

ブラックホールの情報パラドクスへの

量子情報のアプローチ

1. 量子情報のキ

Nielsen & Chuang の本

・ 2^N
・ Vidal

2. Hayden-Preskill の思考実験

- ・ Hayden & Preskill JHEP 0709:120 (2007)
- ・ Harlow Rev. Mod. Phys. 88, 15002 (2016)
- ・ YN, Wakakuwa & Koashi arXiv: 2007.00895 (2020)

1. 量子情報の基礎 (言葉遣い)

基本的には有限次元系を扱う。

✓ 量子状態 = 密度行列. ($\rho = \rho^\dagger, \rho \geq 0, \text{Tr}[\rho] = 1$)

- AB系の状態 ρ^{AB}
- 状態が持つ相関.

$$\rho^A \otimes \rho^B$$

product state

無相関.

$$\sum_i p_i \rho_i^A \otimes \sigma_i^B$$

separable state

古典相関

$$\rho^{AB}$$

Entangled state. = "Inseparable"

量子相関.

• 最大エンガール状態 (MES)

2 qubits の場合: $|\Phi\rangle^{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle^{AB} + |11\rangle^{AB})$, $|\Phi'\rangle^{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0+\rangle^{AB} - |1-\rangle^{AB})$ etc...

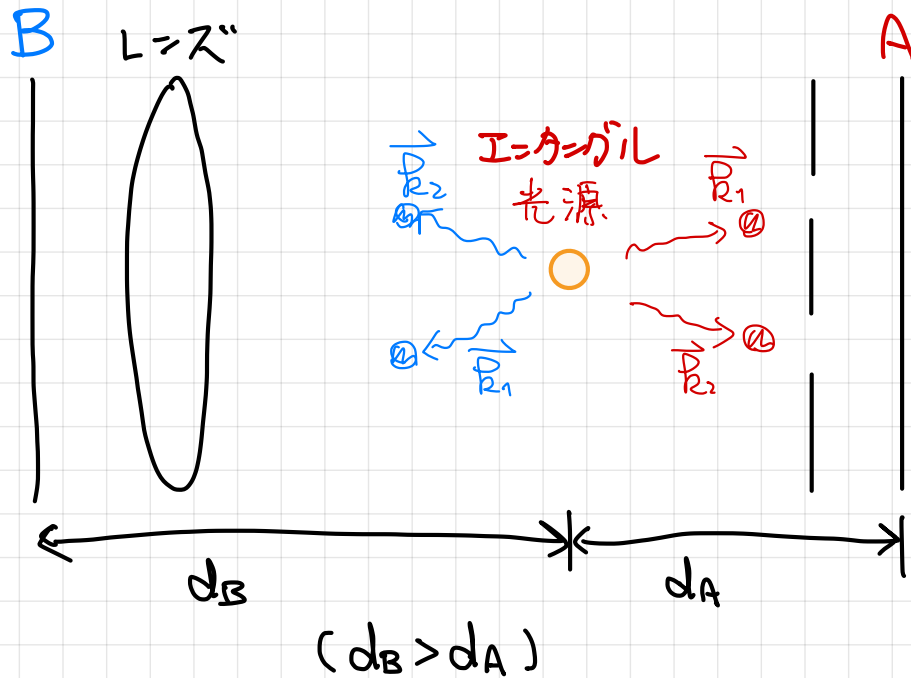
$\uparrow$
 $|0\rangle \otimes |0\rangle$

一般: $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{d_A}$: A系の基底, $\{|f_i\rangle\}_{i=1}^{d_B}$: B系の基底 ($d_A \leq d_B$)

$$|\Phi\rangle^{AB} := \frac{1}{\sqrt{d_A}} \sum_{i=1}^{d_A} |e_i\rangle^A \otimes |f_i\rangle^B$$

寄り道 : エンタングルメントの奇妙な性質.

ヤングの二重スリット実験 with エンタングルメント



① 光源から出た光子は“干渉する”

② エンタングル光源から2光子が出る場合
⇒ 干渉縞が消える。

∴) 光子が上下どちらのスリットを通ったかの情報が ④ の光子に残っている。

③ レンズを置いて $d_B > d_A$ のとき. ⇒ 干渉縞は現れない。

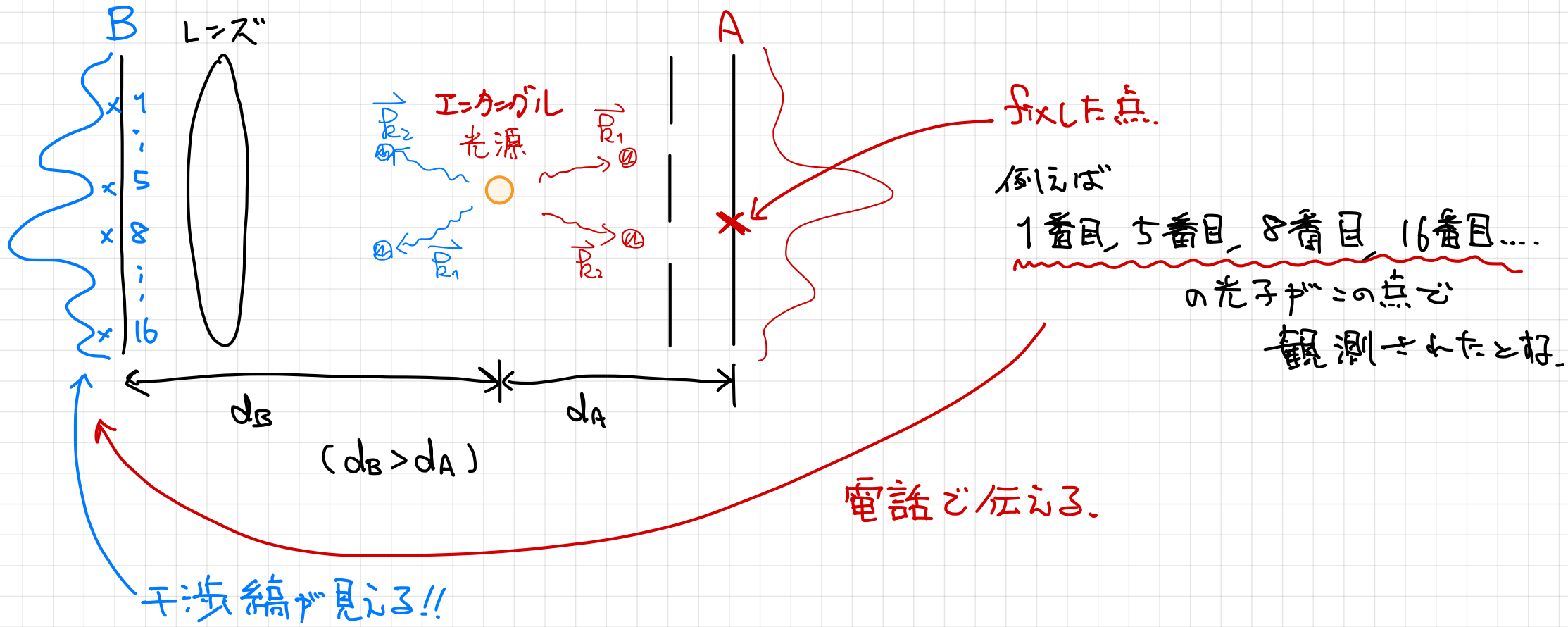
∴) ②と同じ状況。

しどしど!!

スクリーン A 上の fix した点で ④ が観測された場合だけを取り出すと

スクリーン B 上に干渉縞があらわれる!!

ヤングの二重スリット実験 with エンタングルメント



「エンタングルメント + 古典通信」で、干渉縞という

量子現象が遠く離れた場所にレポートした!!

重要:

エンタングルメント単体では「何も」面白くことは起らない.

「+α」(例えば古典通信)があって、はじめて意味のあることが起きる!!

