2022/9/14
日本機械学会 2022年度年次大会

衝撃荷重を受ける 2次元弾性円板の応力伝播

Stress propagation in a two-dimensional elastic disk subject to impact loading

〇佐藤瑶介，石川遥登，髙田智史
東京農工大学

緒言：破壊

<u>破壊</u>

破壊現象は広く
活用されている

破壊現象の理解

- 破砕の効率化
- 粒径の安定化

土木，地震分野など
にも応用可能

破壊現象の理解には
内部状況を知る必要がある

採掘機

ペッパーミル

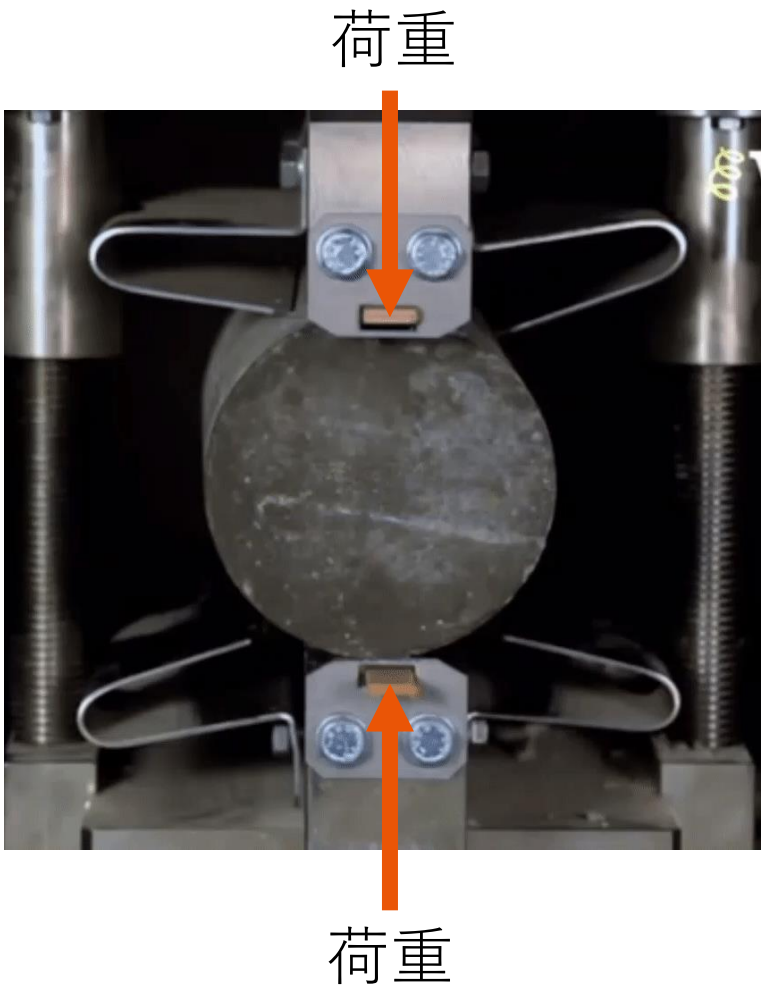
惑星衝突

緒言：静的荷重下の破壊

