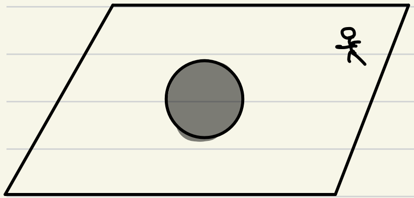
ブラックホールの 性質と

ブラックホール熱力学

ブラックホール



・高密度の天体が、重力崩壊してできた時空

・アインシュタイン方程式の解

(4次元) シュバルツシルトブラックホール

$$\boxed{ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)}$$

M: BHの質量

$R^2 = 0$

特徴的な面:

- $r = 0$: 時空の曲率が発散: $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = \infty$
  特異点 ⇒ 古典論が破綻 (今はあきらめよう。。)
- $r = 2M$: 事象の地平面 (座標系のとり方が悪い)

Kruskal 座標

BH 時空の因果構造を見やすくするために，新たな座標系を導入する

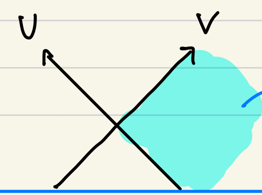
Step 1

$$ds^2\Big|_{(r,t)} = -f(r)\,dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} = f(r)\left[-dt^2 + \Big(\underbrace{\frac{dr}{f(r)}}_{=dr_*}\Big)^2\right] = f(r)\left[-dt^2 + dr_*^2\right]$$

$$r_* = r + 2M \log\left|\frac{r-2M}{2M}\right| \ : \ 2M < r < \infty \iff -\infty < r_* < \infty$$

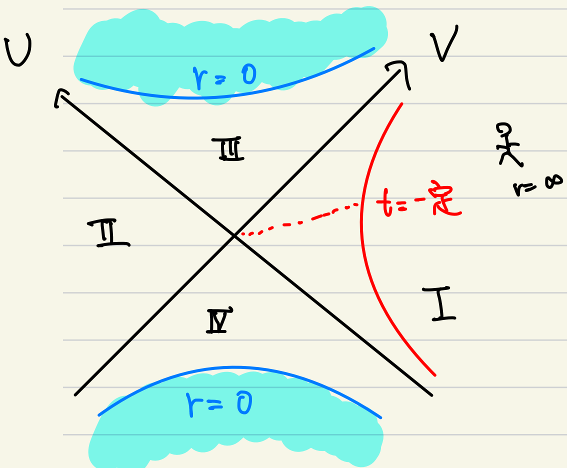
Step 2

$$\begin{cases} U = -e^{-\frac{1}{4M}(t-r_*)} \\ V = e^{\frac{1}{4M}(t+r_*)} \end{cases} \qquad -\infty < (t, r_*) < \infty \Rightarrow \begin{cases} -\infty < U < 0 \\ 0 < V < \infty \end{cases}$$



(r_*, t) 座標は
ブラックホールの一部しか
おおわない

BHの因果構造



Kruskal座標で見たBH metric

$$ds^2 = -\left(\frac{32M^3}{r} e^{-r/2M}\right) dUdV + r^2 d\Omega^2.$$

$r(U,V)$ は $$UV = -\left(\frac{r-2M}{2M}\right) e^{r/2M}$$

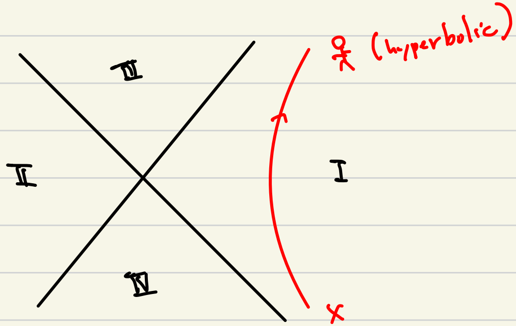
- BHの外側 $r > 2M \iff UV < 0$: region Ⅰ, Ⅱ
- BHの内側 $r < 2M \iff UV > 0$

我々の住んでいる宇宙（領域Ⅰ）が別の宇宙（領域Ⅱ）とつながっている
（Einstein Rosen 橋）

光の軌跡 : $U = $一定 or $V = $一定. ⇒ $r < 2M$ から外側へ光は行けない

⇒ ブラックホールがブラックである理由

Minkowski 空間の Rindler 座標



- $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$.

- 加速度 κ で運動する物体の軌跡

$$\begin{cases} x(T) = X\cosh(\kappa T) \\ t(T) = X\sinh(\kappa T) \end{cases}$$

X: 軌跡を特徴づける定数.

- Minkowski 空間は自然に4つの領域に分かれる $\begin{cases} \text{region I, II} \sim \text{BH exterior} \\ \text{region III, IV} \sim \text{interior} \end{cases}$

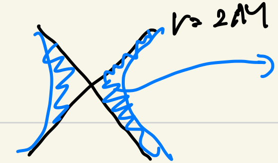
- 等加速運動のため, II からの光がとどかない ～ 観測者にとってのホライズン

- (X, T) 座標で見た計量: $\boxed{ds^2\big|_{(x,t)} = -\kappa^2 X^2 dT^2 + dX^2}$

Rindler 座標

～ BH の $r = 2M$ 付近での計量.

BH と Rindler 座標



Rindler 系 metric で記述できる.

BH の $r=2M$ 付近の計量： $r_h = 2M$

$$ds^2\Big|_{(r,t)} = -f(r)\,dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)}, \quad f(r) = 1 - \frac{2M}{r} \sim f'(r_h)(r - r_h)$$

$$\equiv \left(\frac{f'(r_h)}{2}\right)^2 \rho^2$$

$$\Rightarrow ds^2 = -\left(\frac{f'(r_h)}{2}\right)^2 \rho^2\,dt^2 + d\rho^2.$$

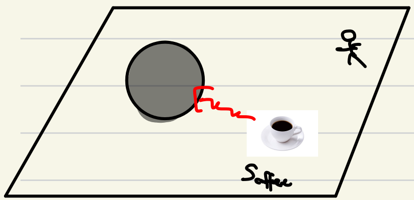
$\Rightarrow \kappa = \dfrac{f'(r_h)}{2} = \dfrac{1}{4M}$ とおくことにより Rindler 計量とみなせる

対応関係：

BH	Minkowski
シュバルツシルト (r,t)	リンドラー座標 (X,T)
クルスカル (U,V)	カーテシアン座標 (x,t)
$r=$一定の観測者	等加速運動する観測者

ブラックホールの熱力学

wheeler



熱力学的
・BH にエントロピーを持つ物体を投げいれる

⇒ $\Delta S = -S_{Coffee} < 0$ ？ （第二法則が破れる？）

BHエントロピー：BHは 事象の地平面の 面積 に比例するエントロピーを持つ。

$$S_{BH} = \frac{A}{4G_N}$$

$S_{BH} \propto A$ と Bekenstein が予想。

係数は（以下に述べる方法で）Hawking が決めた。

⇒ Bekenstein Hawking エントロピーと呼ばれる。

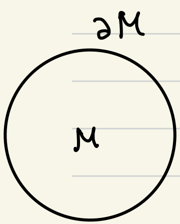
$S_{BH} = \dfrac{A}{4G_N}$ が示唆すること.

(1) $\boxed{S_{BH} \text{ が熱力学エントロピーである:}}$

⇒ 1つのBHが, 実は $e^{S_{BH}}$ 個の微視的状態からなる。(cf. 統計力学)

(弦理論において, そのような状態を作って, その数をかぞえることができる)

(2) $\boxed{S_{BH} \text{ が体積ではなく, 面積に比例する.}}$ (cf. 気体のエントロピー $S_{gas} \propto V$)



⇒ BH (重力) のは, 事象の地平面上に局在する自由度で記述できる

: ホログラフィー原理. (例: AdS/CFT対応)

Bekenstein 限界

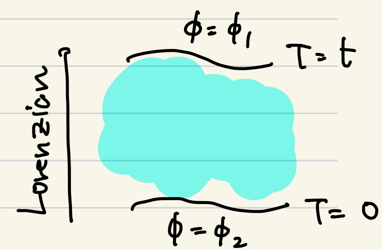
BH エントロピーの導出 (sketch)

分配関数: $Z(\beta) = \sum_n e^{-\beta E_n} \Rightarrow S = \left(\beta\frac{\partial}{\partial\beta} - 1\right)\log Z$

$\boxed{\text{アイデア: } Z[\beta] \text{ の経路積分で計算する。}}$

遷移振幅

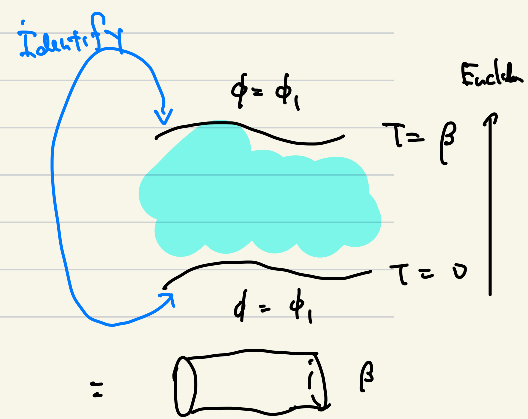
・$\langle\phi_1|\underbrace{e^{-iHt}}_{\text{Lorenzian}}|\phi_2\rangle = \int D\phi \Big|_{\phi(0)=\phi_2}^{\phi(t)=\phi_1} e^{iS[\phi]}$

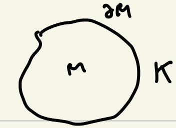


分配関数

・$Z(\beta) = tr\left[e^{-\beta H}\right] = \int D\phi_1 \langle\phi_1|\underbrace{e^{-\beta H}}_{\text{Euclidean}}|\phi_1\rangle$

$$= \int D\phi \Big|_{\phi(0)=\phi_1}^{\phi(\beta)=\phi_1} e^{-S[\phi]}$$





WKB(半古典)近似

$$Z(\beta) = \int Dg_{\mu\nu}\, e^{-\frac{1}{\hbar} I_{EH}[g_{\mu\nu}]}, \qquad \boxed{I_{EH}[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G}\int_M \sqrt{-g}\, R\, dx^4 + \frac{1}{8\pi G}\int_{\partial M}\sqrt{h}\, K}$$

・半古典極限 $\underline{\underline{G}} \ll 1$: $\left.\frac{\delta I_{EH}}{\delta g_{\mu\nu}}\right|_{g=g_c} = 0$ をみたす $g = g_c$ の寄与が支配的

$\frac{1}{\hbar G_N}$

$\Updownarrow$ アインシュタイン方程式

$\Downarrow$ ブラックホール解

$$\boxed{Z(\beta) \sim e^{-I_{EH}[g_c]}}$$

$$I_{EH}[g_c] = \underbrace{\frac{1}{16\pi G}\int_M \sqrt{g}\, R\, dx^4}_{=0\ (R_{\mu\nu}=0)} + \frac{1}{8\pi G}\int_{\partial M}\sqrt{h}\, K$$

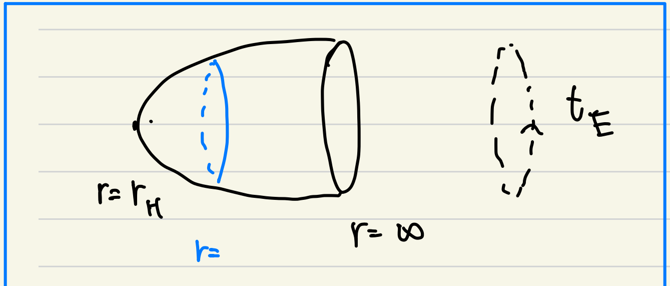
: 境界項のみが寄与する。

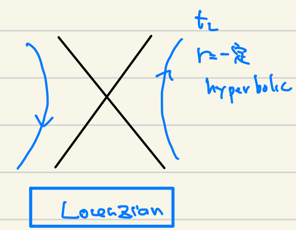
ユークリッド化されたBH

$t \to it_E$; $t_E \sim t_E + \beta$

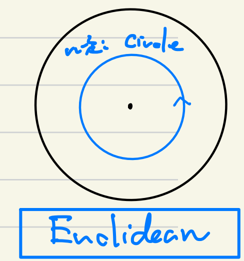
$$ds^2 = f(r)\,dt_E^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2 \xrightarrow[r\to r_H]{} \left(\frac{f'}{2}\right)^2 \rho^2 dt_E^2 + d\rho^2 + r_H^2 d\Omega^2$$

極座標 $\sim dr^2 + r^2 d\theta^2$





$\Rightarrow$



$r = r_H$ で Thermal cycle が一点に縮む.