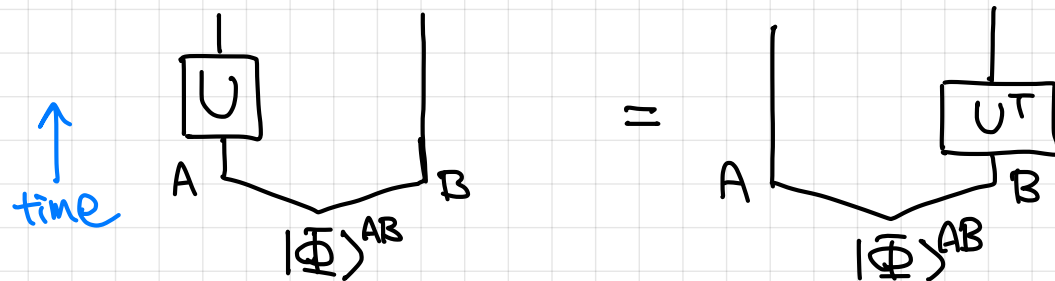
最大エンタングル状態の性質

$|e_i\rangle \leftrightarrow |f_i\rangle$ と読みかえて転置

$$\textcircled{1} (U^A \otimes I^B) |\Phi\rangle^{AB} = (I^A \otimes (U^T)^B) |\Phi\rangle^{AB}$$

$\Rightarrow$ 片方の系から、他方の系を“回せる”。

ダイアグラム

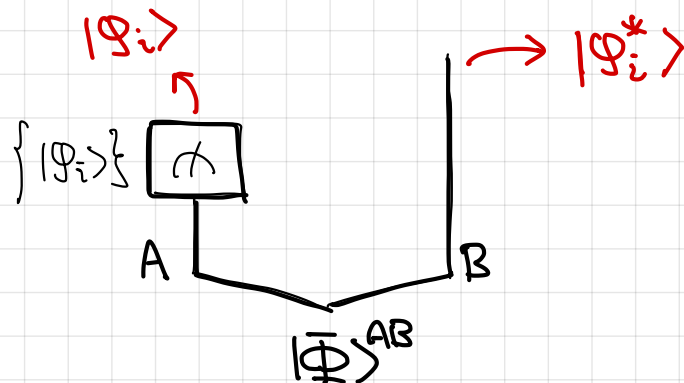


$\textcircled{2} |\varphi\rangle^A$: state

$$(\langle\varphi|^A \otimes I^B) |\Phi\rangle^{AB} = |\varphi^*\rangle^B$$

$|e_i\rangle \leftrightarrow |f_i\rangle$ と読みかえて、C.C.

$\uparrow$ 量子テレポーション/etc の基礎



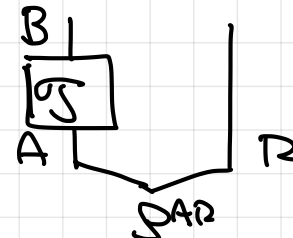
A系を測る=とど(ある程度)

B系を“コントロール”可能。

[ただし 測(定)は probabilistic]

✓ $\mathcal{T} : \mathcal{L}(A) \rightarrow \mathcal{L}(B) = \underbrace{CP}_{\text{completely-positive}} \underbrace{TP}_{\text{trace-preserving}} \text{ map } \mathcal{T}^{A \rightarrow B}$

$\mathcal{T}^{A \rightarrow B}$ is CP $\Leftrightarrow \forall \rho^{AR} \geq 0, (\mathcal{T}^{A \rightarrow B} \otimes \text{id}^R)(\rho^{AR}) \geq 0$



$\mathcal{T}^{A \rightarrow B}$ is TP $\Leftrightarrow \forall X^A, \text{Tr}[\mathcal{T}^{A \rightarrow B}(X^A)] = \text{Tr}[X^A]$.

$\rho^{AR} \geq 0 \Rightarrow \text{output } \rho \geq 0$.

CPTP map on $|\mathcal{H}\rangle$

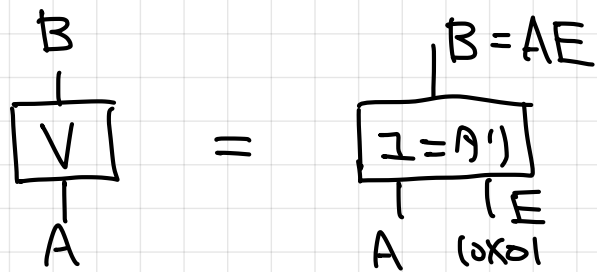
• $I = \mathcal{T}^A : U \quad (U U^\dagger = U^\dagger U = I)$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{CP} : \rho^{AR} = \sum_i p_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|^{AR} \Rightarrow U^A \rho^{AR} (U^A)^\dagger = \sum_i p_i U^A |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|^{AR} (U^A)^\dagger \\ \text{TP} : \text{Tr}[U \rho U^\dagger] = \text{Tr}[U^\dagger U \rho] = \text{Tr}[\rho] \end{array} \right.$

• Isometry $V^{A \rightarrow B}$ ($(V^{A \rightarrow B})^\dagger V^{A \rightarrow B} = I^A$) ($\dim B \geq \dim A$).

= 条件を満たす $I = A'$ を示す。

$V^\dagger V$ は必ずしも I ではない。



$\hookrightarrow I = A'$ は Isometry の special case.

- Partial trace = 系の一部を捨てる.

ρ^{AB} : AB系の状態

$$\rho^B = \text{Tr}_B [\rho^{AB}] = \sum_{i=1}^{d_B} (I^A \otimes \langle e_i |^B) \rho^{AB} (I^A \otimes |e_i\rangle^B).$$

e.g.) $|\Phi\rangle^{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \longrightarrow \Phi^{AB} = \frac{1}{2}(|00\rangle + |11\rangle)(\langle 00| + \langle 11|)$

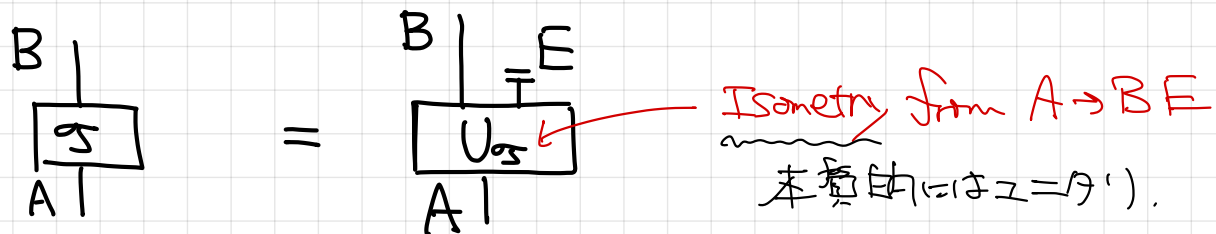
$$\begin{aligned} \Phi^A &= \text{Tr}_B [\Phi^{AB}] \\ &= (I^A \otimes \langle 0|^B) \Phi^{AB} (I^A \otimes |0\rangle^B) + (I^A \otimes \langle 1|^B) \Phi^{AB} (I^A \otimes |1\rangle^B) \\ &= \frac{1}{2} |0\rangle\langle 0|^A + \frac{1}{2} |1\rangle\langle 1|^A \\ &= \frac{I^A}{2} \end{aligned}$$

MESの部分系は完全混合状態 どの情報ももたない.

(エンタングルした) 純粋状態の一部 $\Rightarrow$ 混合状態

※ 量子力学ではダイクミクス = ユニタリ なのは？

CPTP = Isometry + partial trace.



$$\sigma^{A \rightarrow B}(\rho^A) = \text{Tr}_E \left[\underbrace{U_\sigma^{A \rightarrow BE}}_{\sigma \text{ の Stinespring dilation}} \rho^A (U_\sigma^{A \rightarrow BE})^\dagger \right]$$

✓ 量子測定 = POVM (positive-operator-valued measure)

$$\{M_i\}_i \quad \text{s.t.} \quad M_i \geq 0, \quad \sum_i M_i = I.$$

$$\hookrightarrow i \text{ 番目の確率 } \text{Tr}[\rho M_i]$$

✓ 今回の講義で使える。

Fact 1. [Uhlmann の定理 (の簡単な場合)]

$|\varphi\rangle^{AB}, |\psi\rangle^{AC}$ かつ $\varphi^A \approx \psi^A$ である時, ($\dim B \leq \dim C$)

$\exists$ isometry $V^{B \rightarrow C}$ s.t. $(I^A \otimes V^{B \rightarrow C}) |\varphi\rangle^{AB} \approx |\psi\rangle^{AC}$

例) $|\Phi\rangle^{AB}, |\Psi\rangle^{AB}$: MES. $\Rightarrow \Phi^A = \Psi^A = \frac{I^A}{\sqrt{d_A}}$

$\therefore \exists U^B$ s.t. $(I^A \otimes U^B) |\Phi\rangle^{AB} = |\Psi\rangle^{AB}$

Fact 2 [Purification (純粋化).]

$\forall$ 混合状態 ρ^A に対して, $\exists$ 純粋状態 $|\rho\rangle^{AB}$

s.t. $\text{Tr}_B [|\rho\rangle\langle\rho|^{AB}] = \rho^A$.

例) $\rho^A = \sum_i p_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|^A$

$\Rightarrow |\rho\rangle^{AB} = \sum_i \sqrt{p_i} |\varphi_i\rangle^A \otimes |\varphi_i\rangle^B$

(一意ではない)

$(I^A \otimes U^B) |\rho\rangle^{AB}$ も純粋化.

