

New Perspective on D-branes *

Petr Hořava

CIT-USC Center for Theoretical Physics
California Institute of Technology, Pasadena, CA 91125, USA
horava@theory.caltech.edu

記： 百武 慶文 (京大基研) hyaku@yukawa.kyoto-u.ac.jp
杉本 茂樹 (京大基研) sugimoto@yukawa.kyoto-u.ac.jp

目次

1	1 日目	1
1.1	motivation	1
1.2	Ramond-Ramond fields and D-brane charges	2
1.3	lower D-branes as bound states in higher Dp - $D\bar{p}$ systems	5
1.4	K-theory	11
1.5	type IIA , $K^{-1}(X)$ and unstable D-branes	14
2	2 日目	22
2.1	branes in different dimensions	22
2.2	digression : false vacuum decay in field theory	24
2.3	type IIA D-instanton is not a bounce for susy vacuum	25
2.4	digression2 : sphalerons in field theory	32
2.5	unstable D-branes as D-sphalerons	34
2.6	back to the type IIA D-instanton	36
2.7	higher homotopy groups of string configuration space	37
2.8	digression3 : the use of sphalerons	39

*研究会 “Recent Advances in String Theory” (1999年12月8日(水)–12月10日(金) 於 東大駒場キャンパス) において行われた P. Hořava 氏の講義の講義録です。

1 1日目

1.1 motivation

はじめに、この研究会に招いてくださった世話人の方々に感謝したいと思います。初めて日本に来ることができて大変うれしく思っています。

まず、今日は D-brane の新展開について、一般的なことから黒板を用いて紹介し、明日はトラペを使って、まだ論文にしていらないいくつかの新しい結果について議論していきたいと思ひます。

それでは、まず次のようなおなじみの絵を描くことから始めましょう。string 理

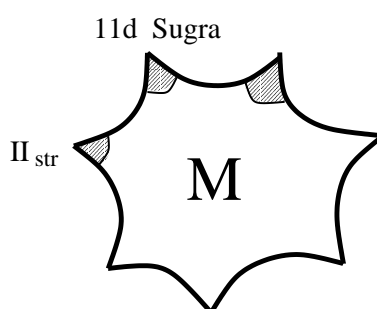


図 1: M理論

論の非摂動的な理解が進んだことによって、様々な string 理論はM理論と呼ばれる一つの理論によって統一的に理解されることが分かってきました。M理論の moduli space にはこの絵のようにたくさんの角があって、ここでは string 理論の摂動展開や 11 次元 supergravity などを用いて理論を摂動論的に記述することができます。これらの角は双対性によってお互いに関係付いています。双対性を導くには超対称性が本質的な役割を果たします。しかし、現実の世界はもちろん超対称的ではありませんから、string 理論を用いて何か現実の世界に関する議論をするには、超対称性がない場合についても理解を深める必要があります。これは大変難しい問題です。この問題を考えるために、今回の講義では、まず超対称な真空における励起状態で超対称性を破るものを考えてみたいと思ひます。近年の解析では主に BPS 状態の解析がなされてきました。超対称性が十分たくさん残るような状態であれば、moduli space の上を自由に動くことができ、双対性の解析が可能になるからです。しかし、もちろん、超対称性を破るような励起もたくさんあり、これらの振る舞いを理解することは非常に興味深いと思ひます。これが、明日の講義の主な動機です。その前に基本的な事柄、特に超対称性があるときにもないときにも非常に重要な役割を演じる D-brane についてお話します。まず D-brane につ

いての伝統的な取り扱いを復習し、その後で、ここ 1、2 年の Sen の一連の仕事によって得られた新しい描像を解説したいと思います。

1.2 Ramond-Ramond fields and D-brane charges

Type II string 理論の flat な 10 次元時空を考えます。D-brane は通常、open string が端を持つ超平面として定義されます。このとき、この D-brane に端を持つ open