$\rho = 0$ において Smooth $\Rightarrow$ $\frac{f'}{2} \times \beta = 2\pi$

∴ BHの温度が M から決まる。

$$T = \frac{1}{8\pi M}$$

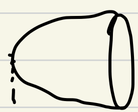
BH の Semi classical action

$$I_{EH}[g_0] = \frac{1}{8\pi G}\int \sqrt{h}(K-K_0)dx^3 \Big|_{g=g_c} \Rightarrow S_{BH} = \frac{A}{4G}$$

flat 空間における extrinsic curvature.

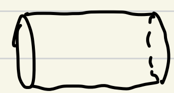
Remarks

・ $r=2M$ において、t_E 方向が一点に縮むからエントロピーが non zero



$r=2M$

と C

β 

$\Rightarrow I_{EH} = \beta \times$ (β によらない定数)

$\Rightarrow$ エントロピー $= 0$

$$e^{-S[g_c]} \sim \int_0^\beta dt_E \int dx^3 \sqrt{g}\,R + \int_0^\beta K$$

$$\sim \beta \left(\qquad \right)$$

ブラックホールのホーキング放射
と、量子相関

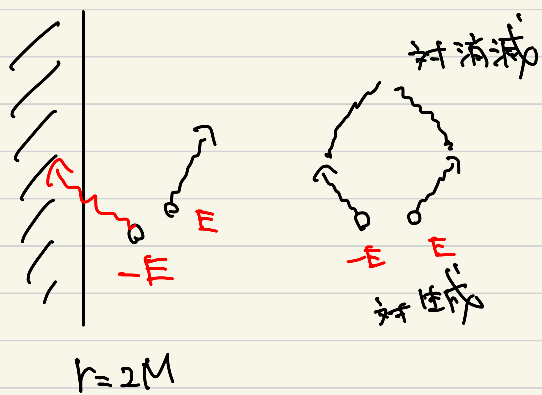
BH の Hawking 放射

- BHについて，(少なくとも形式的に) 温度とエントロピーが定義できた。

- 温度を持つ物体は 黒体放射 を出していなければならない.

⟺ "BH が何でも吸収する" という性質に矛盾?

⇒ $\boxed{\text{量子論的には，BHは放射を出している (Hawking 放射)}}$



- 対生成による直観的な理解

⇒ 対生成によって生じた負エネルギー粒子が事象の地平面に入ることにより安定化する

自由場の量子化

- $I = \int dx^2 \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi \Rightarrow \Box \hat{\Phi} = 0$

(1) モード展開

$$\frac{\partial f_{-\omega}}{\partial t} = -i\omega f_{-\omega} \Rightarrow \begin{cases} \text{Positive f modes } \{f_{-\omega}\}_{\omega>0} \\ \text{Negative } \{f_\omega \equiv f_{-\omega}^*\}_{\omega>0} \end{cases}$$

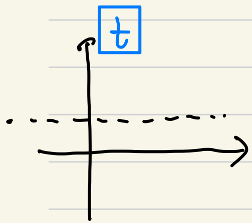
$$\hat{\Phi} = \sum_{\omega>0} \underbrace{\hat{a}_\omega}_{\text{消滅 op}} f_{-\omega} + \underbrace{\hat{a}_\omega^\dagger}_{\text{生成 op}} f_\omega \Rightarrow [a_{\omega_1}, a_{\omega_2}^\dagger] = \delta_{\omega_1,\omega_2}$$

(2) 真空

$$\hat{a}_\omega |0\rangle = 0 \qquad \forall \omega > 0$$

$$\mathcal{H} = \mathrm{Span}\left\{ |0\rangle,\ a_\omega^\dagger|0\rangle,\ \cdots \prod_k (a_{\omega_k}^\dagger)|0\rangle \cdots \cdots \right\}$$

Minkowski 時間



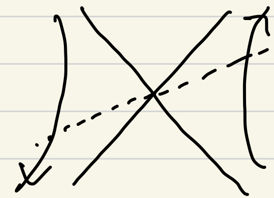
$$ds^2 = -dt^2 + dx^2$$

$$\Rightarrow \left\{ \varphi^M_{\omega} = e^{-i\omega(t \pm x)} \right\}_{\omega > 0}$$

$$\Rightarrow \left\{ a^M_\omega \right\}, \quad |0\rangle_{\text{Minkowski}}$$

$\Rightarrow$

Rindler 時間



$$ds^2 = -\kappa^2 X^2 dT^2 + dX^2.$$

$$\Rightarrow \left\{ \phi^R_\omega \right\}_{\omega > 0}$$

$$\Rightarrow \left\{ b^R_\omega \right\}, \quad |0\rangle_{\text{Rindler}}$$

2つの異なる量子化

〜 2つの異なる時間

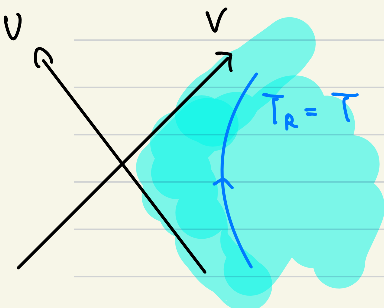
Rindler 時空における量子化 $(m=0)$

$$ds^2 = -\kappa^2 x^2 dT^2 + dx^2 = \kappa^2 x^2 \left(-dT^2 + dx_*^2\right) \qquad x_* \equiv \log|x|$$

$$\Rightarrow \boxed{\Box\phi = \left(-\frac{\partial^2}{\partial T^2} + \frac{\partial}{\partial x_*^2}\right)\phi = 0}$$

cf
$$\begin{cases} U = -e^{-\kappa u} = -e^{-\kappa(T - x_*)} \\ V = e^{\kappa v} = e^{\kappa(T + x_*)} \end{cases}$$
in region I

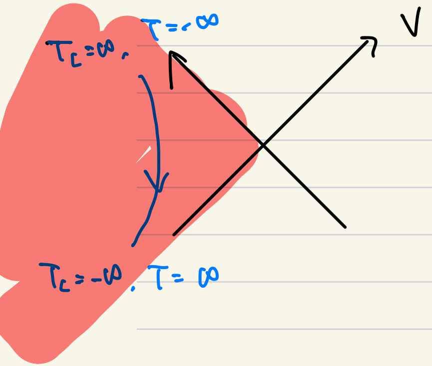
- Right Wedge (Region I)



$$\boxed{\phi^{R}_{I,-\omega} = \begin{cases} e^{-i\omega(T \mp x_*)} = (-U)^{\frac{i\omega}{\kappa}} \text{ or } V^{-\frac{i\omega}{\kappa}} & \text{region I} \\ 0 & \text{region II.} \end{cases}}$$

Left Wedge (region II)

時間の向きが逆



$$\boxed{T_L = -T}$$

Positive energy mode $\propto e^{-i\omega T_L} = e^{i\omega T}$

$$\boxed{\phi^{R}_{II,-\omega} = \begin{cases} 0 & \text{in region I} \\ e^{i\omega(T \pm X_*)} = U^{-\frac{i\omega}{\kappa}},\ (-V)^{\frac{i\omega}{\kappa}} & \text{in region II} \end{cases}}$$

cf

$$\begin{cases} U = e^{-\kappa u} = e^{-\kappa(T+X_*)} \\ V = -e^{\kappa u} = -e^{\kappa(T+X_*)} \end{cases}$$

2つのモード展開

$$\Phi = \sum_{\omega>0} a_\omega \varphi^M_{-\omega} + a^\dagger_\omega \varphi^M_\omega$$

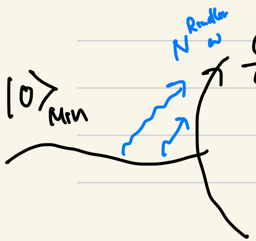
⇐ Minkowski mode による展開

$$= \sum_{\omega>0} \left(b_{I,\omega} \phi^R_{I,-\omega} + b_{II,\omega} \phi^R_{II,-\omega} \right)$$

$$+ \left(b^\dagger_{I,\omega} \phi^R_{I,-\omega} + b^\dagger_{II,\omega} \phi^R_{II,-\omega} \right)$$

⇐ Rindler mode による展開

計算したいもの



矢：等加速運動観測者

$${}_{Min}\langle 0 | N^{Rindler}_{I,\omega} | 0 \rangle_{Min} = \langle 0 | b^\dagger_{I\omega} b_{I\omega} | 0 \rangle_{Min}$$

$$a_\omega |0\rangle_{Min} = 0$$

2つモード $\{\varphi_\omega\}_\omega$, $\{\phi_\omega\}_\omega$ の関係:

$$\boxed{\varphi_{-\omega} = \sum_{\omega'>0} A_{\omega\omega'} \underset{\text{positive}}{\phi_{-\omega'}} + B_{\omega\omega'} \underset{\text{Negative}}{\phi_{\omega'}}}$$

$$\hat{\Phi} = \sum_{\omega>0} a_\omega \varphi_{-\omega} + a_\omega^\dagger \varphi_\omega$$

$$= \sum_{\omega>0} a_\omega \left(\sum_{\omega'>0} A_{\omega\omega'} \phi_{-\omega'} + B_{\omega\omega'} \phi_{\omega'} \right) + a_\omega^\dagger \left(\sum_{\omega'>0} A^*_{\omega\omega'} \phi_{\omega'} + B^*_{\omega\omega'} \phi_{-\omega'} \right)$$

$$= \sum_{\omega'>0} \Big(\underbrace{\sum_{\omega'>0} a_\omega A_{\omega\omega'} + a_\omega^\dagger B^*_{\omega\omega'}}_{b_{\omega'}} \Big) \phi_{-\omega'}$$

$$+ \Big(\underbrace{\sum_{\omega'>0} a_\omega^\dagger A^*_{\omega\omega'} + a_\omega B_{\omega\omega'}}_{b^\dagger_{\omega'}} \Big) \phi_{\omega'}$$

$$= \sum_{\omega'} b_{\omega'} \phi_{-\omega'} + b^\dagger_{\omega'} \phi_{\omega'}$$

- ${}_a\langle 0| \, b_\omega^\dagger b_\omega \, |0\rangle_a$ $\qquad\qquad (a_\omega |0\rangle = 0)$

$$= {}_a\langle 0| \left(\sum_{\omega'>0} a_\omega^\dagger A_{\omega\omega'} + a_\omega B^*_{\omega\omega'} \right) \left(\sum_{\omega'>0} a_\omega A_{\omega\omega'} + a_\omega^\dagger B_{\omega\omega'} \right) |0\rangle_a$$

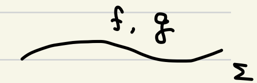
$$= \sum_{\omega'} B^*_{\omega\omega'} \, B_{\omega\omega'}$$

Positive mode & Negative mode 의 mixing

-

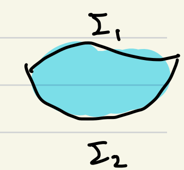
モード間の内積 (Klein Gordon inner product)

$$(f, g) = \int_\Sigma d\Sigma^\mu \left(f^* \partial_\mu g - g^* \partial_\mu f \right)$$



・Σ のとり方によらない

$$\int_{\Sigma_1} - \int_{\Sigma_2} \overset{\text{Stokes}}{=} \int \Box \phi = 0$$



・$\{\phi_i\}$: モードの直交関係式 : $\{ \underbrace{\phi_i}_{\text{Positive}} , \underbrace{\phi_i^*}_{\text{Negative}} \}_{i>0}$

$$(\underset{P}{\phi_i}, \underset{P}{\phi_j}) = \delta_{ij} \qquad (\underset{N}{\phi_i^*}, \underset{P}{\phi_1}) = 0$$

$$(\underset{P}{\phi_i} \ \underset{N}{\phi_j^*}) = 0 \qquad (\underset{N}{\phi_i^*} \ \underset{N}{\phi_j^*}) = -\delta_{ij} \quad \leftarrow \text{Negative norm}$$

・この内積は Fock 空間 $\mathcal{H}$ 上の内積とは異なる。

2つのモード $\{\varphi_\omega\}_\omega$, $\{\phi_\omega\}_\omega$

$$\varphi_{-\omega} = \sum_{\omega'>0} A_{\omega\omega'} \underbrace{\phi_{-\omega'}}_{\text{positive}} + B_{\omega\omega'} \underbrace{\phi_{\omega'}}_{\text{Negative}}$$

が同じ直交関係式を満たすためには、

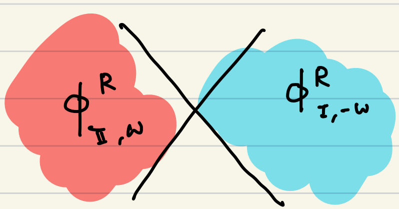
$$\boxed{AA^\dagger - BB^\dagger = 1 \qquad AB^T - BA^T = 1.}$$

・Creation Op との関係：

$$\boxed{\cdot\ \hat{a}_\omega = (\underbrace{\varphi^M_{-\omega}}_{\text{positive}}, \hat{\Phi}), \qquad a^\dagger_\omega = -(\underbrace{\varphi^M_{+\omega}}_{\text{negative}}, \hat{\Phi}),}$$

・Unruh 放射

$$\underbrace{\phi^R_{\mathrm{I},-\omega}(U)}_{\text{positive R mode in I}} + \underbrace{\phi^R_{\mathrm{II},\omega}(U)}_{\text{Negative in II}} = \underbrace{\int_0^\infty C_{\omega\omega'}\, \varphi^M_{-\omega'}(U)\, d\omega'}_{\text{Minkowski の } \boxed{\text{positive mode}} \text{ だけの積分}}$$



∵ $\phi^R_{\mathrm{I},-\omega}(U)$ $\phi^R_{\mathrm{II},\omega}(U)$ 共に $U^{-\frac{i\omega}{\kappa}}$ に比例する.