エントロピー

von Neumann entropy : $H(\rho) := -\text{Tr}[\rho \log \rho]$

より具体的に、 $\rho = \sum_i p_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$ のとき、

$$H(\rho) = -\sum_i p_i \log p_i$$

← 系の“不確かさ”の指標 = “情報量”の目安

$$0 \leq H(\rho^A) \leq \log \dim A$$

$\uparrow$ pure state $\nwarrow$ $\rho^A = \text{Tr}_B \rho$

conditional entropy : $H(A|B)_\rho = H(\rho^{AB}) - H(\rho^B)$

← B系を排して、A系がどれくらい“不確か”か？

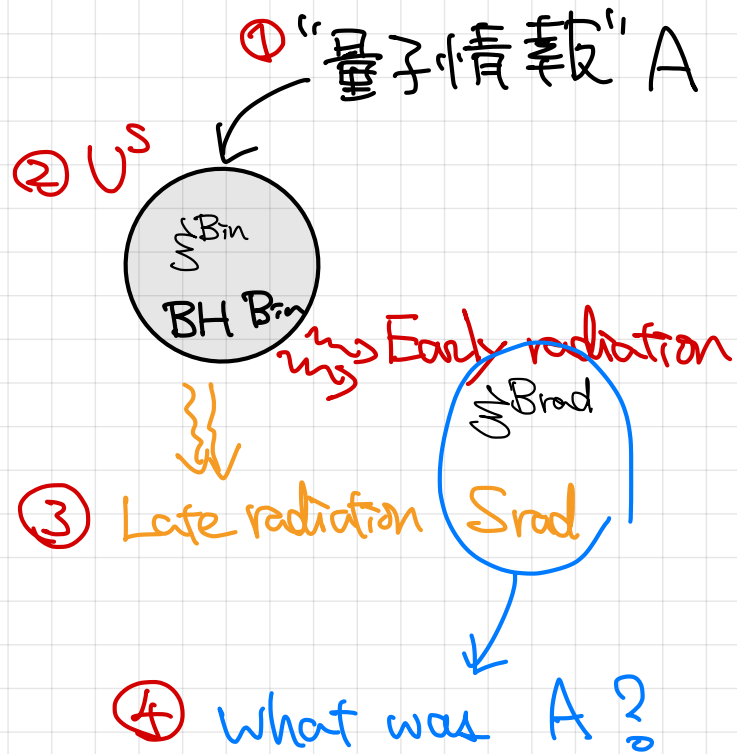
$$-\dim d_A \leq H(A|B)_\rho \leq \dim d_A$$

$\uparrow$ $\rho^{AB} = \text{MES}$ $\nwarrow$ $\rho^{AB} = \frac{\text{Tr}_A \rho}{d_A} \otimes \frac{\text{Tr}_B \rho}{d_B}$

[Horodecki et al., Nature 436, 673-676 (2005)]

2. Hayden-Preskill の思考実験

2-1 概要



初期条件 $|\xi\rangle^{B_{\text{in}}B_{\text{out}}}$: 純粋状態,

Step 1. 量子系 A を準備して、BH に投げ込む。

Step 2. $S = A B_{\text{in}}$ 系がユニタリ時間発展する。

Step 3. S 系の一部 S_{rad} が新しいホーキング放射として BH から放出される。

Step 4. Early & late radiation ($B_{\text{rad}} S_{\text{rad}}$) から、A 系の情報の復元を試みる。

$$|\xi\rangle^{B_{\text{in}}} = \text{Tr}_{B_{\text{out}}} [|\xi\rangle \times |\xi\rangle^{B_{\text{in}}B_{\text{out}}}]$$

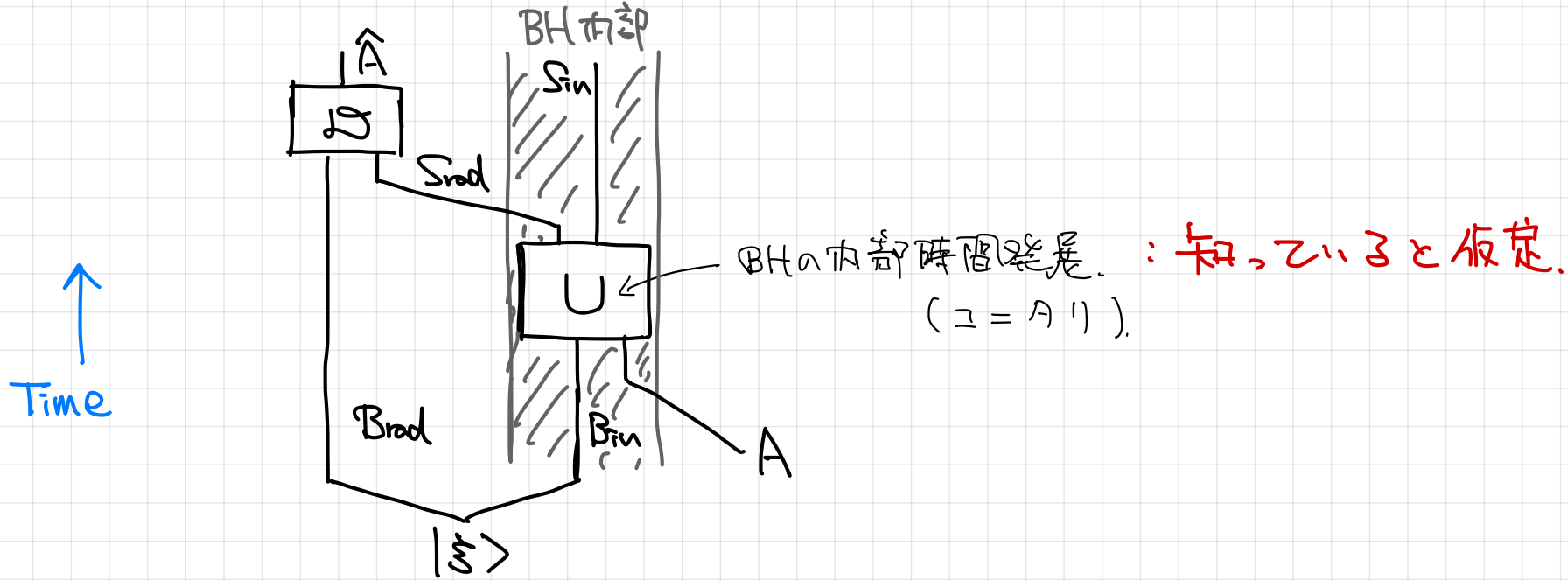
情報復元に成功!! $\iff$ A 系の量子情報が late radiation によって持ち去られた!!

↑ BH の情報パラドックスへの “操作論的な”
アプローチ。

2-2. ダイオゲラム.

BH 外部

BH 外部.

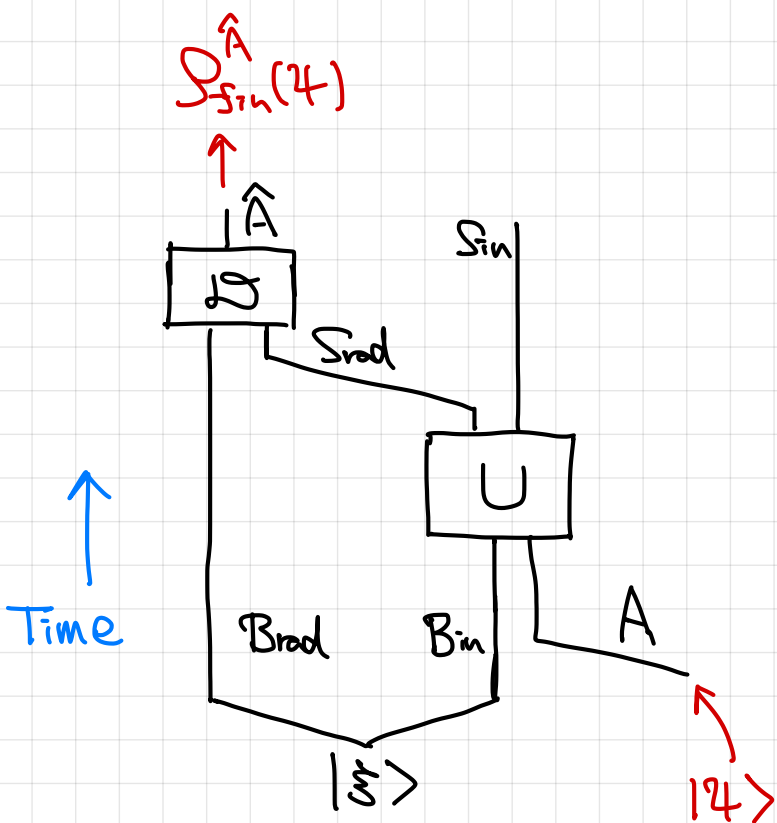


「A系の量子情報を復元する」とはどういふことか？

↳ そもそも量子系の情報とは何か？

$\Rightarrow$ 正確性は、全 2 qubits の toy model で示す。

「A系の情報を復元ね」とは何を意味する?



