto e^{-\lambda t}$$



エルミート演算子の固有値は実数では？

- 固有値が実数なのはヒルベルト空間（～2乗可積分な関数空間）

$$\int |\psi(\mathbf{r})|^2 d^3 r < \infty$$

- 定義域を拡張すると複素固有値を持つことができる

井戸型ポテンシャル問題

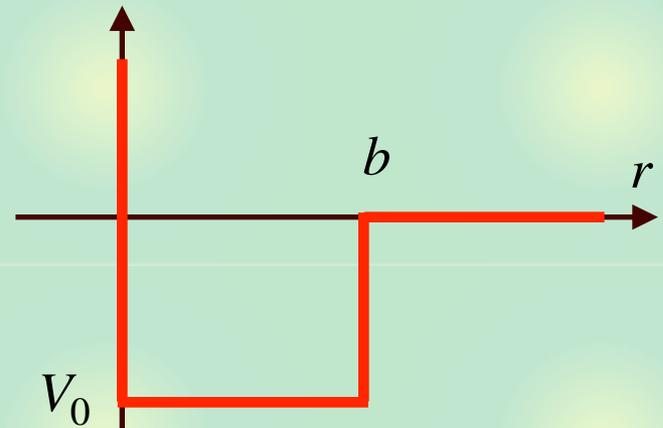
s波の動径波動関数のシュレディンガー方程式 ($\hbar = 1, m = 1$)

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2 \chi(r)}{dr^2} + V(r) \chi(r) = E \chi(r)$$

- 波動関数は $\psi_{\ell, m}(\mathbf{r}) = \frac{\chi_{\ell}(r)}{r} Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{r}})$

- 井戸型ポテンシャル

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & (0 \leq r \leq b) \\ 0 & (b < r) \end{cases}$$

- 散乱解 ($E > 0$ 、連続固有状態、境界条件 $\chi(r=0) = 0$)

$$\chi(r) = \begin{cases} C \sin(\sqrt{2(E + V_0)} r) & (0 \leq r \leq b) \\ A^-(p) e^{-i\sqrt{2E} r} + A^+(p) e^{+i\sqrt{2E} r} & (b < r) \end{cases}$$

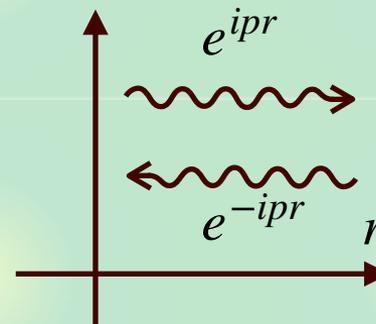
注) 散乱解は規格化できない

束縛解

$r \rightarrow \infty$ での波動関数 (固有運動量 $p = \sqrt{2E}$)

$$\chi(r) \rightarrow A^-(p)e^{-ipr} + A^+(p)e^{+ipr}$$

内向き波 外向き波



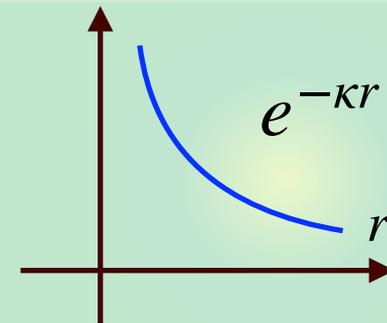
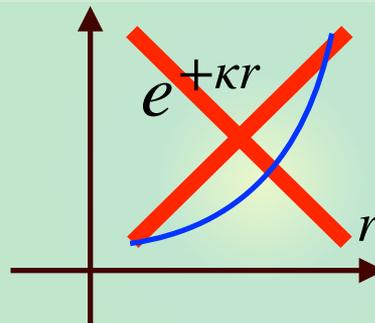
束縛解 ($E < 0$ 、離散固有状態)