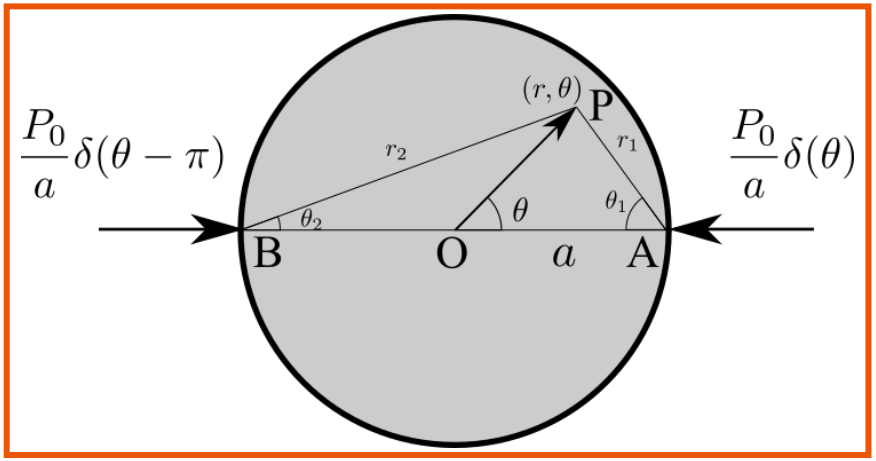
ブラジリアンテスト

- コンクリートに対向荷重を作用させる強度試験法
- 静的荷重下では荷重軸線上で破壊される

物体の内部状況はどのようになっているか

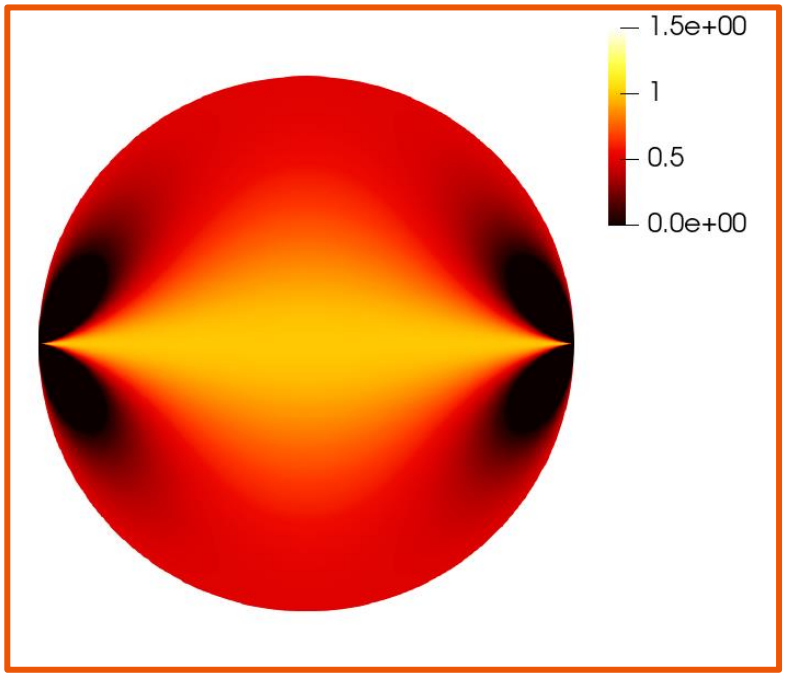


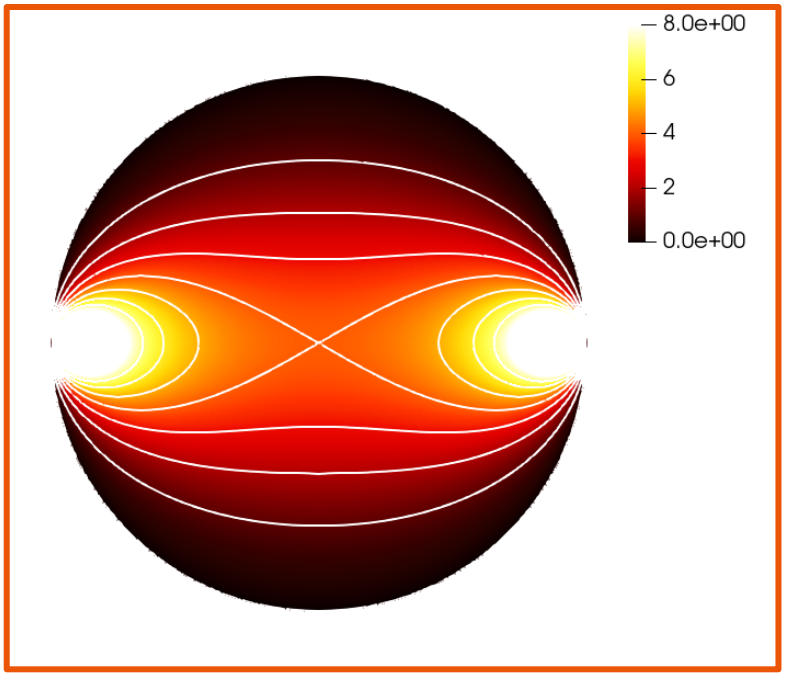
緒言：静的解(平面応力状態)



主応力差

$$\sigma_{11}-\sigma_{22}=\sqrt{\left(\sigma_{xx}-\sigma_{yy}\right)^2+4\sigma_{xy}^2}$$