タイーな定義

A が $|\tau\rangle$ だとする。

$\hat{A}$ に与える状態: $S = AB_{in}$ とおく。

$$S_{Sin}^{\hat{A}}(\tau) := \mathcal{L}^{BradSin \rightarrow \hat{A}} \left(\text{Tr}_{Sin} [U^S(\tau^A \otimes \mathbb{I}^{B_{in} B_{rad}}) U^{S^\dagger}] \right)$$

$$\int d\tau \left\| S_{Sin}^{\hat{A}}(\tau) - \tau^{\hat{A}} \right\|_1 \leq \epsilon.$$

振いぶら……

← 何らかのキヨリ
 $\Leftrightarrow$ A の量子情報が ϵ まで復元された。

※ キヨリとしては、Trace norm を使う = とが正しい。

$$\|X\|_1 := \text{Tr} \sqrt{X^\dagger X}.$$

情報操作的に意味があるキヨリ (eg. wiki).

「A系の情報を復元せよ」とは何を意味する?

“量子情報は量子相関に保存される”.

量子相関を用いた定義.

A系の量子情報が“復元”

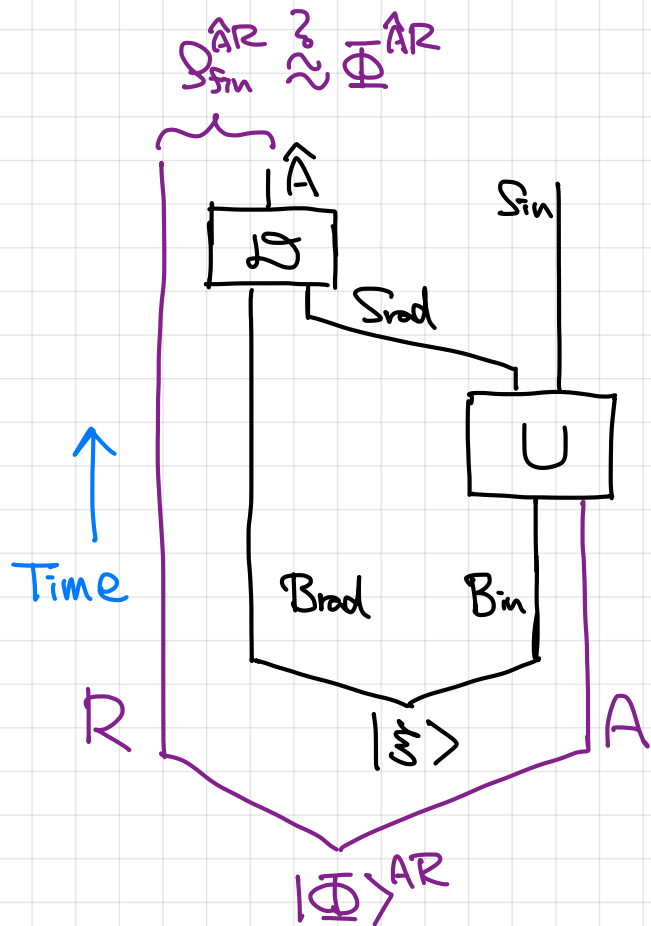
$\Leftrightarrow$ def. A系と最大エンタングルしたR系を導入して、
その量子相関を復元する。

reference系

$$\rho_{\text{fin}}^{\text{AR}}(\Phi) := \mathcal{L}^{\text{Brod} \rightarrow \hat{A}} \circ \text{Tr}_{\text{fin}} [U^S (\sum_{\text{Bin}} \text{Brod} \otimes \Phi^{\text{AR}}) U^{S\dagger}]$$

$$\| \rho_{\text{fin}}^{\text{AR}}(\Phi) - \Phi^{\hat{\text{AR}}} \| \leq \epsilon$$

$\Leftrightarrow$ Aの量子情報が“ $\epsilon - \epsilon$ ”
復元された。



「A系の情報を復元ね」とは何を意味する?

“量子情報は量子相関に保存される”.

量子相関の def $\Rightarrow$ ナイブな def.

$\therefore$) R系もランダムな状態で測定 $\{|\varphi^*\rangle\}$ s.t. $\int |\varphi^*\rangle\langle\varphi^*| d\varphi = I$.

$\hookrightarrow |\varphi^*\rangle$ も得たとする. $\leftarrow$ probabilistic.

⑤ $\Rightarrow$ A系は $|\varphi\rangle^A$ なので、 $\hat{A}$ 系は $S_{\text{fin}}^{\hat{A}}(\varphi)$

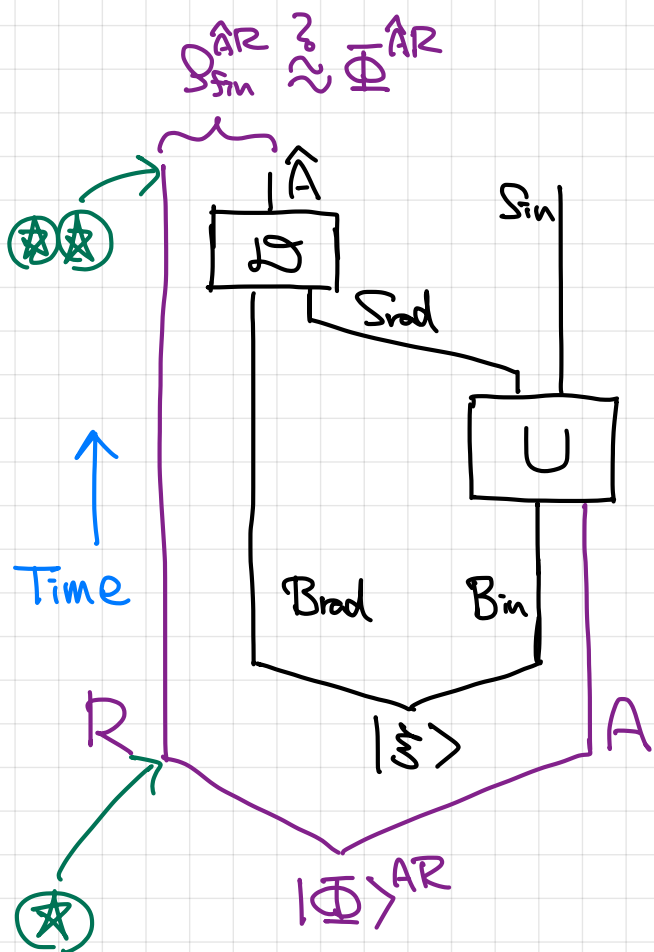
⑤⑤ $\Rightarrow S_{\text{fin}}^{\hat{A}R}(\Phi) \approx \Phi^{\hat{A}R}$ より $\hat{A}$ 系は $|\varphi\rangle^{\hat{A}}$

$$\therefore S_{\text{fin}}^{\hat{A}}(\varphi^A) \approx \varphi^{\hat{A}}$$

$$\Leftrightarrow \| S_{\text{fin}}^{\hat{A}}(\varphi^A) - \varphi^{\hat{A}} \|_1 \leq \epsilon.$$

測定の確率を考えると.

$$\int d\varphi \| S_{\text{fin}}^{\hat{A}}(\varphi^A) - \varphi^{\hat{A}} \|_1 \leq \epsilon.$$



「A系の情報を復元ね」とは何を意味する?