- $p = \sqrt{2E}$ は純虚数

$$p = i\kappa, \quad \kappa = \sqrt{2|E|} > 0$$

- $r \rightarrow \infty$ での波動関数

~~$$\chi(r) \rightarrow A^-(i\kappa)e^{+\kappa r} + A^+(i\kappa)e^{-\kappa r}$$~~



- 波動関数が2乗可積分：境界条件 $\psi(r \rightarrow \infty) = 0$

→ $A^-(i\kappa) = 0$ ：内向き波が消える条件、解の条件式に対応

離散固有状態は $r \rightarrow \infty$ で外向き境界条件を満たす

共鳴解

束縛解の純虚数の運動量 $p = i\kappa$

- 物理的な散乱の運動量 p は実数

→ 束縛状態は運動量を純虚数に解析接続して得られた解

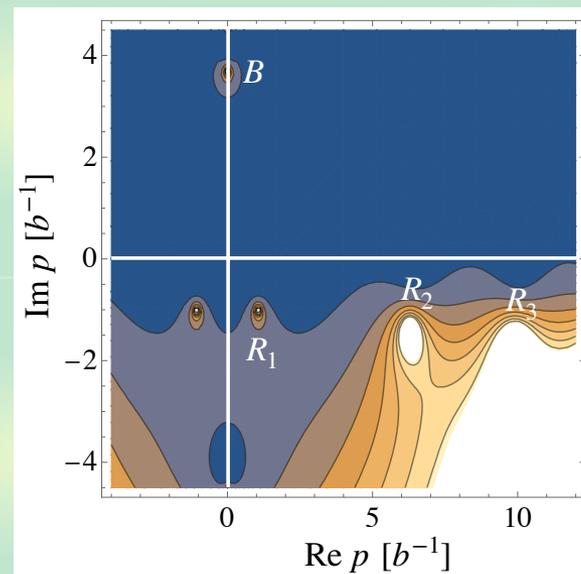
共鳴解：運動量 p を複素数に解析接続した解

- 外向き境界条件： $A^-(p) = 0, p \in \mathbb{C}$

- $V_0 = 10b^{-2}$ の場合の数値解

	$p [b^{-1}]$	$E = p^2/2 [b^{-2}]$
束縛状態 B	$+ 3.68i$	$- 6.78$
第 1 共鳴 R_1	$1.06 - 1.02i$	$0.05 - 1.08i$
第 2 共鳴 R_2	$6.29 - 1.41i$	$18.8 - 8.86i$
第 3 共鳴 R_3	$9.90 - 1.69i$	$47.6 - 16.8i$
⋮		