緒言：衝撃荷重下の破壊

衝撃伝播

波動現象

- 波の大きさの急激な増加，減少
- 反射波と進行波の重ね合わせによる増幅

↓

静的荷重下とは異なる場所での破壊

物体内部の衝撃伝播の解析が重要

本研究

弾性体の応力の時間発展

問題設定

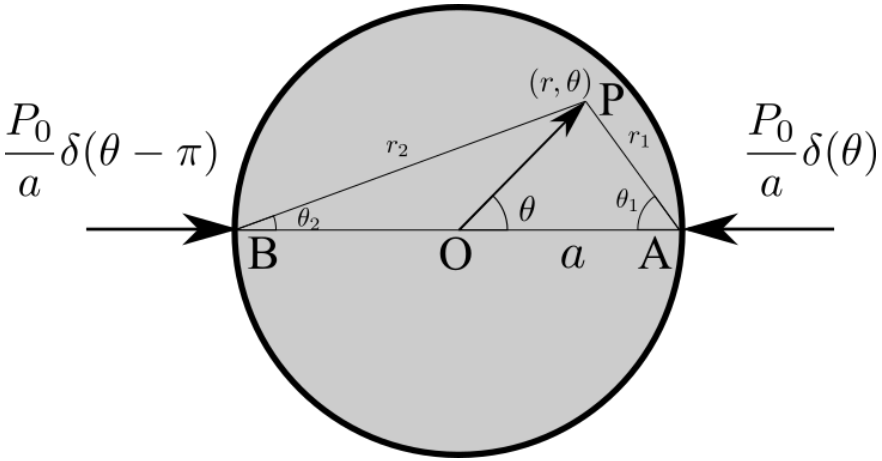
先行研究

半無限空間

- P波，S波，表面波を含む時間発展解
- 静的応力解に収束

今回の系

弾性円板（有限サイズ）



モチベーション

- 解が得られるか
- 反射波の影響

理論

Navier-Cauchy 方程式

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{u} = \nabla^2 \boldsymbol{u} + G\frac{1+\nu}{1-\nu}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})$$

ρ:密度，$\boldsymbol{u}$:変位，
ν:ポアソン比，G:剛性率

ポテンシャルの導入

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla}\phi + \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$$

波動方程式

$$\Box_L \phi = 0$$
$$\Box_T A = 0$$

ラプラス変換

$$\mathcal{L}[\phi] = \sum_m a_m(r,s)\cos(m\theta)$$

$$\mathcal{L}[A] = \sum_m b_m(r,s)\sin(m\theta)$$

理論

ポテンシャルと応力の関係

$$\frac{\sigma_{rr}}{2G} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{1-\nu}\nabla^2\phi$$

応力と変位の関係式
+
ポテンシャルの導入

- ラプラス変換
- $\mathcal{L}[\phi], \mathcal{L}[A]$を代入
- 境界条件$(r = a)$

$\sigma_{rr} = -P(\theta)\Theta(\mathrm{t}), \quad \sigma_{r\theta} = 0$

$\mathcal{L}[\phi], \mathcal{L}[A]$の
a_m, b_mを決定

ラプラス
逆変換

$$\sigma_{rr}(r,\theta,t) = \sum_m \sigma_{rr}^{(m)}(r,t)\cos(m\theta)$$

理論：フローチャート

Navier-Cauchy 方程式

+

ポテンシャルの導入

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{u} = \nabla^2 \boldsymbol{u} + G\frac{1+\nu}{1-\nu}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla}\phi + \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$$

波動方程式

$$\Box_L \phi = 0$$

$$\Box_T A = 0$$

ラプラス空間

$$\mathcal{L}[\phi] = \sum_m a_m(r,s)\cos(m\theta)$$

$$\mathcal{L}[A] = \sum_m b_m(r,s)\sin(m\theta)$$

ポテンシャルと応力の関係

$$\frac{\sigma_{rr}}{2G} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{1-\nu}\nabla^2\phi$$