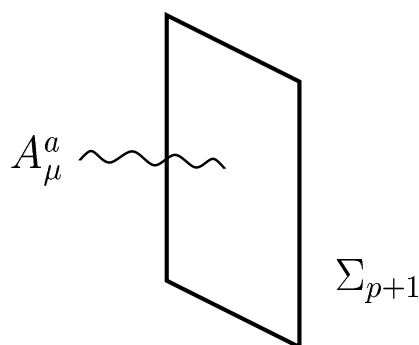


図 2: D-brane

string の振動モードを調べると、D-brane の world-volume の上にはゲージ場があることが分かります。Type II string 理論で、 N 枚の D-brane が重なると、このゲージ場は $U(N)$ の adjoint 表現に属することになり、 $U(N)$ ゲージ理論が得られます。そして、この D-brane は Ramond-Ramond charge を持っており、BPS な brane であることが分かります。従って、 Dp -brane の world-volume 上の理論は $p+1$ 次元の超対称 Yang-Mills 理論になります。

Type II string 理論には、さまざまな Ramond-Ramond 場が存在します。R-R p -form 場 C_p の field strength を $F_{p+1} = dC_p$ で定義すると、type IIA には $F_0, F_2, F_4, F_6, F_8, F_{10}$ があり、type IIB には F_1, F_3, F_5, F_7, F_9 と R-R 10-form 場 C_{10} があります。

IIA	$F_0, F_2, F_4, F_6, F_8, F_{10}$
IIB	$F_1, F_3, F_5, F_7, F_9, C_{10}$

表 1: R-R fields in type II string theory.

R-R 場は、D-brane の world-volume と次のような形で自然に couple しています。

$$\int_{\Sigma_{p+1}} C_{p+1} \quad (1.1)$$

ここで、 Σ_{p+1} は Dp -brane の world-volume です。R-R 場は微分形式なので、R-R charge は時空の多様体に対応したコホモロジー群に値をとることになります。これは D-brane charge の通常の解釈の仕方です。

この解釈によって、D-brane のスペクトラムは次のように与えられることが分かります。この表はもちろん良く知られているものですが、実はこの中には D-brane

IIA	D0, D2, \dots , D8
IIB	D(-1), D1, \dots , D9

表 2: D-branes in type II string theory.

の新しい描像を得るためのヒントが隠されているのです。

まず、type IIA と type IIB string 理論で何が起きているのかを復習しましょう。存在する R-R 場から、次のようなスペクトラムを得ます。Type IIB には D9-

	IIA	IIB
D9	0	\mathbb{Z}
D8	\mathbb{Z}	0
D7	0	\mathbb{Z}
	\vdots	\vdots
D0	\mathbb{Z}	0
D(-1)	0	\mathbb{Z}
D(-2)		

表 3: D-brane charges in type II string theory.

brane がありますが、type IIA にはありません。存在する R-R charge から、他の次元の D-brane は表 3 のように type IIA と type IIB で交互に存在することが分かります。特に、type IIB 理論には D-instanton がありますが、type IIA には安定な D-instanton は存在しません。この表は D-instanton までで終わりにすることもできますが、明日詳しく議論するように、もう一步先まで伸ばすことができます。R-R field strength の表を思い出して下さい。R-R field strength の表の中には、type IIA の R-R 10-form field strength がありました。これが non-zero であるときには、宇宙項として働きます。実際、 F_{10} の 2 乗が宇宙項にあたります。そして、こ

のときには所謂 Massive type IIA string 理論が得られます。 F_0 は F_{10} と dual な関係にあり、これらは確かに type IIA string 理論に存在します。実際、これらに対応する vertex operator を書き下すことができます。Type IIA string 理論におけるこれらの field strength は、いったい何を意味するのでしょうか？また、対応する R-R charge をもつ D-brane は存在するのでしょうか？もちろん、この式に従えば、 F_0 の対応物はとても奇妙な物体であることが分かります。というのは、world-volume の次元が -1 次元になるからです。従って、これが本当に IIA string 理論の励起として意味のあるものなのかどうか良く分かりません。この D(-2)-brane の正しい解釈については、明日議論することにししましょう。