複素 p 平面の $1/|A^-(p)|$



共鳴解の波動関数

複素 p 平面の $1/|A^-(p)|$

- 共鳴解は複素 p 平面の

下半面 ($\text{Im } p < 0$) に存在

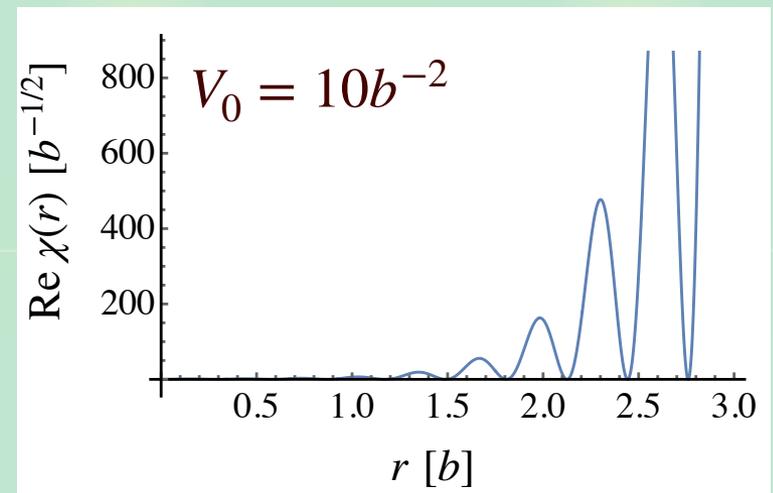
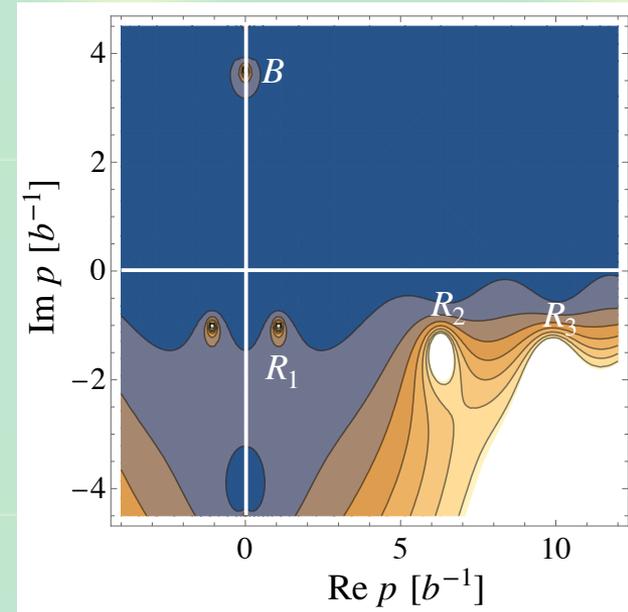
$$p = p_R - ip_I, \quad p_R, p_I > 0$$

- 波動関数の振る舞い

$$\chi(r) \rightarrow A^+(p)e^{ipr} \propto e^{ip_R r} e^{-p_I r}$$

振動 増大

→ $r \rightarrow \infty$ で振動しながら発散する
通常規格化ができない



波動関数が2乗可積分でないので複素固有値が許される

物理量の期待値の計算

束縛状態の波動関数による期待値の計算

$$N = \langle B | B \rangle = \int [\psi_B(\mathbf{r})]^* \psi_B(\mathbf{r}) d^3r = \int |\psi_B(\mathbf{r})|^2 d^3r \geq 0$$

$$\langle r^2 \rangle = \langle B | r^2 | B \rangle = \int [\psi_B(\mathbf{r})]^* r^2 \psi_B(\mathbf{r}) d^3r \in \mathbb{R}$$

→ 観測量（エルミート演算子）の期待値は実数

共鳴状態の場合（ガモフベクトルの定義と内積の拡張）

N. Hokkyo, Prog. Theo. Phys. 33, 1116 (1965), T. Berggren, Nucl. Phys. 109, 265 (1968)

$$H |R\rangle = E_R |R\rangle, \quad E_R \in \mathbb{C}, \quad \langle R | R \rangle \rightarrow \infty$$

$$\langle \tilde{R} | H = \langle \tilde{R} | E_R \quad \leftarrow \text{同じ } E_R \text{ を持つように定義}$$

$$N = \langle \tilde{R} | R \rangle = \int \psi_R(\mathbf{r}) \psi_R(\mathbf{r}) d^3r \in \mathbb{C}, \quad \langle r^2 \rangle = \langle \tilde{R} | r^2 | R \rangle \in \mathbb{C}, \dots$$