$\mathcal{L}[\phi], \mathcal{L}[A]$を代入

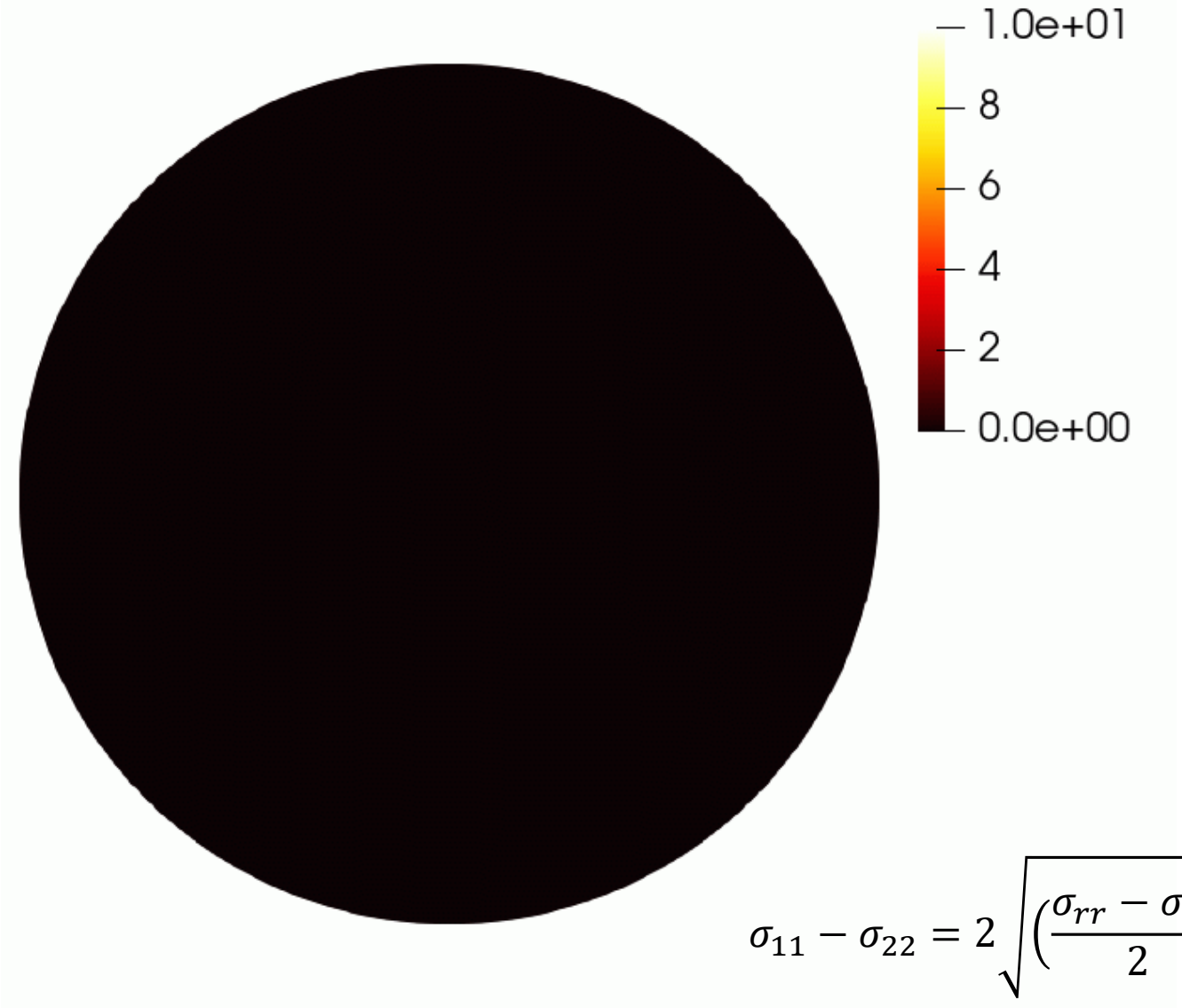
境界条件$(r=a)$

$$\sigma_{rr} = -P(\theta)\Theta(\mathrm{t}), \quad \sigma_{r\theta} = 0$$