⇒ Complex U plane上 の下半平面で bounded.

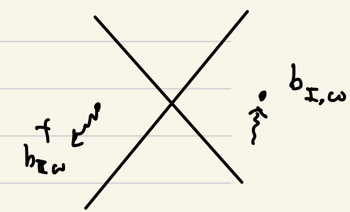
⇒ $e^{-i\omega U}$ $\omega > 0$ の積分で書ける.

$$\left(\int_0^\infty C_{\omega\omega'}\, \varphi^M_{-\omega}(v)\, d\omega' ,\ \hat{\Phi}\right)|0\rangle_{Min} = \int_0^\infty C_{\omega\omega'} \underbrace{\left(\varphi^M_{-\omega},\ \hat{\Phi}'\right)}_{a_\omega} |0\rangle_{Min} = 0$$

$$\left(\Phi^R_{I,-\omega} + \Phi^R_{II,\omega},\ \hat{\Phi}\right) = \left(\Phi^R_{I,-\omega}\ \hat{\Phi}\right) + \left(\Phi^R_{II,\omega}\ \hat{\Phi}\right)$$

$$= b_{I,\omega} - e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}}\, b^\dagger_{II,\omega}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\left(b_{I,\omega} - e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}}\, b^\dagger_{II,\omega}\right)|0\rangle_{Min} = 0}$$



同様に $\left(b_{II,\omega} - e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}}\, b^\dagger_{I,\omega}\right)|0\rangle_{Min} = 0$

$$\left(b_{I,\omega} - e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}}\, b^\dagger_{II,\omega}\right)|0\rangle_{Min} = 0 \quad , \quad \left(b_{II,\omega} - e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}}\, b^\dagger_{I\omega}\right)|0\rangle_{Min} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{|0\rangle_{Min} \propto \prod_{\omega>0} \exp\left[e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}}\, b^\dagger_{I\omega}\, b^\dagger_{II,\omega}\right]|0\rangle_{Rindler}}$$

$b_{I\omega}|0\rangle_R = b_{II\omega}|0\rangle_R$

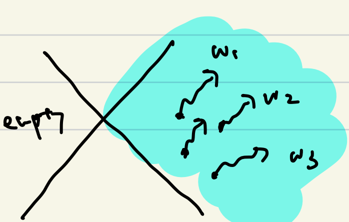
$= 0$

$$= \sum_{E_n} e^{-\frac{\pi}{2\kappa}E_n}\,|E_n\rangle_I \otimes |E_n\rangle_{II}$$

$\cdot$ $|E_n\rangle_I = \prod \left(b^\dagger_{I\omega_1}\right)^{n_1} \cdots \left(b^\dagger_{I,\omega_k}\right)^{n_k} \cdots |0\rangle_{Rindler} \quad \left(\sum \omega_k n^k = E_n\right)$

$\cdot$

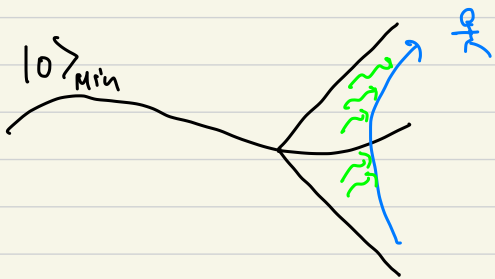
= empty



$$\boxed{{}_{Min}\langle 0|\, b^\dagger_{I\omega}\, b_{I\omega}\, |0\rangle_{Min} = \frac{1}{e^{\frac{\pi\omega}{\kappa}} - 1}}$$

⇒ 温度 $T = \frac{\kappa}{\pi}$ の ボルツマン分布

・



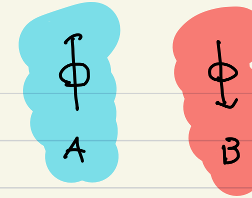
: Minkowski空間を等加速運動する観測者は、熱的な放射を見る。

・ $$|0\rangle_{Min} \propto \sum_{E_n} e^{-\frac{\pi}{2\kappa}E_n}\, \underbrace{|E_n\rangle_{I}}\otimes \underbrace{|E_n\rangle_{II}}$$

region I の状態が決まると region II の状態が決まる

⇒ $\boxed{\text{量子相関}}$

量子相関とは



- $$\boxed{|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_A|\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A|\uparrow\rangle_B\right)}$$

$$\therefore \begin{cases} \text{B の状態が } |\downarrow\rangle_B \Rightarrow \text{A の状態は } |\uparrow\rangle_A \\ \text{B の状態が } |\uparrow\rangle_B \Rightarrow \text{A の状態は } |\downarrow\rangle_A \end{cases}$$

- $|\Psi_{AB}\rangle$ において、Aの状態とBの状態は相関している

- Bellの不等式を破る ⇒ 量子相関(エンタングルメント)

- Aのみを見る観測者は、Bについて平均をとった状態を

$$\rho_A = \sum_{i=\{\downarrow,\uparrow\}} {}_B\langle i|\Psi\rangle\langle\Psi|i\rangle_B = \mathrm{tr}_B\, |\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi|$$

(混合状態)

量子相関とは (2)

一般に， $\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_i \sqrt{\lambda_i}\, |i\rangle_A \otimes |i\rangle_B \quad (\text{Schmit 分解})$$

$$\Rightarrow \quad \rho_A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\, |i\rangle_A\langle i| \qquad (i = 1, \cdots \underset{r}{\underset{\shortparallel}{\min}}\{\dim \mathcal{H}_A, \dim \mathcal{H}_B\})$$

(縮約された密度行列)

・ $|\Psi\rangle_{AB}$ におけるAとBの相関の定量化 ⇒ エンタングルメント エントロピー

$$\boxed{S(\rho_A) = -\mathrm{tr}\, \rho_A \log \rho_A}$$

(cf. 密度行列 ρ に対する von Neumann エントロピー $S(\rho) = -\mathrm{tr}(\rho \log \rho)$)

$$\rho_A = \frac{1}{2}\left(|\downarrow\rangle_A \langle\downarrow| + |\uparrow\rangle_A \langle\uparrow| \right) \Rightarrow -\mathrm{tr}\rho_A \log \rho_A$$
$$= \log 2$$

エンタングルメントエントロピー

・例：

$$|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B \right) \Rightarrow S(\rho_A) = \log 2$$

$$|\Psi\rangle_{AB} = |\uparrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B \Rightarrow S(\rho_A) = 0$$

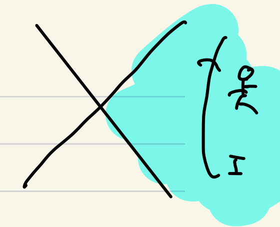
・ $\boxed{S(\rho_A) \leq \min\{\log \dim H_A, \log \dim H_B\}}$

$$\left(\because |\Psi\rangle = \sum_{r=1}^{r} \sqrt{\lambda_i} |i\rangle_A |i\rangle_B \Rightarrow S(\rho_A) = \sum_i \lambda_i \log \lambda_i, \quad \Sigma \lambda_i = 1 \right)$$

・ $\boxed{\text{純粋状態に対して } S(\rho_A) = S(\rho_B)}$

$$\left(\forall_{\text{pure state}}, \ \rho_A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i |i\rangle_A \langle i|, \quad \rho_B = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i |i\rangle_B \langle i| \right)$$

場の理論における相関



・ $$|0\rangle_{Min} = \frac{1}{\sqrt{Z}} \sum_{E_n} e^{-\frac{\beta}{2}E_n} |E_n\rangle_I \otimes |E_n\rangle_{II}$$

等加速運動する観測者は、領域Iしか見ない

⇒ $$\rho_I = \frac{1}{Z} \sum_{E_n} e^{-\beta E_n} |E_n\rangle_I \langle E_n|$$ ： 温度 β のカノニカル分布

$$\beta = \frac{2\pi}{\kappa}$$

・エンタングルメント エントロピー ； $$S(\rho_I) = -\sum_{n=1}^{\infty} p_n \log p_n \qquad p_n = e^{-\beta E_n}/Z$$

= 温度 $1/\beta$ の 熱力学エントロピー

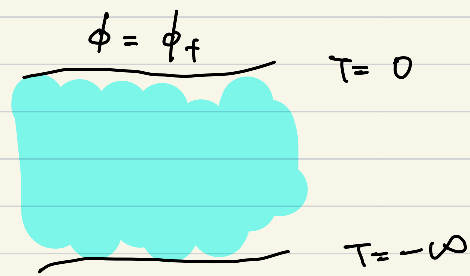
経路積分による導出

正準量子化による導出 ⇒ 自由場に限定される。

真空の経路積分表示

S[φ]: 場の理論の作用

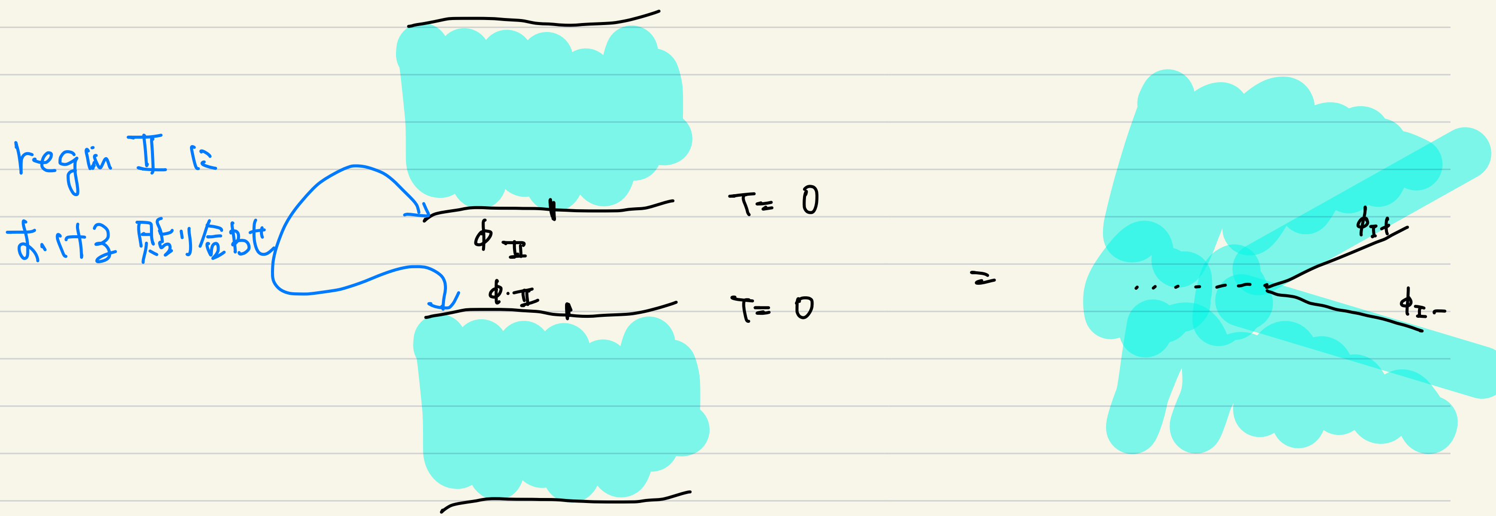
$$\langle \phi_f | 0 \rangle_{Min} =$$



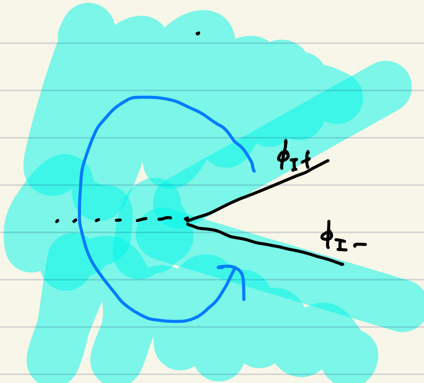
$$= \int D\phi \Big|_{\phi(\tau=0)=\phi_1} e^{-S[\phi]}$$