“量子情報は量子相関に保存される”。

復元エウー.

$$\Delta_U := \frac{1}{2} \min_{\mathcal{D}} \| \mathcal{S}_{\text{fin}}^{\hat{\text{AR}}}(\Phi) - \Phi^{\hat{\text{AR}}} \|_1$$

Remark

• $0 \leq \Delta v \leq 1$

考えたいこと. [Hayden-Preskill の思考実験]

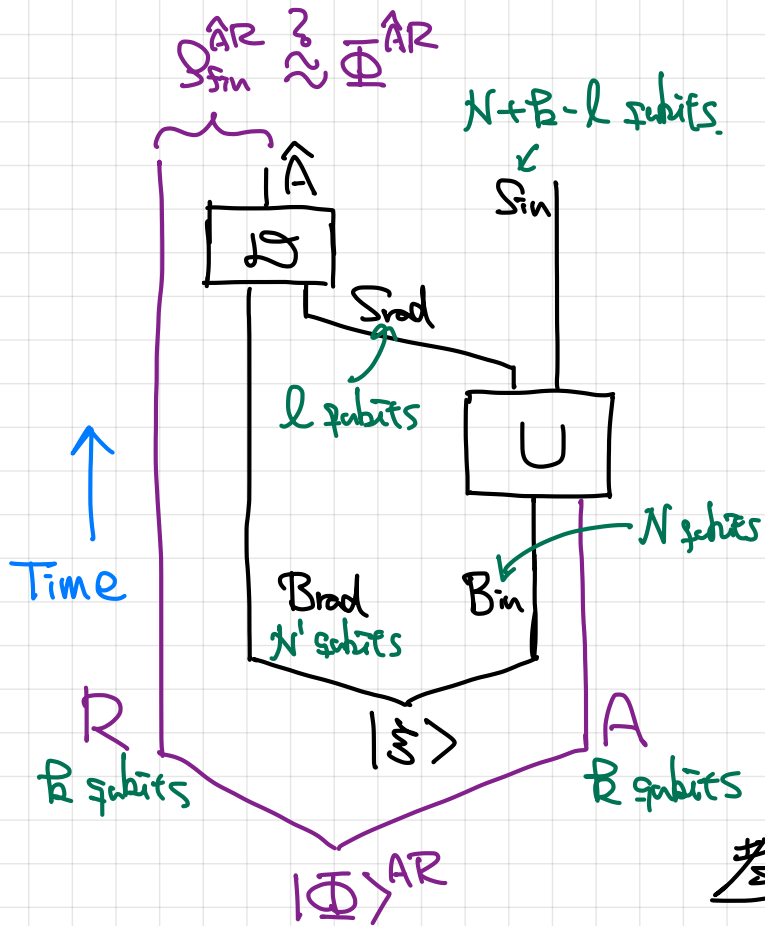
Late radiation $S_{rad} \propto \phi^{1/3}$ & $h < 5$, $T \propto 1/h^2$.

$$\Delta_U \ll 1 \quad p^m \text{ 成立 } \Rightarrow p'?$$

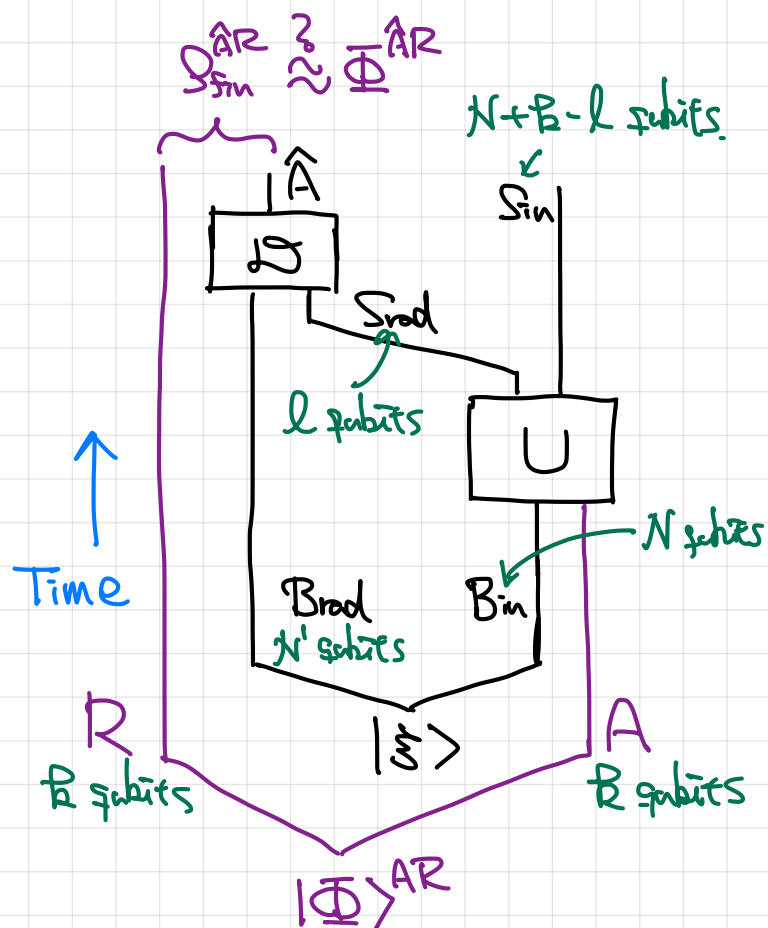
* $\mathcal{L} = N + \mathcal{R} \Rightarrow \text{BHは完全に蒸発}$

$$C \hookrightarrow D = U^+ \subset \frac{\mathbb{H}}{\Gamma} \cong \mathbb{H}^2, \quad \Delta_U = 0.$$

↳ どんな小惑星が復元可能か？



2-3. Hayden-Preskill の思考実験.



復元エラー Δ_U が (B, l, N) にどう依存するか?

→ Δ_U は BH のダイナミクス U に依存...

知らねえ...

Hayden-Preskill

→ BH は複雑 $\Rightarrow$ chaotic なはず!!

"スクランブリング"

↓
ランダム・ユニタリ

→ その後、一大研究テーマになる。

Remark

スクランブリングには様々な def が存在

→ ここでは unitary t-design の意味。

① スクランブリングにかかる時間

$$t_{\text{scr}} \approx r_s \log \frac{r_s}{l_p}$$

$$\begin{cases} r_s = 2GM : \text{Schwarzschild 半径} \\ l_p = \sqrt{8\pi G} : \text{Planck 長} \end{cases}$$

と知られている。⇒ 太陽質量なら 10^{-4} 秒。

[Harlow, 2016]

② どのような系が スクランブリング に なるのか？

e.g.) Sachdev-Ye-Kitaev (SYK) モデル.

⇕ dual.

↖ Majorana fermion.

JT gravity (これもよく理解していない)

③ スクランブリング が 起ると 小さな局所系は熱的になる!!

(IEL は unitary t-design).

↪ 温度は全系のエネルギーで決まる.

Canonical typicality

[Nature physics 2(11): 754-758, 2006]

2 3. Hayden-Prekill の思考実験.

復元エロ - ΔU が (k, l, N) にどう依存するか？

claim

BHのユ= A) 時間発展 U が "スクラブリーング" であれば、
非常に高い確率で

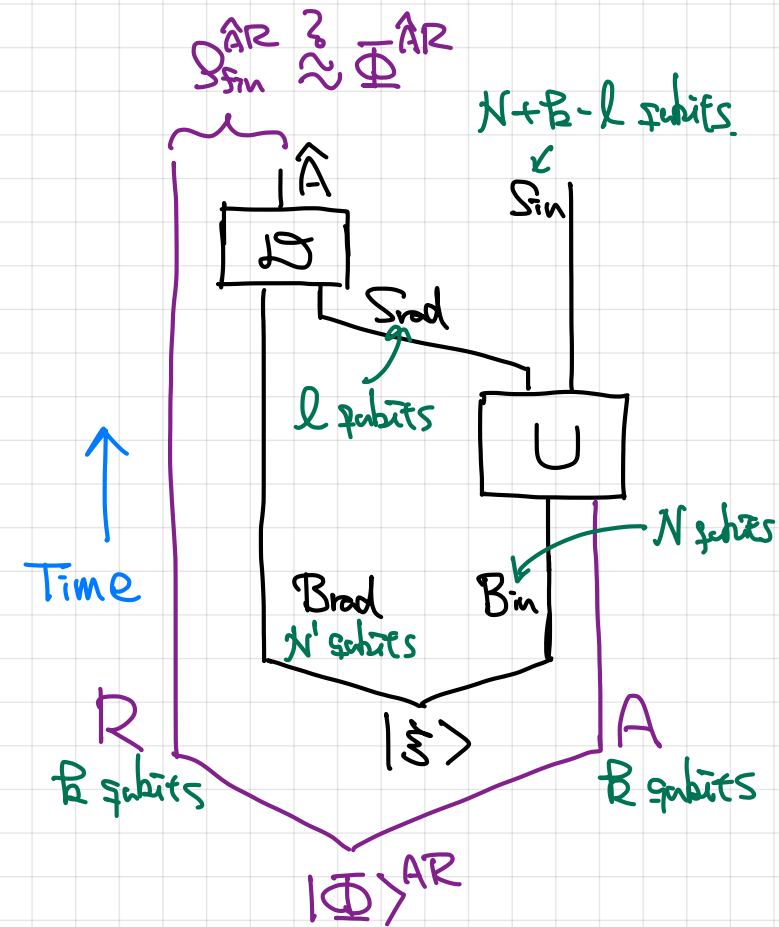
$$\Delta_U \leq 2^{\frac{1}{2} \left(B + \frac{N - H(\mathbf{z})}{2} - Q \right)} \quad (\text{informal})$$

⇒ $H(s)$ は $\mathbb{B}_n$ の $H \ni 1$ 上 Γ^0 。

$$l \gg \frac{R}{2} + \frac{N - H(\vec{z})}{2} \stackrel{\text{=: } l_{\text{th}}}{\Rightarrow} \Delta_U \approx 0.$$

二つが情報復元の十分条件.