これらが R-R charge を見ることによって分かる事柄です。次に、type II string 理論から type I string 理論の話に移りましょう。Type I 理論は type IIB string 理論を orientifold projection することで得られます。R-R charge のうち、D9-brane charge は残って D7-brane charge は落ち、D5-brane charge は残るという具合にして、存在する D-brane charge は D9, D5, D1 であることが分かります。type II string 理論に存在する Dp -brane charge は、 p の値に 2 つおきの周期性がありましたが、type I 理論には 4 つおきの周期性があります。

	IIA	IIB	I
D9	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}
D8	\mathbb{Z}	0	0
D7	0	\mathbb{Z}	0
D6	\mathbb{Z}	0	0
D5	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}
D4	\mathbb{Z}	0	0
D3	0	\mathbb{Z}	0
D2	\mathbb{Z}	0	0
D1	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}
D0	\mathbb{Z}	0	0
D(-1)	0	\mathbb{Z}	0

表 4: D-branes in type I/II string theory.

しかし、実際には、D9-brane の world-volume 理論は D-string のものと非常に似ていて、D5-brane のものとは異なっています。つまり、D9-brane の world-volume 理論には回転群のゲージ対称性があり、これは D-string の場合も同様です。一方、D5-brane の場合のゲージ群はシンプレクティック群になります。従って、正確には 8 つおきの周期性があることになります。これは数学の方で知られている K 理

論における Bott 周期性を強く示唆しています。K 理論というのは、コホモロジー理論の一般化です。このことの物理的な意味付けは、まず Moore と Minasian [1] によって与えられ、その後、次に説明する Sen の構成法 [2] を用いて、Witten [3] がより精密に議論しました。

すなわち、R-R charge を時空の多様体に対応するコホモロジー群の元とする通常の解釈ではなく、D-brane charge はコホモロジー群の一般化である K 群の元と解釈するほうがより適切であるということです。K 理論についてはすぐに説明します。上で得られた D-brane のスペクトラムは、D-brane がコホモロジー理論よりも K 理論によってうまく記述されるということの最初のヒントを与えました。そして、一旦 K 理論が D-brane charge を分類するのに都合が良いということが分かっていると、BPS な D-brane 以外にもこの議論が適用できることが分かります。特に、type I string 理論において、K 理論的な考察によって、 \mathbb{Z}_2 の charge を持った brane がいくつか存在することが分かります。つまり、type I string 理論でコンパクト化していない flat な 10 次元時空を考えても、上で考えた BPS な D-brane 以外に、non-BPS で安定な D-brane が存在することが示されます。

1.3 lower D-branes as bound states in higher Dp - $D\bar{p}$ systems

それでは、D-brane をより高い次元の brane の上の topological defect とする Sen の解釈の話をしましょう。この D-brane の解釈では D-brane は open string の端が乗れる空間ではなく、次のように topological defect として表されることとなります。不安定な Dq -brane の系を考えます。 p は q よりも小さいとして、この系の中で、 Dp -brane の world-volume は Dq -brane の topological defect のもつ core の部分であると解釈されます。つまり、安定な Dp -brane はより次元の高い不安定な Dq -brane の系における topological defect として表されます。 q の値は好きなだけ大きくとることができるので、 Dq -brane の次元は時空全体を埋め尽くす次元にとることができます。つまり、全ての安定な Dp -brane は時空全体を埋め尽くす次元の不安定な D-brane の系における安定な topological defect として表されることとなります。従って、時空を埋め尽くす不安定な D-brane の系は、全ての D-brane を構成するための普遍的な媒体となることができます。この講義では、type IIA と type IIB の string 理論におけるこの不安定な D-brane の系の構造を詳しく説明したいと思います。

D-brane は弦理論特有のものであって、場の理論にはこれに対応するものは存在しないと言う文献がしばしば見受けられますが、これは必ずしも正しくありません

ん。時空を覆う不安定な D-brane の系の場の理論の中では、ヒッグス現象に伴った通常の topological defect として全ての D-brane を実現することができるのです。このようにして、D-brane を場の理論で取り扱うことが可能になるのです。