有限

エネルギーと同様に期待値は複素数 → 解釈？

講義2のまとめ（前半）

 ハミルトニアンの離散固有状態は「外向き境界条件」で与えられる

- 束縛状態：固有運動量を純虚数にした解
- 共鳴状態：固有運動量を複素数にした解
→ 固有エネルギーが複素数

 共鳴状態の波動関数

- 遠方で発散する規格化できない波動関数
- 内積を拡張した期待値は複素数になる

目次



講義 1 : 導入

- エキゾチックハドロンの現状
- カイラル対称性と有効場の理論



講義 2 : 共鳴状態の記述

- ハミルトニアンの固有状態
- 散乱振幅と共鳴状態

講義 3 : $\Lambda(1405)$ 共鳴の構造

- $\bar{K}N$ 散乱振幅と共鳴状態
- ハドロンの複合性

散乱理論：設定

最も基本的な散乱

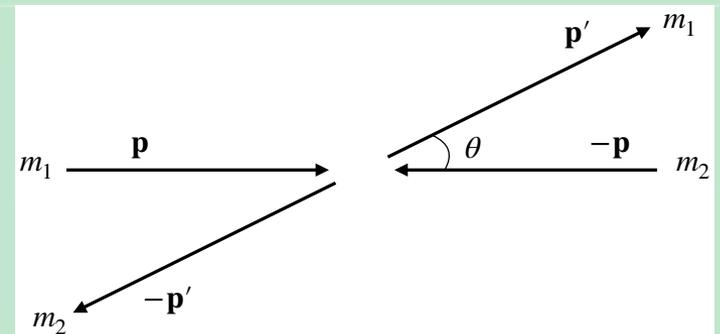
- 非相対論的、質量 m_1, m_2 の粒子の2体散乱
- 弾性散乱、内部自由度（スピン、フレーバーなど）なし
- 回転対称性（球対称ポテンシャル、 $[H, L] = 0$ ）
- 短距離力（ポテンシャルが遠方で十分はやく消える）

散乱を特徴づけるパラメーター2つ

- エネルギー E または運動量の大きさ p (E と p は**1対2**対応)

$$E = \frac{p^2}{2\mu}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

- 散乱角 θ
- 部分波分解すれば θ は角運動量 ℓ



散乱理論：物理量

散乱を表す物理量の関係

J.R. Taylor, *Scattering theory* (Wiley, New York, 1972)

- 部分波 ℓ のS行列要素 \sim 入射波がどれだけ散乱されたか

$$s_\ell(p) \in \mathbb{C}$$

- 部分波 ℓ の位相差 $\delta_\ell(p) \in \mathbb{R}$

$$s_\ell(p) = \exp\{2i\delta_\ell(p)\}$$

- 部分波 ℓ の散乱振幅 (T行列の定義より) $f_\ell(p) \in \mathbb{C}$

$$f_\ell(p) = \frac{s_\ell(p) - 1}{2ip}$$

- 散乱断面積 (全断面積)

$$\sigma(p) = \sum_{\ell} 4\pi(2\ell + 1) |f_\ell(p)|^2 = \sum_{\ell} \sigma_{\ell} \leftarrow \text{部分波 } \ell \text{ の断面積}$$

波動関数との関係

散乱の波動関数の漸近形（以下角運動量 $\ell = 0$ を考える）

$$\psi_p(r) \rightarrow \frac{i}{2}[J(p)e^{-ipr} - J(-p)e^{+ipr}] \quad (r \rightarrow \infty)$$

- **ヨスト関数** $J(p)$ ：内向きの波 e^{-ipr} の振幅
- 外向きの波の振幅は $-J(-p)$ で与えられる
- regular solution という規格化をした場合の漸近形

S行列、散乱振幅とヨスト関数

$$s(p) = \frac{J(-p)}{J(p)} \quad \sim \text{内向き振幅で規格化した外向き振幅}$$

$$f(p) = \frac{s(p) - 1}{2ip} = \frac{J(-p) - J(p)}{2ipJ(p)}$$

離散固有値の条件

固有値の条件：外向き境界条件

$$\psi_p(r) \rightarrow \frac{i}{2} [J(p)e^{-ipr} - J(-p)e^{+ipr}] \quad (r \rightarrow \infty)$$