a_m, b_mの決定

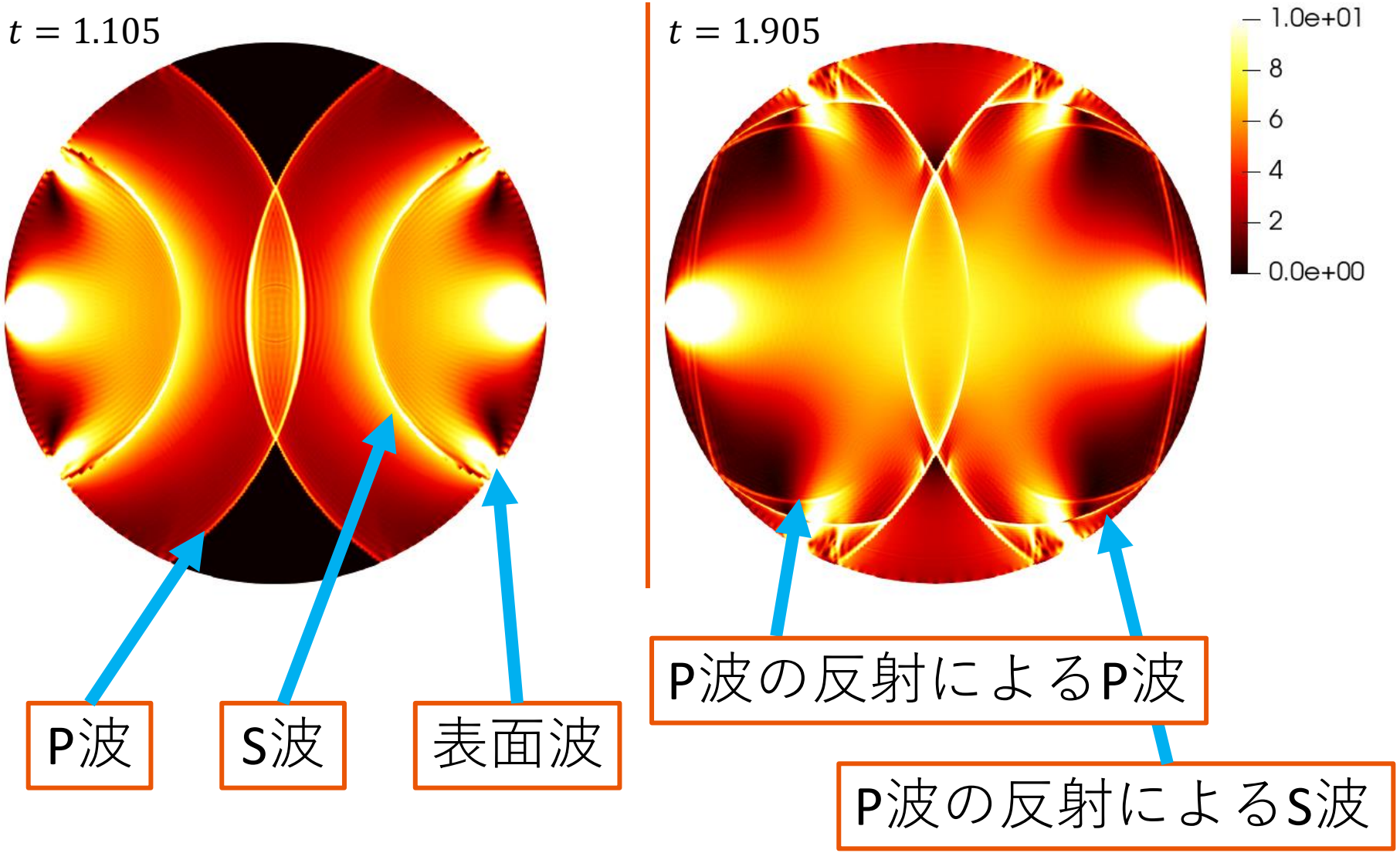
$$\sigma_{rr}(r,\theta,t) = \sum_m \sigma_{rr}^{(m)}(r,t)\cos(m\theta)$$