縮約された密度行列

$$\rho_{I} = \mathrm{tr}_{II} |0\rangle_{Mn} \langle 0| = \int D\phi_{II} \langle \phi_{II} | 0 \rangle_{Mn} \langle 0 | \phi_{II} \rangle$$



: $T=0$ region I に境界条件の入った経路積分



$$= \langle \phi_{I-} | \, e^{-\beta H_{Rindler}} | \phi_{I+} \rangle$$

ユークリッド化された
リンドラー時間

リンドラーハミルトニアンについての
カノニカル分布

EEの計算 (レプリカ法)

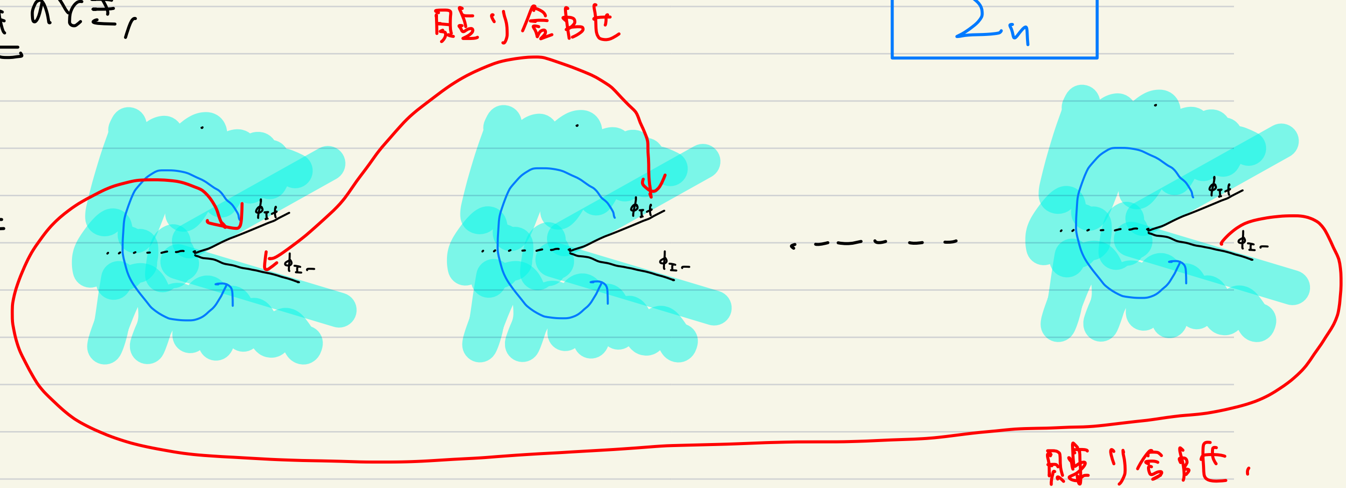
$$S(\rho_I) = -\frac{\partial}{\partial n} \log \mathrm{tr}(\rho_I)^n \Big|_{n=1}$$

$$= \mathrm{tr}\,\rho_I \log \rho_I$$

・ $\underline{\underline{n \in \mathbb{Z}_+}}$ のとき,

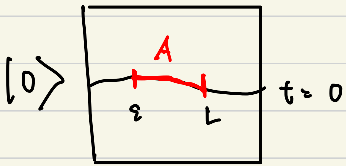
$\boxed{\Sigma_n}$

$\mathrm{tr}(\rho_I^n) =$



$= \Sigma_n$ 上の経路積分 $= \mathrm{tr}\left[e^{-n\beta H_R}\right]$

2次元 共形場理論の場合

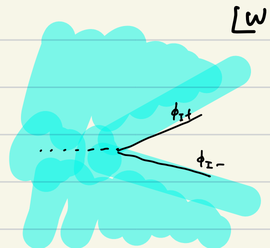


・$t=0$ を、$\boxed{\text{領域 } A:\ \varepsilon < x < L}$ と補集合 $\bar{A}$ に分ける。

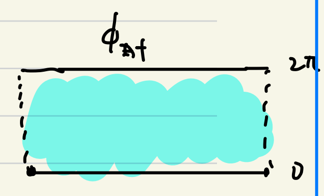
・真空 $|0\rangle$ の A における EE を計算してみよう。

ρ_A :

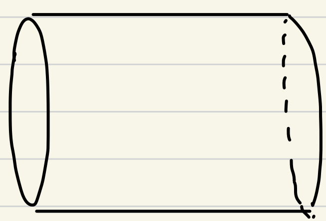
$\Rightarrow \quad w = \dfrac{z-\varepsilon}{L-z}$



$\Rightarrow \quad u = \log w$



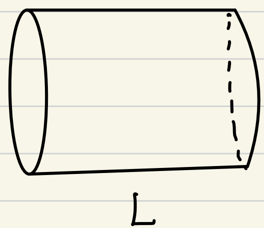
$$\mathrm{tr}(\rho_A)^n = 2\pi n \left\{ \right.$$



$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\log L/\varepsilon}$$

$$= \frac{Z_{CFT}\left[\beta = \dfrac{2\pi n}{\log L/\varepsilon}\right]}{\left(Z_{CFT}\left[\beta = \dfrac{2\pi}{\log L/\varepsilon}\right]\right)^n} = \frac{1}{\left(L/\varepsilon\right)^{\frac{c}{6}\left(n - \frac{1}{n}\right)}}$$

ただし $Z_{CFT}[\beta]$ は $T = 1/\beta$ における分配関数で、 $\beta/L \to 0$ では



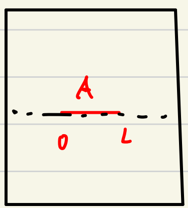
$$Z_{CFT}[\beta] = e^{\left(\frac{4\pi^2 c L}{\beta}\right)}$$

C : 中心電荷

(c = 1 for 自由スカラー場)

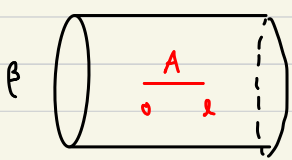
種々のEE

(1) $\mathbb{R}^{1,1}$ 上の真空



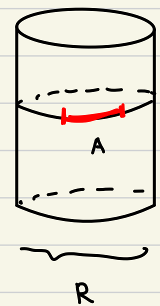
$$S_A = \frac{c}{3} \log L/\varepsilon$$

(2) 有限温度の場合



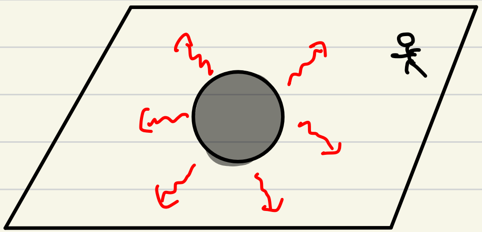
$$S_A = \frac{c}{3} \log \left[\frac{\beta}{\pi \varepsilon} \sinh \frac{\pi l}{\beta} \right]$$

(2) 空間方向が S^1 の場合.



$$S_A = \frac{c}{3} \log \left[\frac{R}{\pi \varepsilon} \sin \frac{\pi L}{R} \right]$$

BHの情報喪失問題 (II)



Hawking放射によって、BHは徐々にその質量を失っていく

$$\frac{dM}{dt} = -\sigma A_H T_H^4 \quad \left(\text{ステファンボルツマンの法則}\right)$$

$$\propto -\frac{1}{M^2} \Rightarrow \tau_{\text{寿命}} \sim M^3$$

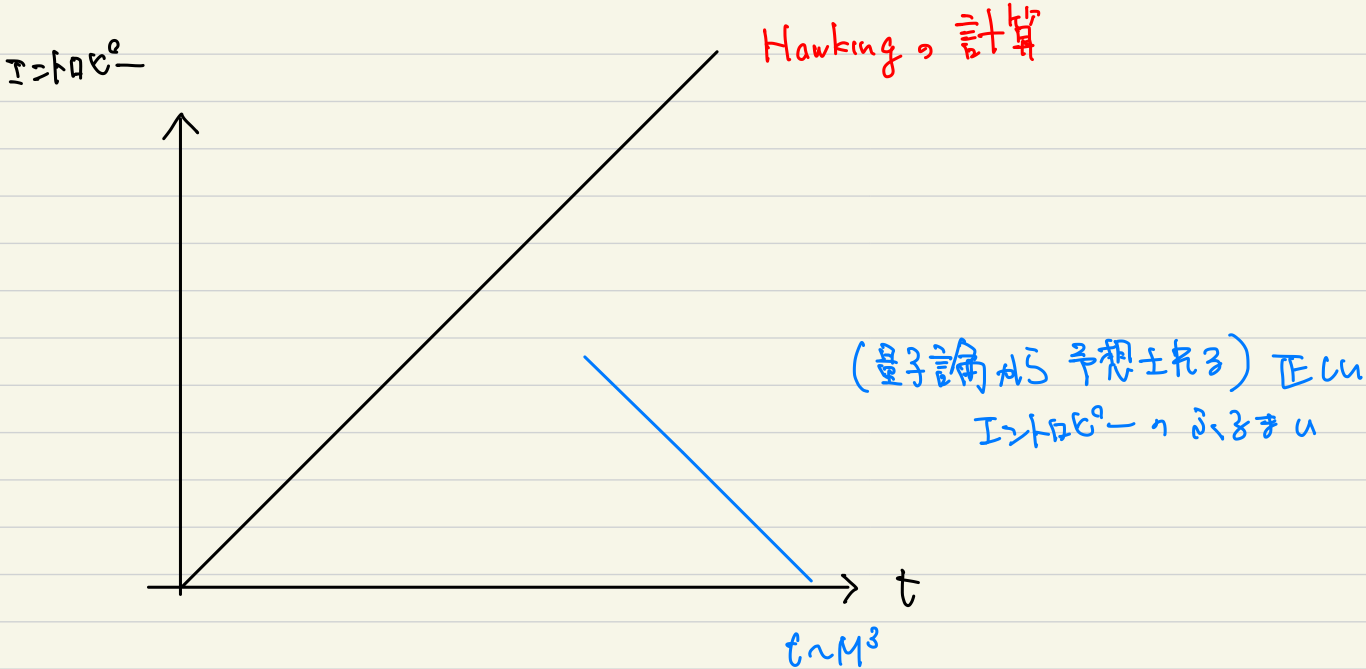
ブラックホールの蒸発

$$\Rightarrow T = \frac{1}{4M} \to \infty, \quad S_{BH} \to 0$$

・$T \to \infty$: ブラックホールの内側と外側の間のEE $S(\rho_I) = S_{\text{thermal}}(\beta) \to \infty$

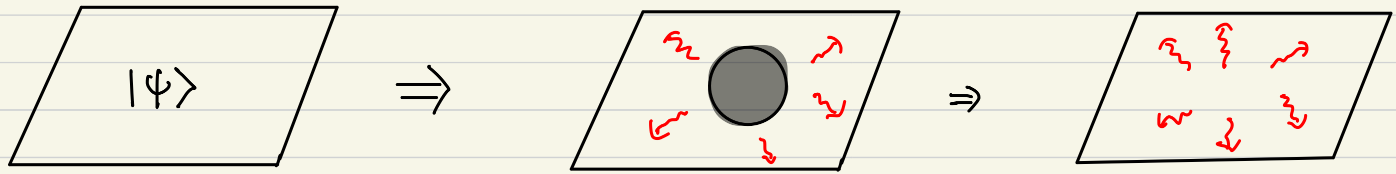
⇕ 矛盾!!

$$S(\rho_I) \le \log \min\left\{\dim \mathcal{H}_{\text{内側}}, \dim \mathcal{H}_{\text{外側}}\right\} \Rightarrow S(\rho_I) \le S_{BH} \to 0$$


エントロピー
Hawkingの計算
(量子論から予想される)正しいエントロピーのふるまい
t
$t \sim M^3$

BHの情報喪失問題

重力側の計算



pure state

$$\rho_{Hawking} = \sum_n e^{-\beta E_n} |n\rangle\langle n|$$

: mixed state

量子論

$$|\psi\rangle \longrightarrow U(t)|\psi\rangle$$: pure stateのまま.