- ヨスト関数の**ゼロ点** $J(p_R) = 0$ ただし p_R は複素数

- p_R はS行列の**極**

$$s(p_R) = \frac{J(-p_R)}{J(p_R)} \rightarrow \infty$$

- p_R は散乱振幅の**極**

$$f(p_R) = \frac{J(-p_R) - J(p_R)}{2ip_R J(p_R)} \rightarrow \infty$$

ヨスト関数の性質 $J(-p^*) = [J(p)]^* \rightarrow p$ が解なら $-p^*$ も解

複素エネルギーとリーマン面

エネルギー E と運動量 p の関係

$$E = \frac{p^2}{2\mu} = \frac{|p|^2}{2\mu} e^{2i\theta_p} = |E| e^{i\theta_E}$$

- 運動量を複素数にする： $p = |p| e^{i\theta_p}$

- エネルギーの位相 θ_E

$$2\theta_p = \theta_E$$

- θ_p が $0 \rightarrow 2\pi$ のとき θ_E は $0 \rightarrow 4\pi$

- p と $-p$ (θ_p と $\theta_p + \pi$) は同じ E に写像される

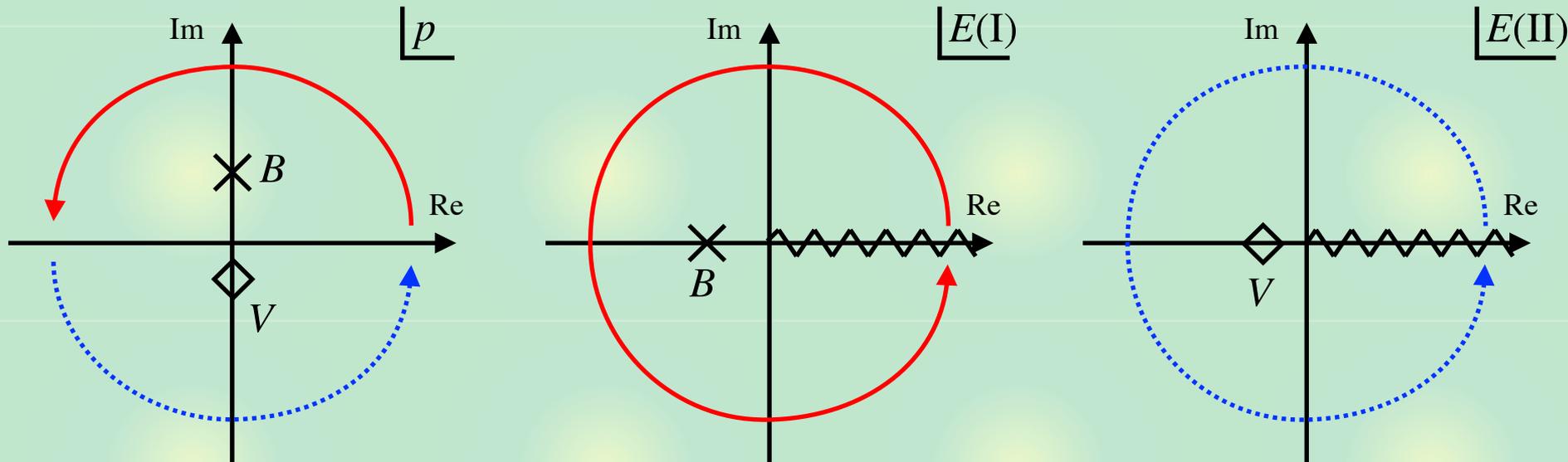
p の有理型関数 $(s(p), f(p))$ は E の2枚のリーマン面上で定義

- $0 \leq \theta_E < 2\pi$: E の第1リーマン面 (p の上半面)

- $2\pi \leq \theta_E < 4\pi$: E の第2リーマン面 (p の下半面)

離散固有状態（虚軸上）

複素 p 平面と複素 E 平面での純虚数の解 ($p = -p^*$)