[少し modify すれば"必要条件"にもなる]



Case 1 "Young" BH — no Hawking radiation —

B_{in} is pure state $|\xi\rangle \iff H(\xi) = 0.$

$$\therefore l_{th} = R + \frac{N}{2}$$

BH 形成初期の情報は、BHの半分以上が蒸発するまで復元できない

Case 2 "Old" BH.

十分に古いBHでは、 B_{in} と B_{rad} が最大エンタングル!!

↳ Page time $\approx$ 半分以上の蒸発した後.

$$|\xi\rangle^{B_{in}B_{rad}} = |\Phi\rangle^{B_{in}B_{rad}} \iff H(\xi^{B_{in}}) = N.$$

よって、 $l_{th} = R.$ BHの size N に依存しない.

Page time以降にBHに入った情報は、

ミクロな time scale で復元できる!!

$\Rightarrow$ その後の蒸発に。

claim

BH の $\mathcal{U} = A$ の時間発展 $\mathcal{U}$ が "スクランブリング" であるとは、
非常に高い確率で

$$\Delta_{\mathcal{U}} \leq 2^{\frac{1}{2} \left(R + \frac{N - H(\xi)}{2} - Q \right)} \quad (\text{informal})$$

==> $H(\xi)$ は $\sum \mathbb{B}_n$ のエントロピー。

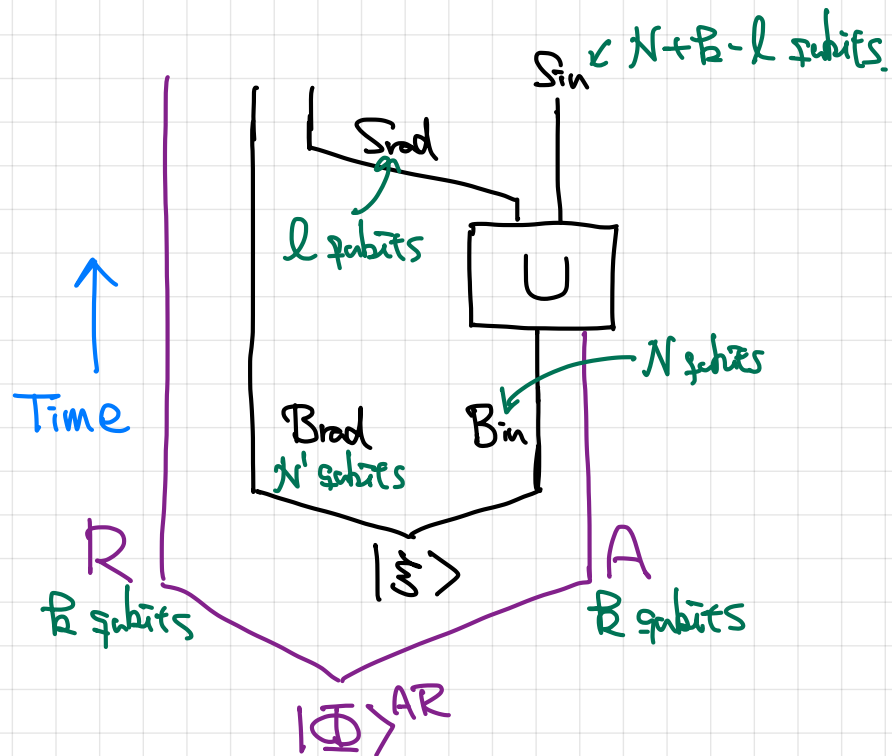
$$\Delta_{\mathcal{U}} := \frac{1}{2} \min_{\mathcal{Q}} \left\| \mathcal{S}_{\mathcal{F}_n}^{\hat{A}R}(\Phi) - \mathcal{Q}^{\hat{A}R} \right\|_1$$

~~~~~  
ヤベエ....

量子情報復元の必要 + 条件. "decoupling".

# Decoupling とは何だ？

復号化 map  $D$  をかける前までを考える。



1. 全系は常に pure state.

2. A系の量子情報

$\Leftrightarrow$  AR系の M.E.S.

つまり、

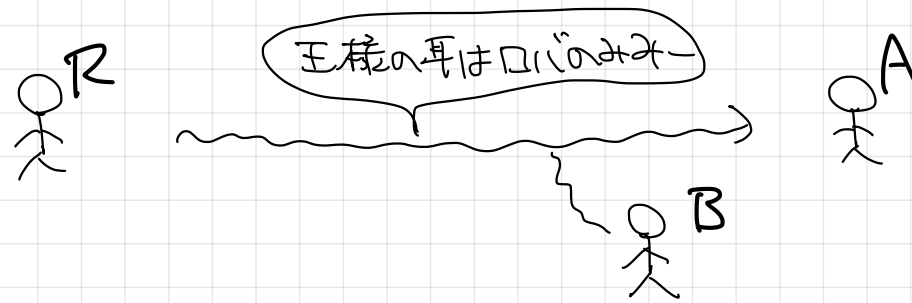
$S_{out} B_{out}$  から A系の量子情報を復元可

$\Leftrightarrow$  R系と  $S_{out} B_{out}$  (の一部) が  
M.E.S.

$1 \approx 2 \Rightarrow$  「R系と  $S_{in}$ 系が「無相関」  
(monogamy of entanglement)

※ 言い換えると、「量子情報を復元可能  $\Leftrightarrow$  何の情報も漏れていない」.

※ 古典情報の場合は そうではない ことに注意!!



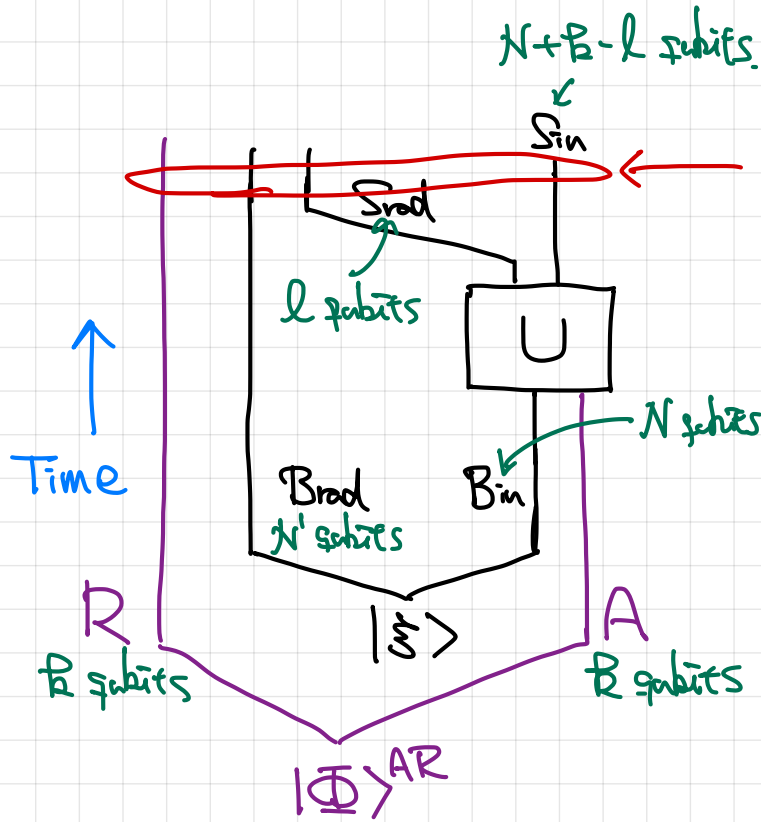
$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N |i\rangle^R \otimes |i\rangle^A \otimes |i\rangle^B \quad : \text{pure state.}$$

$$\left( \text{Tr}_B \right)$$

$$\frac{1}{N} \sum_i |i\rangle \langle i|^R$$

古典情報がB系に漏れつつも、  
R系とA系は情報を share.

# Decoupling idea.



この time slice z の  $S$  in  $R$  間の相関を考える。  
( $Brod$   $Srad$  は "自分" 等, z いる)

$$|\mathcal{S}\rangle^{Srad Brod R} = (I^R \otimes I^{Brod} \otimes U^S) |\Phi\rangle^{AR} \otimes |\xi\rangle^{Bin Brod}$$

( $S = AB_{in}$ )

$$\rho^{S in R} = \text{Tr}_{Srad Brod} [|\mathcal{S}\rangle\langle\mathcal{S}|]$$

$$= \text{Tr}_{Srad} [(I^R \otimes U^S) (\Phi^{AR} \otimes \xi^{Bin}) (I^R \otimes U^S)]$$

$$\hookrightarrow \rho^R = \text{Tr}_S [\rho^{S in R}] = \frac{I^R}{d_R} \quad (\text{あとで使う})$$

今、仮に  $\rho^{S in R}$  が 無相関 だったとすると。

$$\rho^{S in R} = \rho^{S in} \otimes \rho^R$$

← 何でもいい。

すると、直ちに  $\exists \mathcal{Q}^{Brod Srad} \rightarrow \hat{A}$  s.t.