時間発展は常にユニタリ

A microscopic model (1)

BHの内側の状態

$\sim \mathcal{H}_{\mathrm{I}}$

- In a microscopic theory (Quantum gravity) : $\mathcal{H}_{BH} \otimes \mathcal{H}_R$

$$\boxed{|\Psi\rangle = \sum_{\alpha=1}^{d_{BH}} \sum_{i=1}^{d_R} \underbrace{C_{\alpha i}}_{d_{BH} \times d_R} |\psi_\alpha\rangle_{BH} \otimes |i\rangle_{Rad}}$$

- $C_{\alpha i}$ is unknown but

$\Rightarrow$ ◎ Dynamics is chaotic $\Rightarrow$ $C_{\alpha i} = (e^{iHt})_{\alpha i}$ is random

◎ 量子重力のdetailは分からない

averaging over C

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{We are interested in } \overline{S(\rho_R)}}$

A microscopic model (1)

- ホーキング放射の密度行列は、

$$\boxed{\rho_R = \frac{1}{d_R d_{BH}} \sum_{i,j=1}^{d_R} \sum_{\alpha,\beta=1}^{d_{BH}} C_{\alpha,i} C^\dagger_{\alpha,j} |i\rangle_R\langle j|}$$

- So the average of $n=2$ Rényi entropy is,

$$\boxed{\overline{\mathrm{tr}\,\rho_R^2} = \frac{1}{d_R^2 d_{BH}^2} \sum_{i,j=1}^{d_R} \sum_{\alpha,\beta=1}^{d_{BH}} \overline{C_{\alpha i} C^\dagger_{\alpha j} C_{\beta j} C^\dagger_{\beta i}}}$$

Averaging the entropy (1)

· Since $C_{\alpha i}$ is Gaussian Random

$$
\begin{cases}
\overline{C_{\alpha i}\, C^{\dagger}_{\beta j}} = \delta_{\alpha\beta}\, \delta_{ij}, \\[6pt]
\overline{C_{\alpha i}\, C^{\dagger}_{\beta j}\, C_{\gamma k}\, C^{\dagger}_{\delta m}} = \overline{C_{\alpha i}\, C^{\dagger}_{\beta j}}\;\overline{C_{\gamma k}\, C^{\dagger}_{\delta m}} + C_{\alpha i}\, C^{\dagger}_{\beta j}\, C_{\gamma k}\, C^{\dagger}_{\delta m}
\end{cases}
$$

$$
\overline{\mathrm{tr}\, \rho_R^2} = \frac{1}{d_R^2\, d_{BH}^2} \sum_{i,j=1}^{d_R} \sum_{\alpha,\beta=1}^{d_{BH}} \overline{C_{\alpha i}\, C^{\dagger}_{\alpha j}\, C_{\beta j}\, C^{\dagger}_{\beta i}} = \frac{1}{d_R} + \frac{1}{d_{BH}}
$$

Hawking's result

a non perturbative correction $e^{-S_{BH}}$

Averaging the entropy (2)

$\mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_{BH}$

- $$\overline{\mathrm{tr}\,\rho_R^2} = \frac{1}{d_R} + \frac{1}{d_{BH}} = \begin{cases} \dfrac{1}{d_R} & : d_R \ll d_{BH} \\[2ex] \dfrac{1}{d_{BH}} & : d_R \gg d_{BH} \end{cases}$$

$\Rightarrow$
- A phase transion when $d_R = d_{BH}$ (Page curve)
- Can not be captured by the Hawking's calculation.

- Similary :

$$\boxed{\overline{S(\rho_R)} = -\overline{\mathrm{tr}\,\rho_R \log \rho_R} = \begin{cases} \log d_R & : d_R \ll d_{BH} \\ \log d_{BH} & : d_R \gg d_{BH} \end{cases}}$$

Averaging the entropy (2)

- Why the behavior of the entropy changes after the Page time?

- $\boxed{\overline{S(\rho_R)} \neq S(\overline{\rho}_R)}$

$$\overline{\rho}_R = \frac{1}{d_R} \sum_{i=1}^{d_R} |i\rangle_R \langle i| \Rightarrow S(\overline{\rho}_R) = \log d_R.$$

$$\rho_R = \frac{1}{d_R d_{BH}} \sum_{i=1}^{d_R} \sum_{\alpha=1}^{d_{BH}} C_{\alpha,i} C^{\dagger}_{\beta,j} |i\rangle_R \langle j|$$

$$= \overline{\rho}_R + \delta\rho_R$$

Random fluctuation of the DM

: Tiny $O(e^{-S_{BH}})$, but it can be accumulated

Averaging the entropy (2)

- why the behavior of the entropy changes after the Page time?

- $\boxed{\overline{S(\rho_R)} \neq S(\overline{\rho}_R)}$

$$\overline{\rho}_R = \frac{1}{d_R} \sum_{i=1}^{d_R} |i\rangle_R\langle i| \Rightarrow S(\overline{\rho}_R) = \log d_R .$$

$$\rho_R = \frac{1}{d_R d_{BH}} \sum_{i=1}^{d_R} \sum_{\alpha=1}^{d_{BH}} C_{\alpha,i} C^{\dagger}_{\beta,j} |i\rangle_R\langle j|$$

$$= \overline{\rho}_R + \delta\rho_R$$

the Accumulation of random fluctuations changes the entropy $t > t_{page}$

ランダムなゆらぎを記述するメカニズム
が重力側に存在するか？

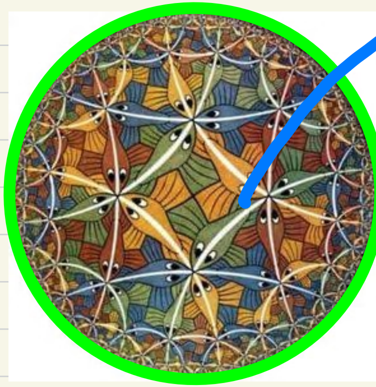
∃ レプリカワームホール

AdS/CFT 対応 と

ホログラフィック エンタングルメント

エントロピー

AdS/CFT対応とは?



d+1次元 反ドジッター空間 (Anti de Sitter)
上の量子重力理論 (超弦理論)

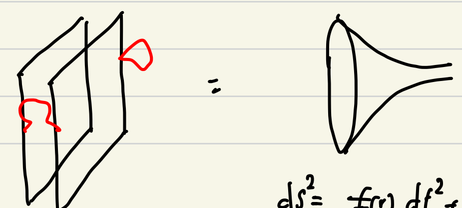
|| 等価

d次元の境界に住む(重力を含まない)
場の量子論 (共形場理論)

AdS_{d+1}の時間一定面

・ホログラフィー原理の具体例

・超弦理論のDブレーンの二つの記述
から来る。(開弦, 閉弦)



$$ds^2 = f(r)\,dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\vec{x}^2$$

反ドジッター空間とは？

・負の宇宙定数を持つアインシュタイン方程式の解：　$R_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$

・$X_0^2 + X_{d+2}^2 - \sum_{k=1}^{d+1} (X_k)^2 = \ell^2$ 上 の に定義された 計量，

$$ds^2 = -dX_0^2 - dX_{d+2}^2 + \sum_{k=1}^{d+1} (dX_k)^2$$

とにて あらわせる．

・ℓ ： AdS 半径

$$\Lambda = -\frac{d(d-1)}{\ell^2}$$

・$SO(d,2)$ 対称性をもつ

・具体的な計量 (AdS_3) : $X_0^2 + X_3^2 - X_1^2 - X_2^2 = \ell^2$

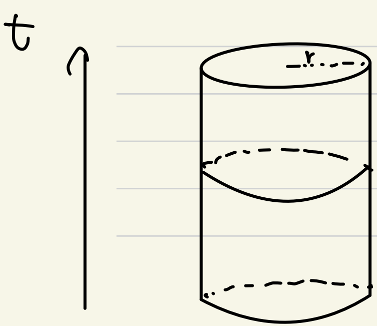
Global 座標 (r, τ, θ)

$$X_0 = \sqrt{\ell^2 + r^2}\cos\tau \qquad X_1 = r\sin\theta$$

$$X_3 = \sqrt{\ell^2 + r^2}\sin\tau \qquad X_2 = r\cos\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{ds^2 = -(\ell^2 + r^2)\,dt^2 + \frac{dr^2}{(\ell^2 + r^2)} + r^2 d\theta^2}$$

境界 : $r \to \infty$: $S^1 \times \mathbb{R}$ (Cylinder)



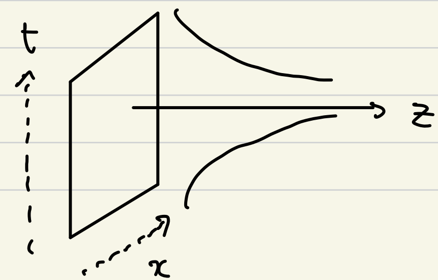
Poincare 座標 (z, t, x)

$$X_0 = \frac{\ell(1 + z^2 + x^2 - t^2)}{2z}, \qquad X_1 = \frac{\ell x}{z}$$

$$X_3 = \frac{\ell t}{z}, \qquad X_3 = \frac{\ell(-1 + z^2 + x^2 - t^2)}{2z}$$

$$\Rightarrow \boxed{ds^2 = \ell^2\left(\frac{-dt^2 + dx^2 + dz^2}{z^2}\right)}$$

境界 : $z = 0$: $\mathbb{R}^{1,1}$



共形場理論 (CFT) とは?

- スケール変換 $x^\mu \to \lambda x^\mu$ 対称性を持つ QFT
- スケール変換 + Lorenz群 $SO(d,1)$ ⇒ $SO(d,2)$ に拡大すると信じられている。
  AdS_{d+2} の isometry
- 例: 4次元 $\mathcal{N}=4$ の超対称性をもつ Yang-Mills 理論: $\beta(g)=0$

- 2次元では $SO(2,2) \sim SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})$ が、∞次元の Virasoro 対称性に拡大
  $\{L_n\}, \{\bar{L}_n\}$ $(n \in \mathbb{Z})$

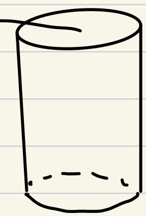
$$\boxed{[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}}$$

中心電荷: 自由度の数を表す (ex $S_{th}(\beta) \propto \frac{c}{\beta}$)

具体的な対応関係

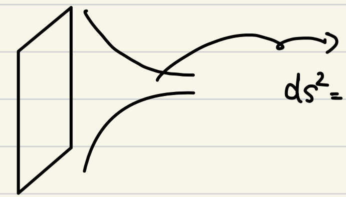
$S^1\times\mathbb{R}$ 上のCFT真空 $|0\rangle$ $\Leftrightarrow$ Global AdS_3

$$ds^2 = -(r^2+l^2)dt^2 + \frac{dr^2}{r^2+l^2} + r^2 d\theta^2$$



$|0\rangle_{CFT}$

$\mathbb{R}^{1,1}$ 上の真空 $|0\rangle_{CFT}$ $\Leftrightarrow$ Poincaré AdS_3



$|0\rangle_{CFT}$

$$ds^2 = \frac{-dt^2+dz^2+dx^2}{z^2}$$

GKP-W relation

$$\boxed{Z_{CFT} = Z_{gravity}}$$

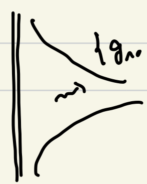
CFT側の分配関数

$$\int_{S^1\times\mathbb{R}} D\phi\, e^{-S}$$

重力側の分配関数.