それでは、まず type IIB string 理論の場合を詳しく見ていきましょう。Type IIB string 理論には時空を埋め尽くす D9-brane が存在します。D9-brane は BPS で安定な D-brane ですが、R-R tadpole の相殺のために anti D9-brane * を加える必要があります。D9-brane と anti D9-brane のペアが一組あるときを考えてみましょう。もちろん、D9-brane も anti D9-brane も時空を埋め尽くす brane なので、ここで描

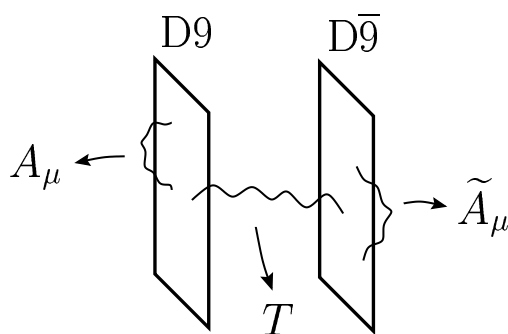


図 3: D9-D $\bar{9}$ system

く絵 (図 3) は仮想的なものです。Type IIB string 理論の D9-D $\bar{9}$ 系の低エネルギーのダイナミクスを考えてみましょう。brane 上の低エネルギーの励起は brane に端を持つ open string によって表されます。この open string は両端を D9-brane 上に持つものや両端が anti D9-brane 上にあるもの、そして D9-brane と anti D9-brane とをつなぐものが考えられます。もちろん、D9-D $\bar{9}$ のペアは一組である必要はないので、 N 組用意することにしましょう。この系でも、アノマリーは正しく相殺することが分かります。両端が D9-brane 上にある open string からは $U(N)$ ゲージ場が得られます。同様に、両端が anti D9-brane 上にある open string からは別の $U(N)$ ゲージ場が得られます。従って、この系のゲージ対称性は $U(N) \times U(N)$ です。これに加えて、D9-brane と anti D9-brane をつなぐ open string がありますが、この open string のスペクトラムは、通常の場合と比べて GSO projection が逆に働くことが boundary state を用いた議論によって示されます。つまり、ゲージ場は落ちて、タキオンが残ることになります。タキオンは片方の $U(N)$ に関して基本表現に属し、もう片方の $U(N)$ に関しては基本表現の複素共役表現に属します。この系にはタキオンが存在するので、これは不安定な系です。実際にこのタキオ

* anti D_p -brane とは、 D_p -brane の Ramond-Ramond charge の符号を逆にしたものことで、以後 $D\bar{p}$ -brane と書く場合もあります。

ンの質量の2乗を計算すると string unit で、 $m_T^2 = -1$ であることがわかります。この不安定性は、string 理論の摂動論的な解析ではどう取り扱ったら良いのか良く分かりません。タキオンはそのポテンシャルの山から転がり落ちて行くと思われませんが、string 理論の摂動論の最低次を見る限りで言えるのはそのくらいです。

今日と明日の講義を通じて次に述べるような重要な仮定を用います。まず、このタキオン場はヒッグス場と呼ぶにふさわしい性質を持っていることを仮定します。つまり、後で少し触れますが、このタキオン場はどこかにポテンシャルの最小値を持つということを信じたいのです。実際にタキオンのポテンシャルを計算して、最小値を取る位置やそこでの真空のエネルギーを求めることはできませんが、タキオン場はポテンシャルを転がり落ちて、あるエネルギー密度を持った真空に落ち着くということを仮定することにします。仮定したいのは、このようにタキオンのポテンシャルがどこかに最小値を持つということだけではありません。さらに、world-volume 理論でタキオン場がポテンシャルを転がり落ちる過程が、時空の中で D-brane と anti D-brane が対消滅する過程と対応しているということを仮定します。つまり、D9-D $\bar{9}$ 系は type IIB の超対称な真空からの超対称性を破るような励起であると考えられるので、真空中に粒子と反粒子を置いた系のように、対消滅を起こし、無限遠方へ向けてエネルギーを放射して超対称な真空に落ち着くものと考えられます。この D-brane と anti D-brane の対消滅は world-volume 上の理論ではヒッグス機構と解釈されます。タキオン場が凝縮を起こしてポテンシャルの最小点に達したとします。このとき、真空のエネルギー密度は負で全空間で均一になったとしましょう。ここで仮定したいのは、この負のエネルギー密度がちょうどもともとの D-brane と anti D-brane の系が持っていた正のエネルギー密度とキャンセルするということです。D-brane と anti D-brane には正の tension があるので、この系は正のエネルギー密度を持っていました。タキオンが凝縮することによって、この正のエネルギー密度がちょうどキャンセルされて、結局、超対称な真の真空に落ち着くというシナリオです。これは議論を進めるための仮定です。