結果：主応力差

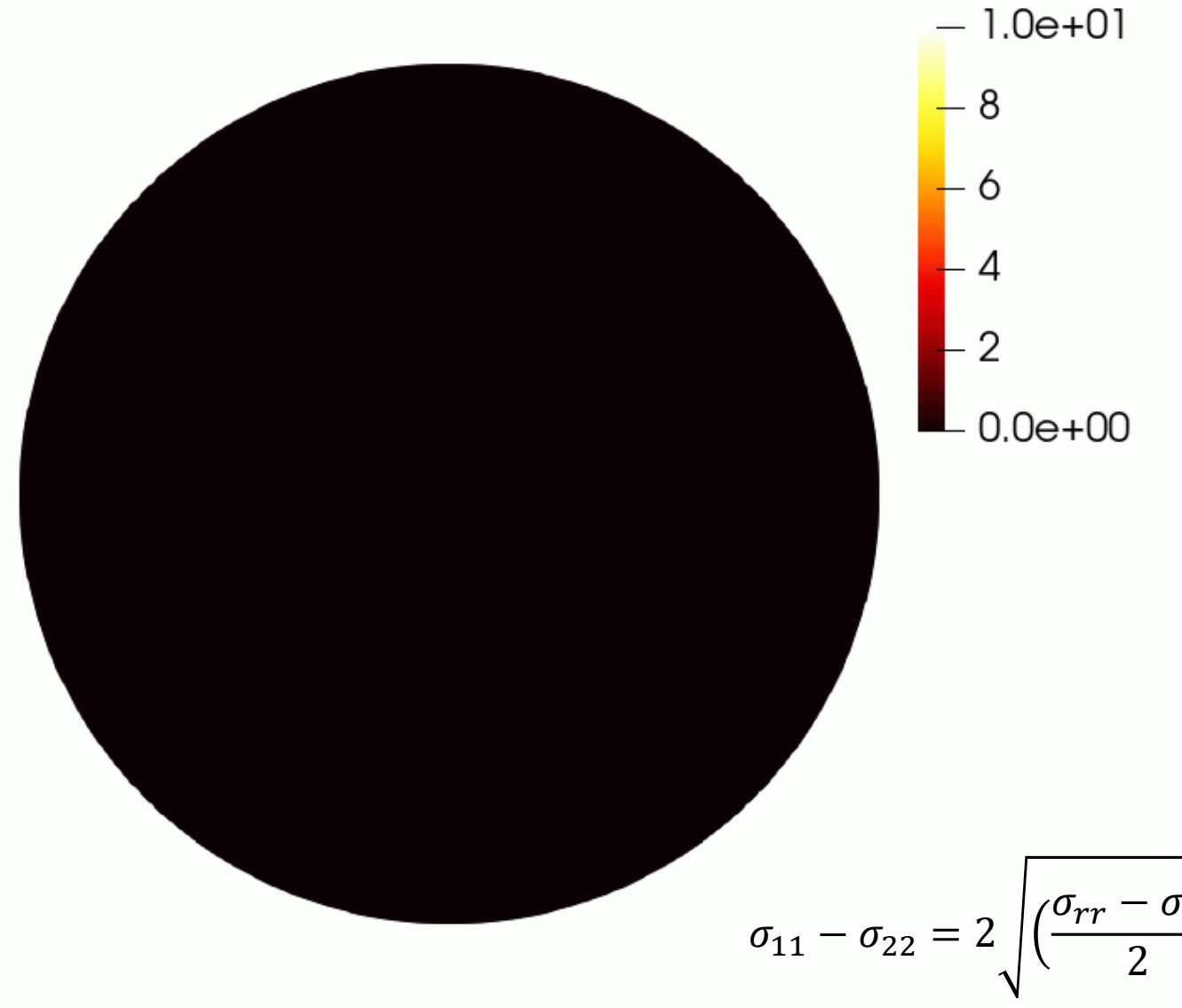


$$\sigma_{11} - \sigma_{22} = 2\sqrt{\left(\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{2}\right)^2 + \sigma_{r\theta}^2}$$

結果：各種の波


$t = 1.105$
$t = 1.905$
1.0e+01
8
6
4
2
0.0e+00
P波
S波
表面波
P波の反射によるP波
P波の反射によるS波

結果：主応力差



$$\sigma_{11} - \sigma_{22} = 2\sqrt{\left(\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{2}\right)^2 + \sigma_{r\theta}^2}$$

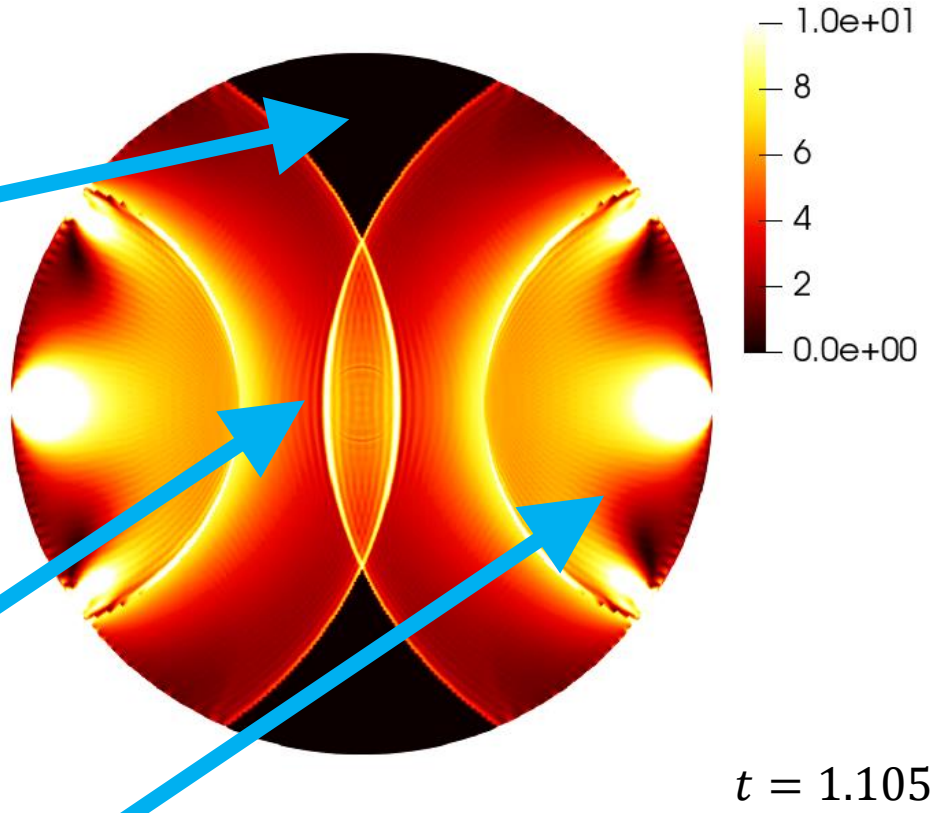
結果：領域

3つの領域に分けられる

① <u>P波未到達</u>
応力は0

② <u>P波到達，S波未到達</u>
P波の時間発展

③ <u>S波到達</u>
(非時間依存項)+(P波の時間発展)+(S波の時間発展)