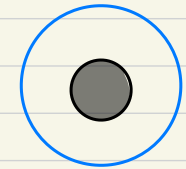
$$Z_{gravity} = \int Dg_{\mu\nu}\, D\phi_{matter}\, e^{-S_{gravity}-S_{matter}}$$

$+$ (boundary conditions at the boundary)



$$\begin{cases} g_{\mu\nu}(z,x,t) \xrightarrow{z\to 0} z^2 g^{(0)}_{\mu\nu} + \cdots \\ \phi(z,x,t) \longrightarrow z\, \phi^{(0)}(x,t) + \cdots \end{cases}$$

AdS$_3$ 上の BH : BTZ ブラックホール

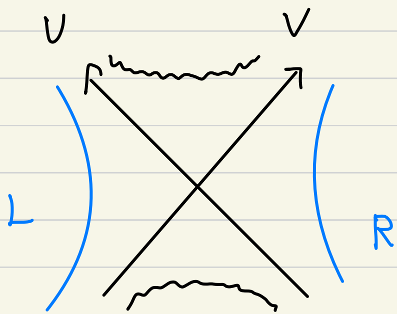


- $ds^2 = -(r^2 - M\ell^2)\,dt^2 + \dfrac{dr^2}{r^2 - M\ell^2} + r^2 d\theta^2.$

- 温度 : $T = \dfrac{\sqrt{M}}{2\pi}$, エントロピー : $S = \dfrac{2\pi r_H}{4G} = \left(\dfrac{\pi\sqrt{M}\,\ell}{2G}\right)$

◎ Kruskal 座標では

$$ds^2 = \frac{-4\ell^2\,du\,dv + M\ell^2(1-uv)^2\,d\theta^2}{(1+uv)^2}
\quad
\begin{cases}
\cdot\ \text{境界} : & uv = -1 \\
\text{特異点} : & uv = 1
\end{cases}$$

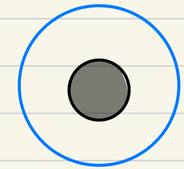


⇒ 2つの(因果的につながっていない)境界をもつ

⇒ 境界における 2つの CFT ヒルベルト空間で記述する

$$\mathcal{H}_{L,CFT} \otimes \mathcal{H}_{R,CFT}$$

AdS$_3$ 上の BH : BTZ ブラックホール



・ $ds^2 = -(r^2 - M\ell^2)\,dt^2 + \dfrac{\ell^2 dr^2}{r^2 - M\ell^2} + r^2 d\theta^2.$

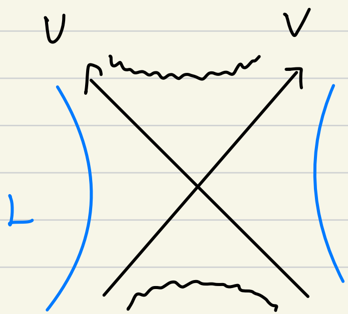
⇒ CFT側の熱平衡状態 $\rho_\beta = e^{-\beta H}$ に対応

◎ Kruskal座標では

$$ds^2 = \frac{-4\ell^2\,du\,dv + M\ell^2(1-uv)^2 d\theta^2}{(1+uv)^2}$$

・境界 : $uv = -1$

特異点 : $uv = 1$



⇒ 境界における2つのCFTヒルベルト空間で記述する

$$H_{L,CFT} \otimes H_{R,CFT}$$

⇒ TFD状態 $|TFD\rangle_\beta = \dfrac{1}{Z}\sum e^{-\frac{\beta E_n}{2}}|E_n\rangle_L |E_n\rangle_R$

BHエントロピーの微視的導出

・Bulk to boundary 関係式を用いると，BTZ BH のエントロピーが CFT側から計算できる。

$$S_{BH} = \left(\beta\frac{\partial}{\partial\beta} - 1\right)\log Z_{gravity}[\beta] = \left(\beta\frac{\partial}{\partial\beta} - 1\right)\log Z_{CFT}[\beta] \quad ; \quad T = \frac{1}{\beta} \gg 1$$

・$Z_{CFT}[\beta]$ の性質

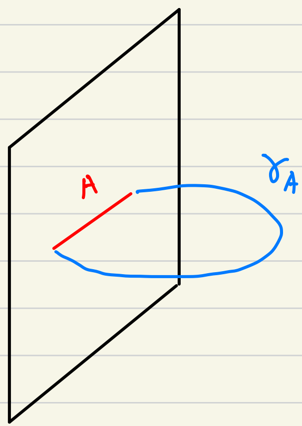
(1) $Z_{CFT}(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta E_n} \longrightarrow e^{-\beta E_0}$ （低温極限 $\beta\to\infty$）, $E_0 = -\frac{c}{12}$

(2) モジュラー不変性： $Z_{CFT}\left(\frac{4\pi^2}{\beta}\right) = Z_{CFT}(\beta)$ ： $Z_{CFT}(\beta) \longrightarrow e^{-\frac{4\pi^2}{\beta}E_0}$ （高温極限 $\beta\to 0$）

$$\Rightarrow S_{CFT} = \frac{2c\pi^2}{3\beta} = \frac{2}{3}\underbrace{\left(\frac{3\ell}{2G}\right)}_{\shortparallel}\pi^2\left(\frac{\sqrt{M}}{2\pi}\right) = \frac{2\pi(\sqrt{M}\,\ell)}{4G} = \frac{A}{4G_N} = S_{BH}\ !!$$

AdS₃ gravity に dual な 2d CFT の central charge.

Holographic entanglement entropy



CFT における領域 A のエンタングルメントエントロピーは、
AdS 側の極小曲面の面積で計算される。

$$\boxed{S_A = \min_{\gamma_A} \frac{A(\gamma_A)}{4G_N}}$$

(RT 公式

γ_A : A の境界 ∂A に end するバルク時空上の曲面

- CFT の熱力学的エントロピー $= S_{BH}$ の拡張とみなせる。
- 時空が static ではない場合の拡張 (HRT 公式)

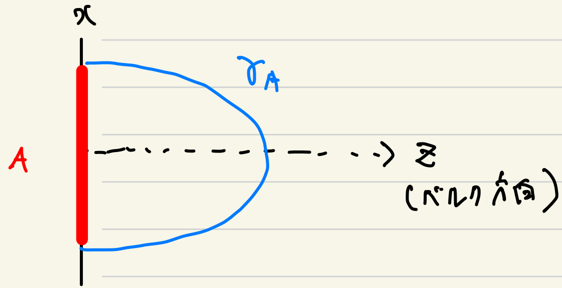
Extremal surface $\gamma_A = \gamma_A^{Ex}$: $\left.\frac{\delta A_{rea}}{\delta \gamma_A}\right|_{\gamma=\gamma_A^{Ex}} = 0$ を用いて $S_A = \frac{Area(\gamma_A^{Ex})}{4G_N}$

具体的な計算例

・$\mathbb{R}^{1,1}$ 上の CFT 真空 $|0\rangle$ のEEを holographic に計算してみよう。

$\boxed{t=\text{一定面}}$

$\Leftrightarrow$ Poincare AdS_3 : $ds^2 = \ell^2\left(\frac{-dt^2+dz^2+dx^2}{z^2}\right)$



領域 A : $-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}$ とする。

$$\text{Length} = 2\int_{z=\epsilon}^{z=z_*} dz \sqrt{\frac{\dot{x}^2+1}{z^2}} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+1}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \gamma_A : x^2+z^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 \qquad \left(\begin{aligned} x &= \frac{\ell}{2}\cos\theta \\ z &= \frac{\ell}{2}\sin\theta \end{aligned}\right) \Rightarrow \text{Length} = 2\int_{\frac{2\epsilon}{\ell}}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sin\theta}$$

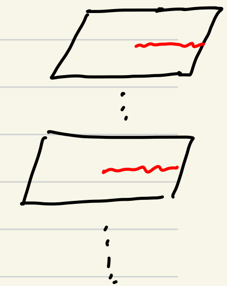
$$\frac{\text{Length}}{4G} = \frac{\ell}{2G}\log\frac{L}{\epsilon} = \underbrace{\frac{c}{3}\log\frac{L}{\epsilon}}$$

→ 2D CFTにおけるEE!!

証明のスケッチ

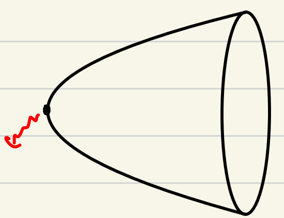
(レプリカ法) $S_A^{CFT} = -\partial_n \log \mathrm{tr}(\rho_A^n)\Big|_{n=1}$,

$\Sigma_{n,A}$: n枚



Bulk to boundary relation. $\mathrm{tr}(\rho_A^n) = Z_{CFT}[\Sigma_{A,n}] = Z_{gravity}(M_n)$

M_n: $\Sigma_{n,A}$を境界にもつ, アインシュタインeqの解



Cap off at γ_A

$\Sigma_{n,A}$

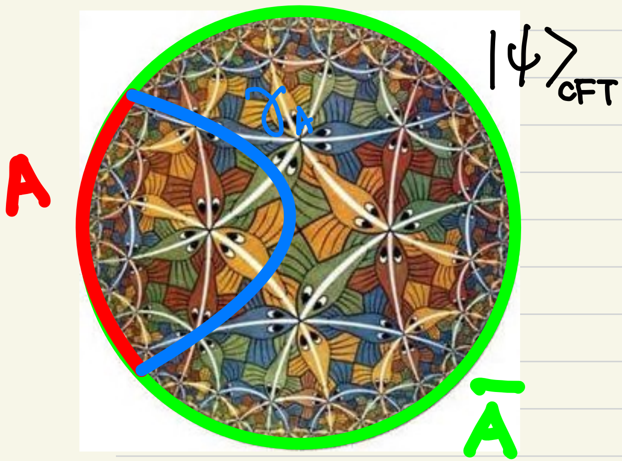
(1) $-\partial_n \log Z_{gravity}\Big|_{n=1} = \dfrac{\mathrm{Area}(\text{cap off surface})}{4G}$

(2) Einstein方程式:

Cap off surfaceは minimal surface $\dfrac{\delta A}{\delta \gamma_A} = 0$ と一致

Entanglement Wedge reconstruction

・CFTの状態から、どのように bulk 時空の情報を再構成するのか？



・CFTの 領域 A の情報から（ρ_A から）再構成できる時空の領域はどこか？

⇒ 領域 A と minimal surface γ_A で囲まれた部分

（A についてのエンタングルメントウェッジ $\Sigma(A)$）

・CFT状態が純粋状態 ⇒ $\boxed{\gamma_A = \gamma_{\bar{A}}}$

⇒ $\Sigma_A \cup \Sigma_{\bar{A}}$ = 時間一定面全体

後で超重要!!

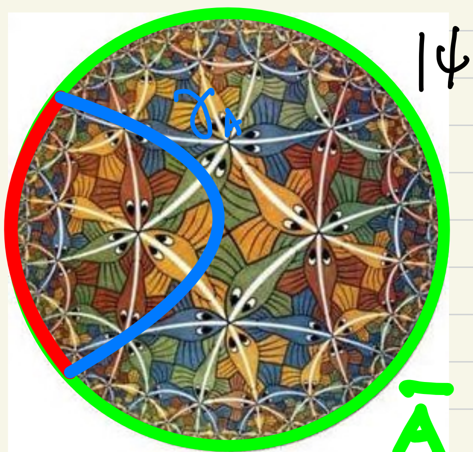
HEE に対する量子補正

・RT 公式は bulk の重力が完全に古典的な場合 $G_N \to 0$ とのみ正しい。

・$1/G_N$ 補正を入れた時、bulkの理論は $\boxed{\text{Einstein 重力 + バルク時空上の QFT}}$ で記述される。

CFT側の状態は、$(g_{\mu\nu}, |\psi\rangle_{\substack{bulk\\QFT}})$ の組で指定される。

量子補正入りの HEE 公式

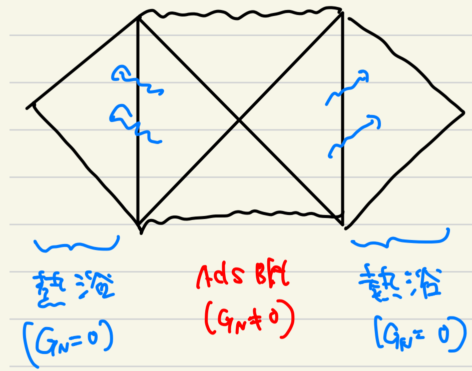


$|\psi\rangle_{CFT}$

$$\boxed{S_{CFT,A} = \underset{\gamma_A}{\mathrm{Min\,Ext}} \left[\frac{\mathrm{Area}(\gamma_A)}{4G_N} + S_{\substack{bulk\\QFT}}(\Sigma_A) \right]}$$

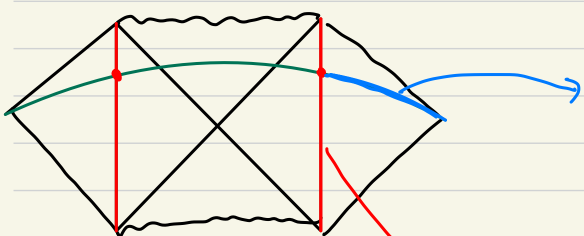
∴ $S_{\substack{bulk\\QFT}}(\Sigma_A)$: bulk 時空の QFT の、Σ_A についての entanglement entropy.