$$\mathcal{Q}^{Brod Srad} \rightarrow \hat{A} (\rho^{Brod Srad R}) = \Phi^{\hat{A} R}$$

を示せる!!

情報が復元  
された。

$$\rho_{S \cup R} = \rho_{S \cup} \otimes \rho^R \iff \exists \mathcal{U}^{\text{Brod} S \rightarrow \hat{A}} \text{ s.t. } \mathcal{U}^{\text{Brod} S \rightarrow \hat{A}} (\rho^{\text{Brod} S \rightarrow R}) = \Phi^{\hat{A} R}$$

$\therefore$  Purification の性質を使う。

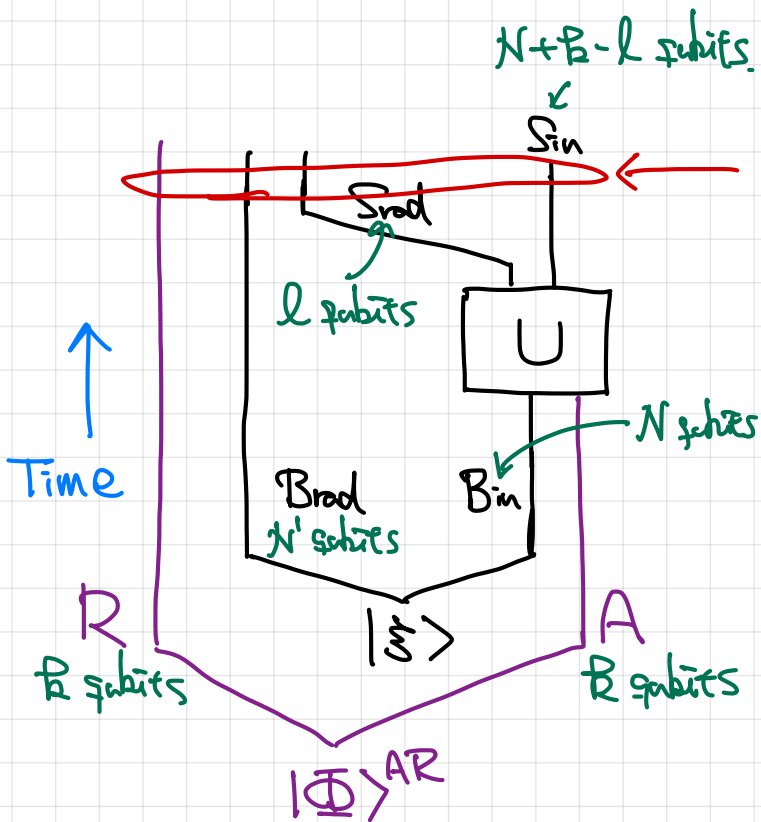
$$\begin{aligned} & |\varphi\rangle^{AB}, |\psi\rangle^{AC} \\ & \text{s.t. } \varphi^A = \psi^A \\ & \Rightarrow \exists \text{ partial isometry } V^{B \rightarrow C} \text{ s.t.} \\ & V^{B \rightarrow C} |\varphi\rangle^{AB} = |\psi\rangle^{AC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{S \cup R} &= \rho_{S \cup} \otimes \rho^R \stackrel{\text{E の性質}}{=} \frac{I^R}{d^R} \\ & \downarrow \text{purify by } S \cup R \quad \downarrow \text{purify by } \hat{S} \cup \hat{A} \\ & |\varphi\rangle_{S \cup R S \cup R} \quad |\sigma\rangle_{\hat{S} \cup \hat{S}} \otimes |\Phi\rangle^{\hat{A} R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \exists V^{S \cup R \rightarrow \hat{S} \cup \hat{A}} \text{ s.t.} \\ V^{S \cup R \rightarrow \hat{S} \cup \hat{A}} |\varphi\rangle_{S \cup R S \cup R} &= |\sigma\rangle_{\hat{S} \cup \hat{S}} \otimes |\Phi\rangle^{\hat{A} R} \\ \downarrow \text{Tr}_{\hat{S} \cup \hat{S}} \\ \mathcal{U}^{S \cup R \rightarrow \hat{A}} (\rho^{S \cup R \rightarrow R}) &= \Phi^{\hat{A} R} \quad \square \end{aligned}$$

$$\stackrel{\sqrt{2}}{\approx} \text{ i.e. } \neq \text{ }.$$

$$\tau_{\text{in}} = \tau_{\text{out}}$$



$$\min_{\sigma_{\text{in}}} \left\| \rho_{\text{in}}^R - \sigma_{\text{in}} \otimes \rho^R \right\|_1$$

これは「ハ」の「ハ」の「ハ」。

$$\rho_{\text{in}}^R = \text{Tr}_{\text{S}_{\text{out}}} \left[ U^S \left( \underbrace{\rho_{\text{in}}^{B_{\text{in}}} \otimes \Phi^{AR}}_{=: \rho_{\text{in}}^{SR}} \right) U^{S^\dagger} \right] \quad (S = AB_{\text{in}})$$

Decoupling 定理. [Dupuis et al CMP 328,251 (2014)]

$U$  : random. (scrambling)

$$\left\| \text{Tr}_{\text{S}_{\text{out}}} \left[ U^S \rho_{\text{in}}^{SR} U^{S^\dagger} \right] - \tau_{\text{in}} \otimes \rho^R \right\|_1 \leq 2^{-\frac{1}{2} (H(\text{S}_{\text{in}}(R))_{\rho_{\text{in}}} + H(S'(S_{\text{in}})_\tau)}$$

with high probability.