- 束縛状態 (B) : $E_B < 0$ で第1リーマン面

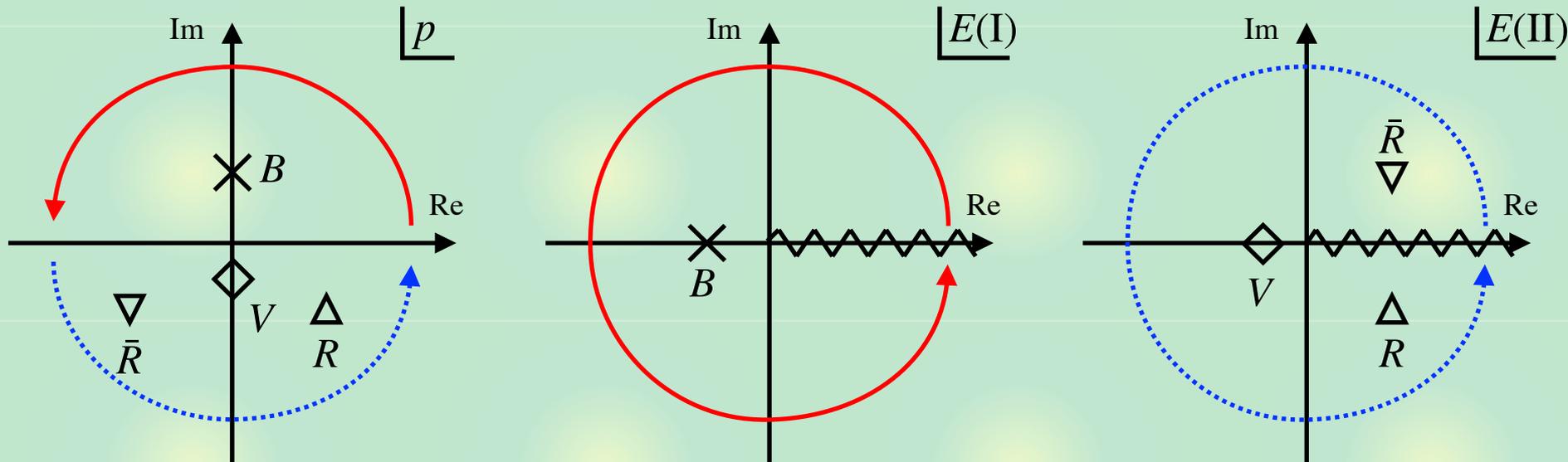
$$\text{Re} [p_B] = 0, \quad \text{Im} [p_B] > 0$$

- virtual状態 (V) : $E_V < 0$ で第2リーマン面

$$\text{Re} [p_V] = 0, \quad \text{Im} [p_V] < 0$$

離散固有状態（複素平面）

複素数の解（ $p \neq -p^*$ 、必ず対で存在）



- 共鳴状態 (R) : $\text{Re} [E_R] > 0, \text{Im} [E_R] < 0$ で第2リーマン面

$$\text{Re} [p_R] > 0, \quad \text{Im} [p_R] < 0$$

- anti-resonance (\bar{R}) : $\text{Re} [E_{\bar{R}}] > 0, \text{Im} [E_{\bar{R}}] > 0$ で第2リーマン面

$$\text{Re} [p_{\bar{R}}] < 0, \quad \text{Im} [p_{\bar{R}}] < 0$$

共鳴極と実軸上での散乱振幅

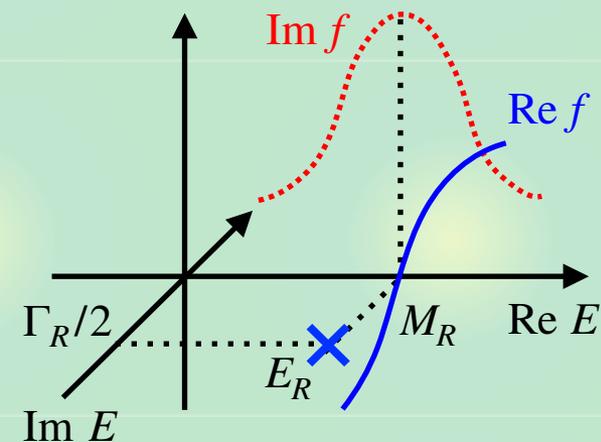
$E = E_R$ の共鳴極のまわりでローラン展開

$$f(E) = \frac{C_{-1}}{E - E_R} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (E - E_R)^n$$