情報喪失問題への応用：セットアップ



・AdS BHの境界の外側に（BHから出てきたHawking放射を集める）熱浴をくっつける

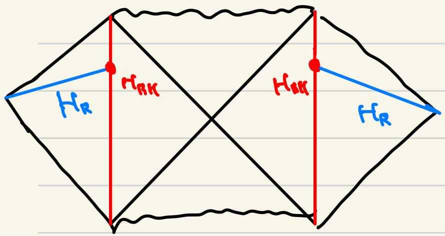
$$H_{tot} = \underbrace{H_{AdS\,BH}}_{\text{BHの微視的状態} \in H_{CFT}} \otimes \underbrace{H_R}_{\text{AdS boundaryから出てくるHawking放射}}$$



H_R は外側のNon gravitating bath上で定義

$H_{AdS\,BH} \subset H_{CFT}$ は gravitating region (AdS)の境界で定義されている。

情報喪失問題への応用：計算するべきもの



・時間一定面上では，H_{AdSBH} と H_R の エンタングルド状態が実現．Pure state だとすると，

$$\boxed{|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{k} |\psi_i\rangle_{AdSBH} \otimes |i\rangle_R}$$

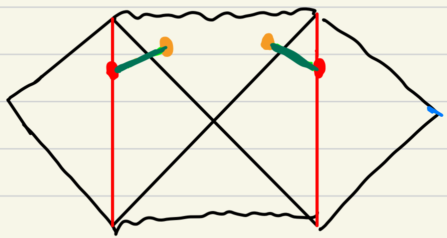
。我々が計算したいもの：ホーキング放射のエントロピー

$$\boxed{S(\rho_R) \overset{\text{Purity}}{=} S(\rho_{\underset{\text{AdSBH}}{\underset{\shortparallel}{\text{CFT}}}}) \overset{\text{HEE}}{=} \underset{\gamma_A}{\mathrm{Min}}\,\mathrm{Ext}\left[\frac{A(\gamma)}{4G_N} + S_{bulk}(\Sigma_A)\right]}$$

。time slice 上の状態は $(g_{\mu\nu}, |\psi\rangle)$ で指定される。

BHのEWとホーキング放射のEW

BHについてのEWが分かれば、その補集合をとることにより、ホーキング放射のEWが分かる



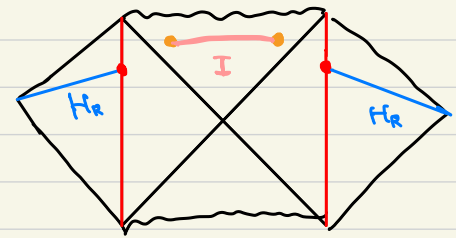
●：BHに対するQES

―：BHに対するエンタングルメントウェッジ

補集合

⟹

全体系は pure state



・H_Rに対するQES

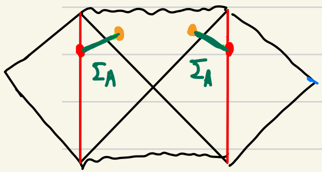
$R \cup I$：ホーキング放射のエンタングルメントウェッジ

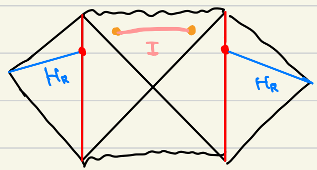
BH内部の構造はホーキング放射の情報から決定される。

Comments

(1) $S(\rho_R) \overset{\text{Parity}}{=} S(\rho_{CFT}) \overset{\text{HEE}}{=} \underset{\gamma_A}{\mathrm{Min\,Ext}}\left[\frac{A(\gamma)}{4G_N} + S_{bulk}(\Sigma_A)\right]$

ρ_{CFT} = AdSBH





$= \underset{I}{\mathrm{Min\,Ext}}\left[\frac{A(\gamma I)}{4G_N} + S_{bulk}(I \cup R)\right]$

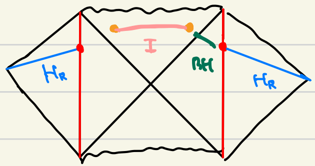
アイランド公式

(2) $S(\rho_{BH})$の QES が実際に BH の内部にあらわれることを示す必要がある

⇒ 簡単に示すことができる系として 2次元の JT 重力 がある。

アイランド領域 I について

(1) I が ホーキング放射 H_R と 独立でない。



⇒ もし独立だと仮定すると、ファイアーウォール パラドクス

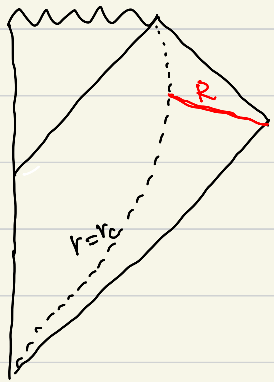
〜 ER=EPR 仮説

(2) 具体的に、どのように H_R から I を再構成すれば良いのか？

(ナイーブにやると 因果律がやぶれてしまう)

⇒ 研究の最前線：みんなで研究しよう!!

A more general setup.



$$\boxed{R:\ r_c < r < \infty}$$

= a Bath collecting the Hawking Quanta

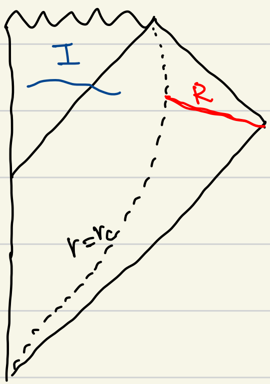
(1) An evaporating BH, due to Hawking radiation.

(2) Semi-classical : $(g_{\mu\nu}\,,\ |\psi\rangle_{QFT})$

(3) Compute

> the entropy of Hawking radiation $S(\rho_R)$
>
> ||
>
> The entanglement entropy of $|\psi\rangle_{QFT}$ on R in the presence of dynamical gravity.

The island formula (Pennigton, Almheiri et al, ...)



$$\boxed{S(\rho_R) = \min_{I} \operatorname{ext} \left[\frac{A(\partial I)}{4G} + S_{QFT}(I \cup R) \right]}$$

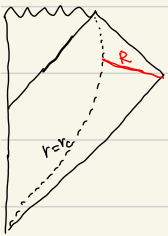
Here : $\begin{cases} I : \text{ some region in the BH.} \\ S_{QFT}(I \cup R) : \text{ EE of the state } |\psi\rangle \text{ in QFT} \end{cases}$

The island : the region which extremize the entropy functional

How it works

(1) $\boxed{t < t_{page} = S_{BH}/2}$

$\Rightarrow$ I : empty

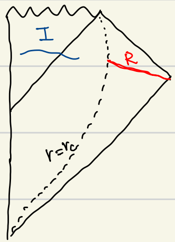


$$S(\rho_R) = S_{QFT}(R)$$

: the Hawking's result

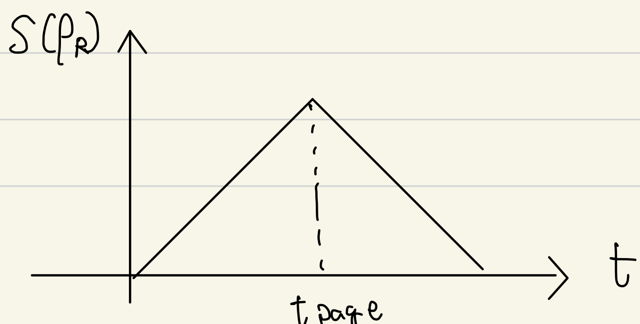
(2) $\boxed{t > t_{page}}$

$\Rightarrow$ Nontrivial island forms



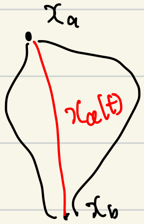
$$S(\rho_R) = \frac{A(\partial I)}{4G_N} = S_{BH}.$$

$\Rightarrow$



This entropy curve is Consistent with Unitarity

Path integral and its saddle



In QM: $\langle x_a | e^{iHt} | x_b \rangle = \int Dx \; e^{+iS_{particle}[x(t)]/\hbar}$

$$\xrightarrow{\hbar \to 0} \; e^{iS_{particle}[x_{cl}(t)]/\hbar}$$

where $\left.\dfrac{\delta S}{\delta x}\right|_{x = x_{cl}(t)} = 0$ (EoM)

- In gravity $\displaystyle\int Dg_{\mu\nu} D\phi \; e^{-S_{EH}[g_{\mu\nu}] - S_{matter}[\phi]}$

$$= \sum_{\{g_{cl}\}} e^{-S_E[g_{cl}]} \; Z_{QFT}[g_{cl}] \qquad \left.\frac{\delta S_{tot}}{\delta g}\right|_{g_{cl}} = 0$$

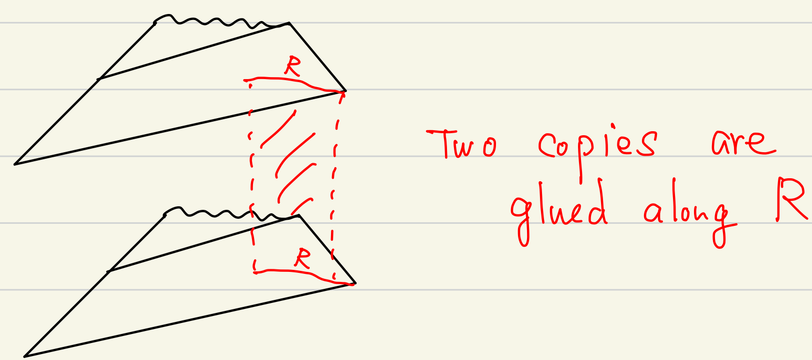
A derivation of the island formula

(1) Use the replica trick,

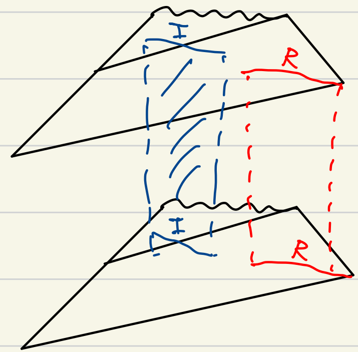
$$\boxed{\underset{-\mathrm{tr}\,\rho_R \log \rho_R}{S(\rho_R)} = \lim_{n\to 1} \frac{1}{1-n} \log \mathrm{tr}\, \rho_R^n} = \int Dg_{\mu\nu}\, e^{-S[g_{\mu\nu}]} \overset{G_N\to 0}{=} \sum_{\{g_{cl}\}} e^{-S[g_{cl}]}$$

(2) $\mathrm{tr}\,\rho_R^n$ has a path integral expression on

Ex: $\mathrm{tr}\,\rho_R^2$:

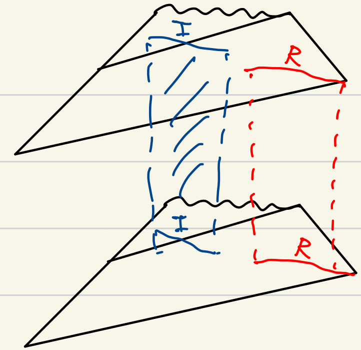


(3) In the presence of dynamical gravity, we also need to include the contribution of the replica wormhole,



$\mathrm{tr}\,\rho_R^2$: The sum of these two contributions.

$\mathrm{tr}\,\rho_R^2 \simeq$ 

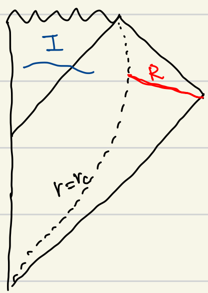
$+$ 

Hawking's result $+$ Corrections

- A similar computation for $\mathrm{tr}\,\rho_R^n \Rightarrow$ the Island formula

an Interpretation of the island

(1) The region in the BH reconstructable from Hawking radiation



⇒ { A geometric manifestation of Hayden Preskill

Actual recovery involves Petz map

(2) Microscopically, it captures $\boxed{\text{random fluctuations in the DM of HR}}$

⇒ In gravity, such random fluctuations

⇒ (Euclidean) Wormholes (in our case, replica WH)

Averaging the entropy (2)

- why the behavior of the entropy changes after the Page time ?