結果：非時間依存項

非時間依存項

① 最終値の定理に対応

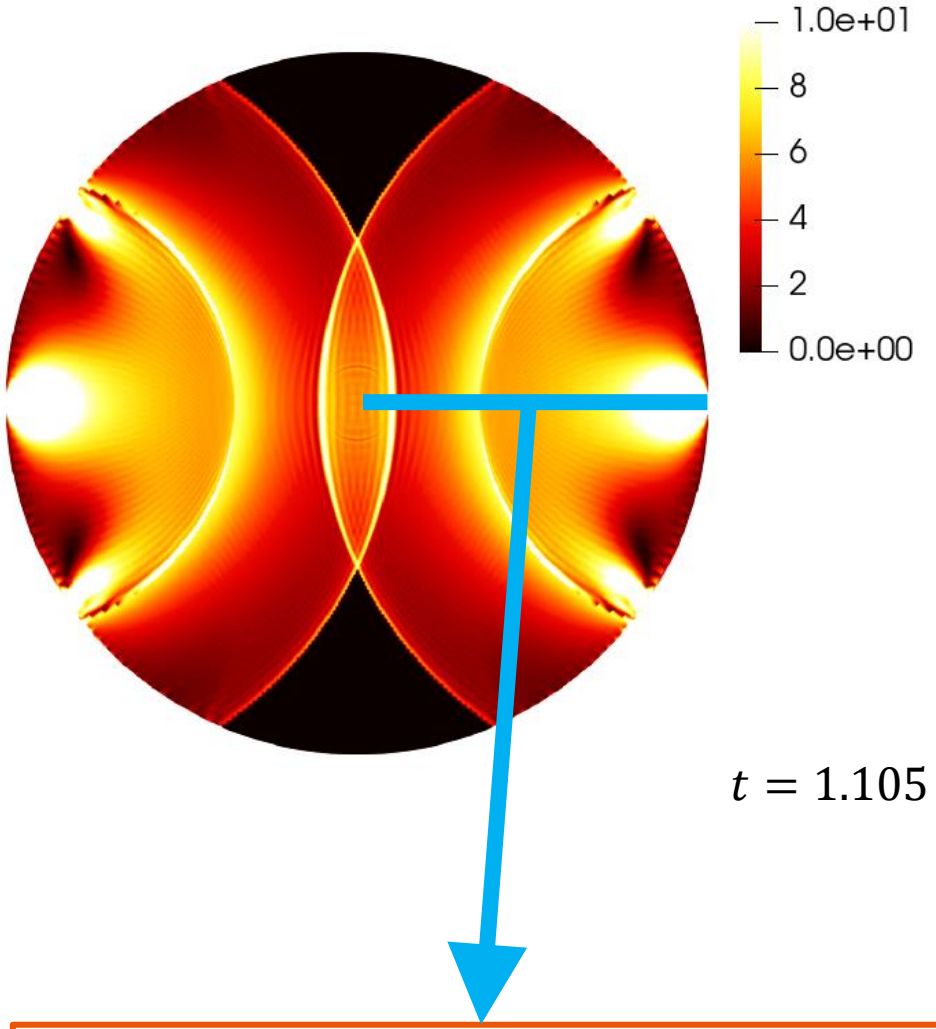
$$\lim_{t\to\infty}\sigma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r},t)=\lim_{s\to 0}s\mathcal{L}[\sigma_{\alpha\beta}](\boldsymbol{r},s)$$