Breit-Wigner項 非共鳴項

$E_R = M_R - i\Gamma_R/2$ とすれば、Breit-Wigner項は

$$\begin{aligned} f_{BW}(E) &= -\frac{\Gamma_R}{2p} \frac{1}{E - M_R + i\Gamma_R/2} \\ &= -\frac{\Gamma_R}{2p} \frac{E - M_R - i\Gamma_R/2}{(E - M_R)^2 + \Gamma_R^2/4} \end{aligned}$$



f_{BW} は $E = E_R$ で発散するが非共鳴項は正則

- 非共鳴項が f_{BW} に比べて無視できると仮定した場合

→ $E = M_R$ で散乱振幅の**実部**が0、**虚部**が極大

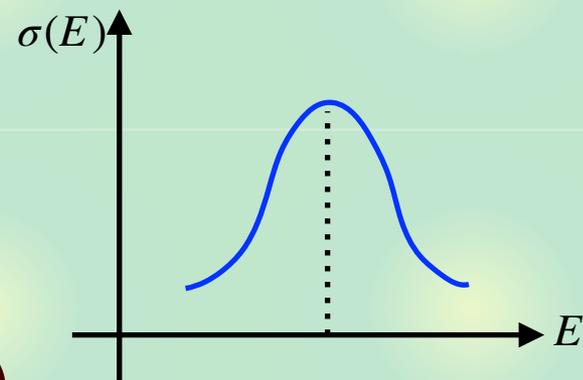
断面積と位相差への影響

$E = M_R$ で散乱振幅の虚部が極大

- 光学定理

$$\text{Im } f(E) = \frac{p}{4\pi} \sigma(E)$$

- 散乱断面積 σ がピーク \rightarrow 共鳴の定義 1)

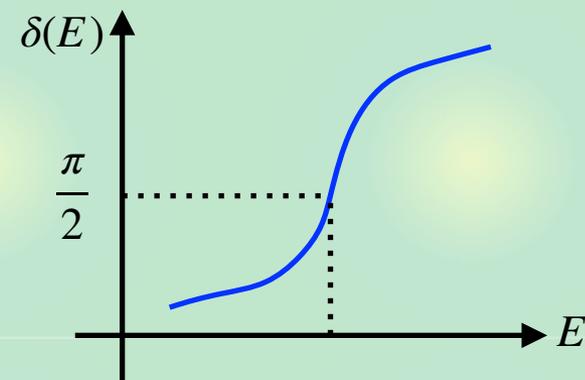


$E = M_R$ で散乱振幅の実部が0

$$0 = \text{Re } [f(M_R)] = \text{Re} \left[\frac{s(M_R) - 1}{2i\sqrt{2\mu M_R}} \right]$$

- 分子が実であれば良いので $\text{Im } [s(M_R)] = 0$

- $s = e^{2i\delta}$ より $E = M_R$ で位相差が $\delta = \pi/2$ \rightarrow 共鳴の定義 2)



どちらも非共鳴項が小さく無視できると**仮定した**場合のみ成立

講義2のまとめ（後半）

共鳴状態：散乱振幅の極 = 複素固有状態

T. Hyodo, M. Niiyama, Prog. Part. Nucl. Phys. 120, 103868 (2021)

Schrödinger eq. + outgoing b.c.
at energy E ($p = \sqrt{2\mu E}$)

- bound states ($E < 0$)

$$p = i\kappa \quad (\kappa > 0)$$

- resonances ($E \in \mathbb{C}$)

$$p \in \mathbb{C} \quad (\text{Im } p < 0)$$



zero of Jost function

$$f_\ell(p) = 0$$



pole of s-matrix/
scattering amplitude

$$|f_\ell(p)| \rightarrow \infty$$

$$|s_\ell(p)| \rightarrow \infty$$

非共鳴項が無視できる理想的な場合には共鳴のエネルギーで断面積がピーク、位相差が $\pi/2$ となる