- $\boxed{\overline{S(\rho_R)} \neq S(\overline{\rho}_R)}$

$$\overline{\rho}_R = \frac{1}{d_R} \sum_{i=1}^{d_R} |i\rangle_R \langle i| \Rightarrow S(\overline{\rho}_R) = \log d_R .$$

$$\rho_R = \frac{1}{d_R d_{BH}} \sum_{i=1}^{d_R} \sum_{\alpha=1}^{d_{BH}} C_{\alpha,i} C^{\dagger}_{\beta,j} |i\rangle_R \langle j|$$

$$= \overline{\rho}_R + \delta\rho_R$$

the Accumulation of random fluctuations changes the entropy $t > t_{Page}$

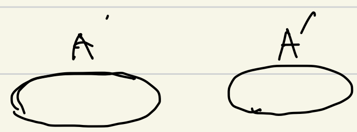
Going back to gravity (1)

· In a theory of gravity,

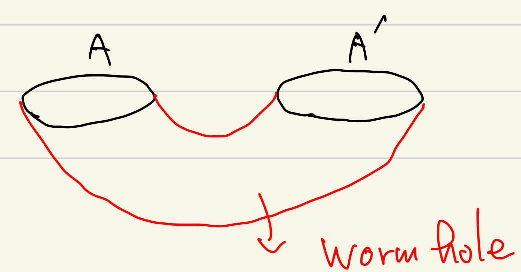
$$\boxed{\text{The random fluctuations} = \text{Wormholes}}$$

(Coleman, Hawking, GS, MM ... SSS)

⊙ What is a wormhole? ⇒ A geometric connection between two systems



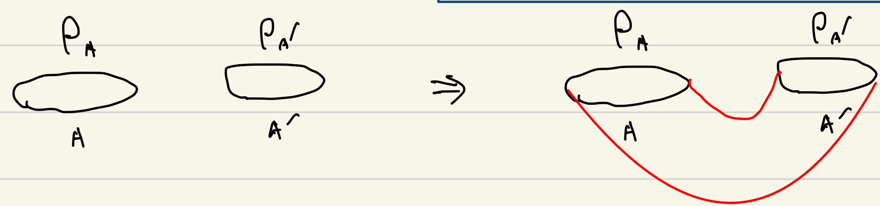
⇒



Two disjoint systems

Going back to gravity (2)

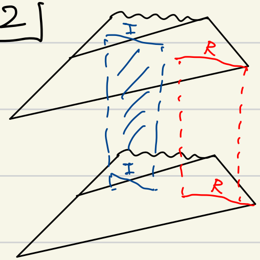
⊙ An intuitive understanding : $\boxed{\text{RFs} \Leftrightarrow \text{Correlations} \Leftrightarrow \text{Wormholes}}$



$\overline{\mathrm{tr}[(\rho_A\otimes\rho_{A'})(O_A\otimes O_{A'})]} \neq \overline{\mathrm{tr}[\rho_A O_A]}\;\overline{\mathrm{tr}[\rho_{A'} O_{A'}]}$ ⇒ A geometric connection between A and A'

• $\boxed{\text{RFs in } \overline{\mathrm{tr}\,\rho_R^n} \Rightarrow \text{a Replica wormhole}}$

$n=2$



This justifies the island formula.

$$\overline{\mathrm{tr}\,\rho_R^2} = \frac{1}{d_R^2\, d_{BH}^2} \sum_{i,j=1}^{d_R} \sum_{\alpha,\beta=1}^{d_{BH}} \overline{C_{\alpha i}\, C^\dagger_{\alpha j}\, C_{\beta j}\, C^\dagger_{\beta i}}$$

$$= \frac{1}{d_R^2\, d_{BH}^2} \sum_{i,j=1}^{d_R} \sum_{\alpha,\beta=1}^{d_{BH}} \overline{C_{\alpha i}\, C^\dagger_{\beta j}}\; \overline{C_{\gamma k}\, C^\dagger_{\delta m}} + \overline{C_{\alpha i}\, \overline{C^\dagger_{\beta j}\, C_{\gamma k}}\, C^\dagger_{\delta m}}$$

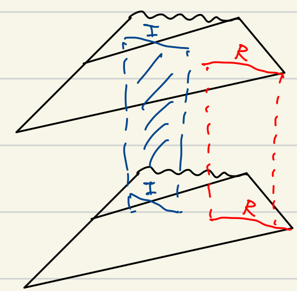
g

in gravity

$\simeq$

(Trivial Saddle)

$+$

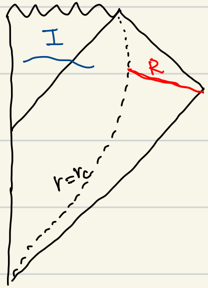


(Replica wormhole)

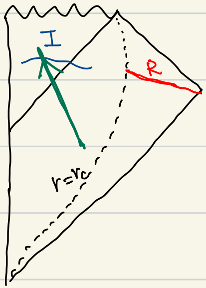
$$= \frac{1}{d_R} + \frac{1}{d_{BH}}$$

Information recovery
through the island.

An interpretation of the island



an Island : a region in the BH reconstructable from Hawking radiation H_R when $t > t_{page}$.



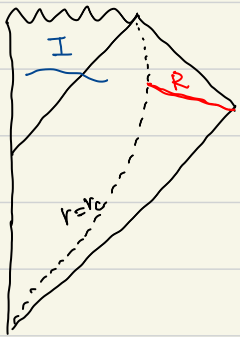
- A gedanken experiment : Sending a diary into the BH

⇒ It will enter to the island ⇒ belongs to H_R

⇒ **Geometric understanding of Hayden Preskill**

time delay between I and R ⇒ The scrambling time

Information recovery



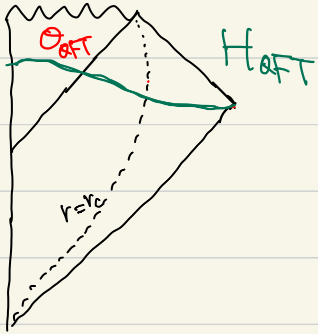
- How does the reconstruction works?

- Take a QFT on the fix BH background

Any operator O_{QFT} in the island region must be reconstructable from $\mathcal{H}_R$

This is archived by Petz map.

Petz map (1)



(I) Embed $\overset{\mathcal{H}_{sub}\ \cap}{\mathcal{H}_{QFT}}$ to the larger space $\mathcal{H}_{QG} = \mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_{BH}$

$$\boxed{\begin{aligned} V : \quad & \mathcal{H}_{QFT} \to \mathcal{H}_{BH} \otimes \mathcal{H}_R \\ & |a\rangle_{QFT} \to |\Psi_a\rangle = \sum_{i=1}^{d_R} |\psi_{ia}\rangle_{BH} \otimes |i\rangle_R . \end{aligned}}$$

Remarks

(1) the QFT state is a slightly excited state on the BH

(2) $$\sum_{a=1}^{d_{BH}} \sum_{i=1}^{d_R} C_{ia} |\psi_a\rangle_{BH} |i\rangle \equiv \sum_{i=1}^{d_R} |\psi_i\rangle_{BH} \otimes |i\rangle_R$$

The new basis is not orthogonal, $\langle \psi_i | \psi_j \rangle = \sum_{a=1}^{d_{BH}} C_{ia} C_{ja} = \delta_{ij} + R_{ij}$

Petz map (2)

(II) Under the embedding, a QFT operator is mapped to

$$V : H_{QFT} \longrightarrow H_{BH} \otimes H_{R}$$

$$O_{QFT} = \sum_{a,b=1}^{d_{code}} \langle a| O_{QFT} |b\rangle \, |a\rangle\langle b| \longrightarrow \mathcal{O} = \sum_{a,b}^{d_{code}} \langle a| O_{QFT} |b\rangle \, |\Psi_a\rangle\langle \Psi_b|$$

acts on both H_R and H_B

The goal : Construct $\mathcal{O}_R$ acting only on H_R, st

$$\boxed{\langle \Psi_a | \mathcal{O}_R | \Psi_b \rangle = {}_{QFT}\langle a| O_{QFT} |b\rangle}$$

A comment

- This is just a usual quantum error correction procedure,

with the Quantum channel : $\mathcal{H}_{code} \xrightarrow{V} \mathcal{H}_{BH} \otimes \mathcal{H}_R \xrightarrow{\text{Erasure}} \mathcal{H}_R$

$\mathcal{H}_{QFT\,sub}$

- Information recovery of the BH interior from Hawking radiation $\mathcal{H}_R$ $\Longleftrightarrow$ Quantum error correction against the erasure (tracing out the BH dof)

Petz map

$$\begin{array}{ccc} H_R \times H_{BH} & \longrightarrow & H_R \\ \mathcal{O} & & \mathcal{O}_R \\ & \overset{V}{\nwarrow} & \\ & & H_{QFT} \\ & & \mathcal{O}_{QFT} \end{array}$$

Such $\mathcal{O}_R$ can be constructed,

$$\boxed{\mathcal{O}_R = \sigma_R^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{Tr}_{BH}[\,\mathcal{O}\,] \, \sigma_R^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\begin{cases} \mathcal{O}_{BH \cup R} = \displaystyle\sum_{a,b}^{d_{code}} \langle a | \mathcal{O}_{QFT} | b \rangle \, |\Psi_a\rangle\langle\Psi_b| \\ \sigma_R = \mathrm{tr}_{BH}[VV^\dagger] = \mathrm{tr}_{BH}[\,\Pi_{proj}\,] \,. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \cdot \ \text{Acting only on } H_R \,. \\ \cdot \ \text{Satisfy } \langle \Psi_a | \mathcal{O}_R | \Psi_b \rangle = \langle a | \mathcal{O}_{QFT} | b \rangle \end{cases}}$$

Gravity point of view

"west coast paper" (1911.11977)

- $O_R = \frac{1}{d_R} \sum_{ij} |i\rangle_R\langle j| \sum_{ab=1}^{d_{code}} \langle \psi_{ia} | \psi_{jb} \rangle_{BH} \, O_{ab}$

- $\langle \psi_{ia} | \psi_{jb} \rangle_{BH} = \sum_{\alpha=1}^{d_{BH}} C_{\alpha(ia)} C^{\dagger}_{\alpha(jb)}$ $\Rightarrow$ We need a worm hole

- $\langle \Psi_a | O_R | \Psi_b \rangle \rightarrow \langle \Psi_a | \sigma_R^n \, \mathrm{Tr}[O] \, \sigma_R^n | \Psi_b \rangle$, $n \to -\frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{d_R^{2n+2}} \sum_{\{i_k, I_k\}} \sum_{\{a_k, b_k\}} \left(\prod_{k=1}^{n} \langle \psi_{i_k a_k} | \psi_{i_{k+1}, a_k} \rangle \right) \left(\sum_{a', b'} \langle \psi_{i_n a'} | \psi_{I_1 b'} \rangle \, O_{a'b'} \right)$$

$$\left(\prod_{k=1} \langle \psi_{I_k b_k} | \psi_{I_{k+1}, b_k} \rangle \right)$$

$\Rightarrow$ Z_{2n+2} symmetric replica wormhole

$$\Rightarrow \begin{cases} d_R < d_{BH} : & \text{no wormholes} \Rightarrow \text{the Petz map fails} \\ d_R > d_{BH} : & \text{wormholes} \Rightarrow \text{succeed} \end{cases}$$

$$\langle \Psi_a | O_R | \Psi_b \rangle = \langle a | O_{in} | b \rangle$$

Summary

(1) Random fluctuation of ρ_R is important to obtain a Page curve.

(2) In a theory of gravity, averaging over random fluctuation is captured by including wormholes to the gravitational path integral

$\Rightarrow$ Island formula

(3) Information recovery $\Rightarrow$ Petz map

Future prospects

(1) Can we see unitary time evolution from other quantites ?? (Ex : S matrix ?)

(2) How the geometry of the BH interior is encoded in $\mathcal{H}_R$? $\Rightarrow$ We need a detailed study of Petz map

(3)