② 静的解と一致

応力伝播は静的解に収束する

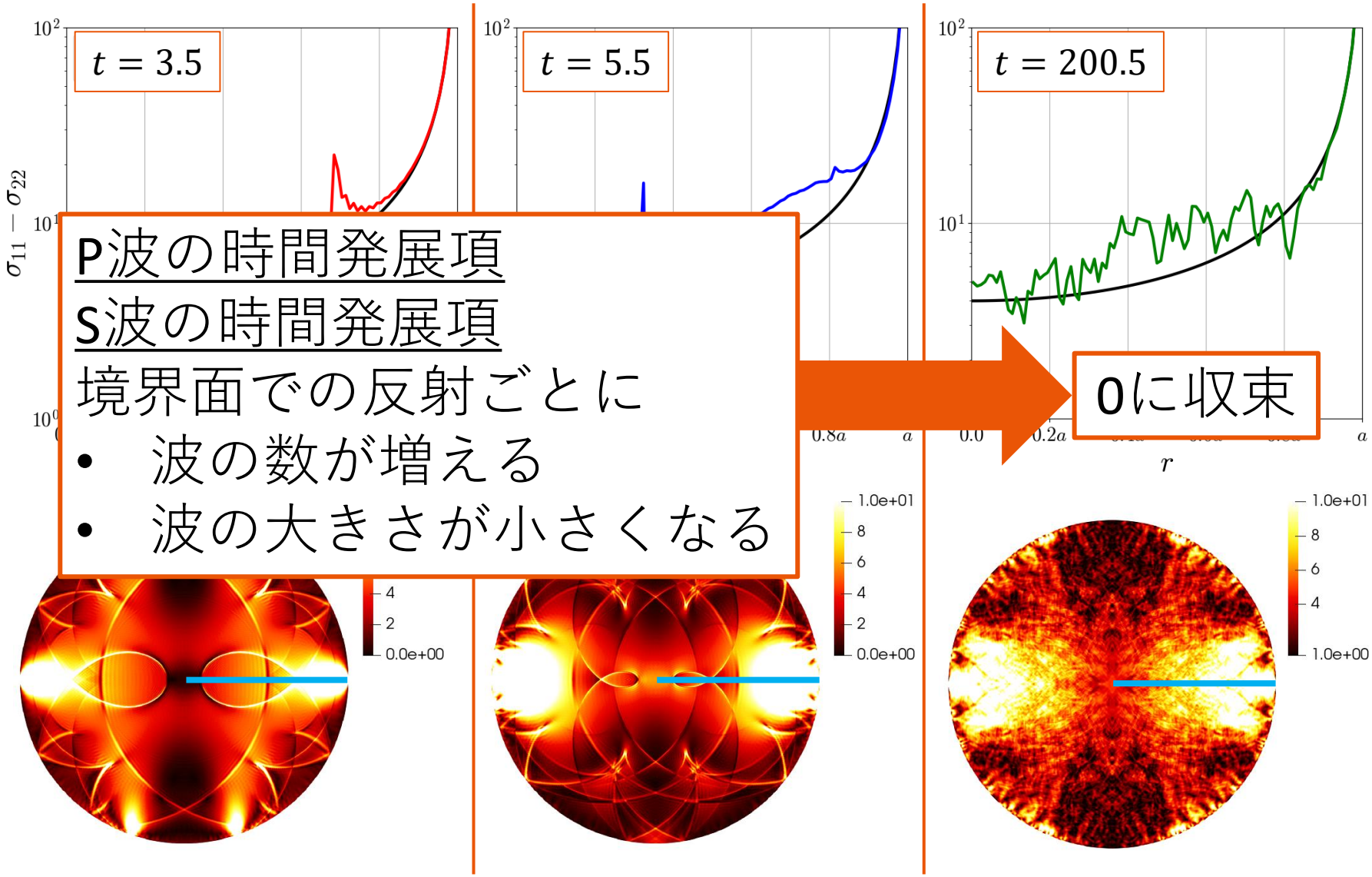
- P波の時間発展項
- S波の時間発展項

ともに0に収束



各時間における応力を見る

結果：収束性



P波の時間発展項

S波の時間発展項

境界面での反射ごとに

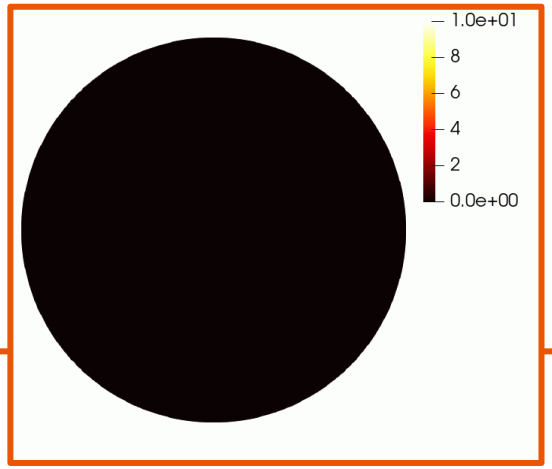
- 波の数が増える
- 波の大きさが小さくなる

0に収束

結言

目的

有限サイズの弾性円板内部の応力伝播の解析



結果

解析解を導出

- Ｐ波，Ｓ波，表面波を含む
- 境界での反射
- 静的解に収束

- S波到達後では
  (静的解)+(P波成分)
  +(S波成分)

今後の展望

- 球，楕円への応用