$$\begin{aligned} \tau_{S'S_{\text{in}}} &:= \text{Tr}_{\text{S}_{\text{out}}} [\Phi^{S'S}] \quad (S = S_{\text{in}} S_{\text{out}}) \\ &= \frac{I_{\text{S}_{\text{out}}}}{d_{\text{S}_{\text{out}}}} \otimes \Phi^{S'S_{\text{in}}} \end{aligned}$$

$\mathcal{I} = \{0, 1\}^n$  を計算する.

$$H(S_{in}|R)_{\mathcal{S}_{in}} = H(S_{in}R)_{\mathcal{S}_{in}} - H(R)_{\mathcal{S}_{in}}$$

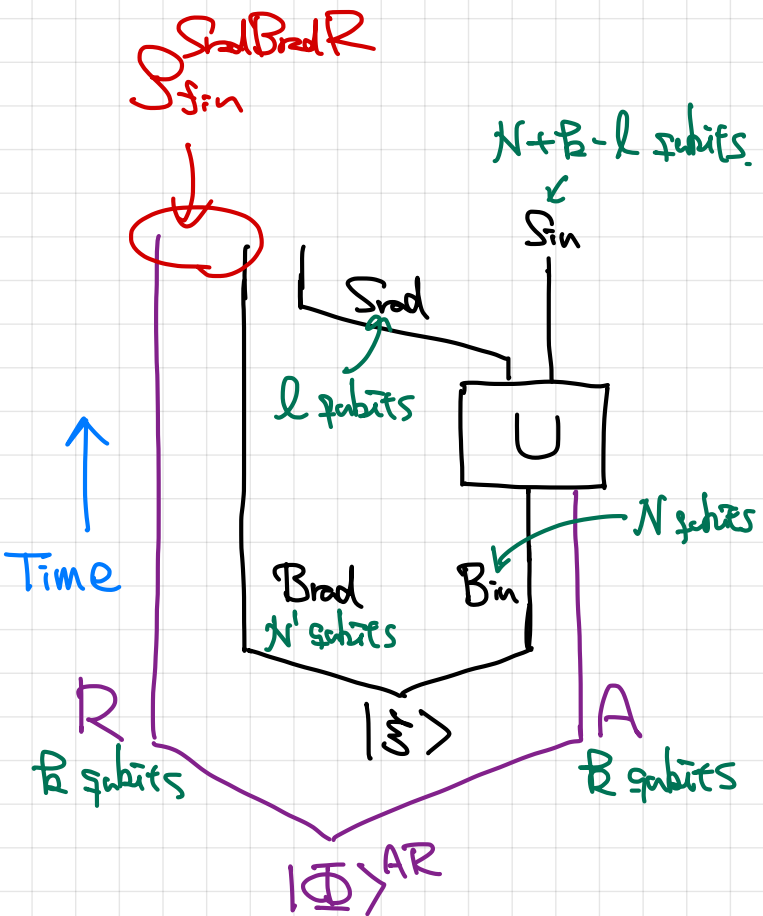
$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{in}^{SR} &= \bigoplus_{\mathcal{A}} \mathcal{A} \bigoplus_{\mathcal{B}} \mathcal{B}_{in} \\ &= \underbrace{H(\mathcal{A}R)}_{=1} + H(\mathcal{S})_{\mathcal{B}_{in}} - \underbrace{H(R)}_{=\log d_R = R} \\ &= H(\mathcal{S}^{\mathcal{B}_{in}}) - R. \end{aligned}$$

$$H(S'|S_{in})_{\mathcal{T}} = H(S'S_{in})_{\mathcal{T}} - H(S_{in})_{\mathcal{T}}$$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{H\left(\frac{\mathcal{I}^{S_{in}}}{d_{S_{in}}}\right)}_{=\log d_{S_{in}} = L} \times \underbrace{H(\bigoplus \mathcal{S}'_{in})}_{=1} - \underbrace{H\left(\frac{\mathcal{I}^{S_{in}}}{d_{S_{in}}}\right)}_{=\log d_{S_{in}} = N+R-L} \\ &= 2L - N - R. \end{aligned}$$

$$\therefore \| \text{Tr}_{S_{in}} [U^S \mathcal{S}_{in}^{SR} U^{S^\dagger}] - \mathcal{T}^{S_{in}} \otimes \mathcal{S}^R \|_1$$

$$\min_{\mathcal{Q}} \| \mathcal{O} - \mathcal{Q}^{S_{in}} \otimes \mathcal{S}^R \|_1 \leq 2R + \frac{N - H(\mathcal{S})}{2} - L.$$



Purification of  $\# \Pi \Rightarrow \phi \in \exists \mathcal{Q}$  s.t.

$$\frac{1}{2} \left\| \mathcal{Q}_{SradBrad \rightarrow A} \left( \rho_{S_{Sin}}^{SradBradR} \right) - \bigoplus_{AR} \right\|_1$$

$$\leq 2^{\frac{1}{2} \left( R + \frac{N-H(\xi)}{2} - l \right)}$$

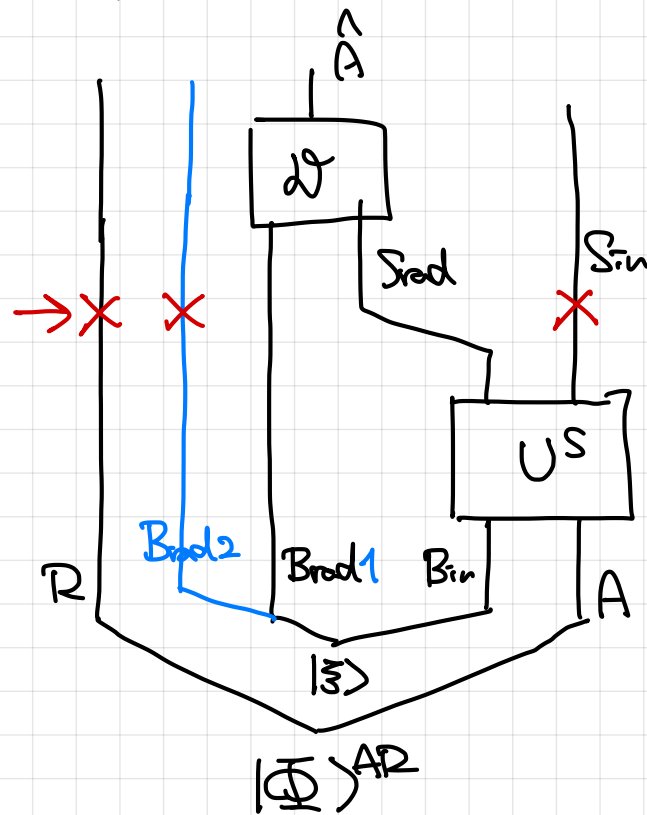
$$\therefore \Delta_U \leq 2^{\frac{1}{2} \left( R + \frac{N-H(\xi)}{2} - l \right)}$$

with high probability.  $\square$

補足: 「Early radiation の一部しか得ない場合」や

「混合状態を復元した場合」にも decoupling の考え方はとても有効!!

「Early radiation の一部しか得ない場合」

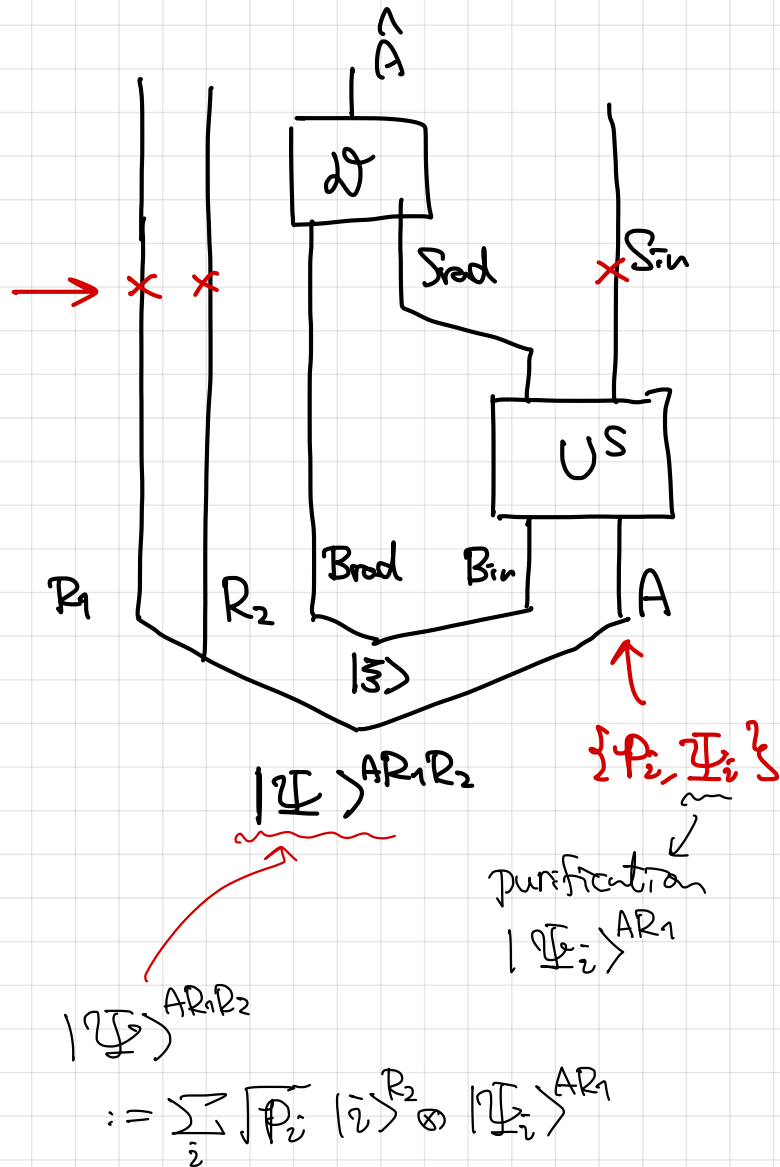


→ において, state が  $\approx \mathbb{Q}^R \otimes \mathbb{Q}^{Brod2 S_{in}}$

⇒ 情報復元可能  
(← も大体成り立→はず)

※ Decoupling 定理 は 拡張する必要がある.

「混合状態を復元した場合」



→ の時点の  $R_1R_2S_n$  の状態が  $\approx \Psi^{R_1R_2} \otimes \rho^{S_n}$

$\Rightarrow \{\rho_i, \Psi_i\}$  も復元可能

( $R_2$ 系を  $\{|i\rangle\}$  で測り、 $R_1$ 系を trace out)

※ Decoupling 定理 を使える

※  $\Leftarrow$   $\phi$  成立するとは自信がない.

多分 成立しない気もする.