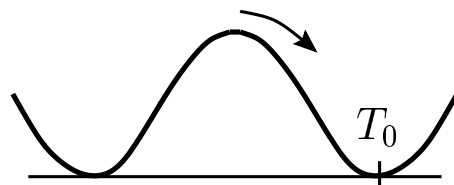


図 4: tachyon potential

この議論には、実は抜け穴があります。私が見たところでは、この抜け穴はまだ満足のいくように解決されていないと思います。これを少し説明しましょう。ヒッ

グス機構の起こる様子を良く見ると、もともとのゲージ対称性 $U(N) \times U(N)$ はタキオンが凝縮することによって、対角的な $U(N)$ に破れるのです。従って、 $U(N)$ のゲージ対称性が残ることになるのですが、これは問題です。というのは、type IIB の超対称な真空には $U(N)$ ゲージ対称性などはなく、低エネルギーでは supergravity を得るだけです。そこには超対称性を破るような余分な $U(N)$ Yang-Mills 理論が入る余地はないのです。従って、先ほど説明したヒッグス機構が起こってから、この $U(N)$ 対称性がなくならなければならないのですが、これがどうやって実現されるのかは良く分かっていません。いくつかこの現象に関する議論はあります。Pilijin Yi によって、ある場合にはこの $U(N)$ 対称性は confinement を起こすということが示唆されました [4]。彼の議論はある特別な場合にはうまく適用できるのですが、一般的な場合にはうまくいきません。また、別の議論が Ashoke Sen によって与えられています。彼は摂動論的な効果によってこの $U(N)$ 対称性が消えるということの間接的に議論しました [5]。この講義では、この問題には目をつぶって、ヒッグス機構が brane と anti brane の対消滅に対応していることを単に仮定することにしましょう。そして、brane の world-volume におけるヒッグス現象を考え、そこから何が言えるのかを議論したいと思います。

ここまでは、タキオン場が時空全体で均一な値に落ち着く場合を議論してきました。この場合は、先ほど述べた問題を無視することになると、type IIB string 理論の超対称な真空に対応したわけです。もちろん、ヒッグス機構を通じて様々な topological defect を得ることができます。つまり、タキオン場が全時空で均一な値に落ち着く理由はないので、非自明な topological charge を持ち、エネルギーが有限になるようなタキオン場の配位を考えることができます。これは場の理論で非常に良く知られていることなので、詳しく説明する必要はないと思いますが、今の場合に存在する topological defect のスペクトラムを調べてみることにしましょう。ヒッグス機構によってどのような topological defect が出得るのかを見るために、可能な topological defect の core のあたりの様子を調べて見ましょう。最終的に有限のエネルギー密度を持つ領域が $p+1$ 次元の world-volume Σ_{p+1} をなす場合を考えることにします。この defect の core ではタキオン場は zero になり、もともとのゲージ対称性が回復します。そして、これに垂直な方向の無限遠からなる球面を考えましょう。今、D9-D $\bar{9}$ 系を考えていますから、余次元は $k \equiv 10 - (p+1)$ です。従って、先ほど考えた無限遠における球面は $(k-1)$ 次元の球面です。エネルギーが有限になることを要求すると、無限遠にある球面 S^{k-1} でのタキオンの場の配位は、この S^{k-1} から、真空のなす多様体 (vacuum manifold) への写像を与えます。この vacuum manifold はヒッグス機構による対称性の破れ方によって決まります。つまり、vacuum manifold は、もともとのゲージ対称性を破れずに残った

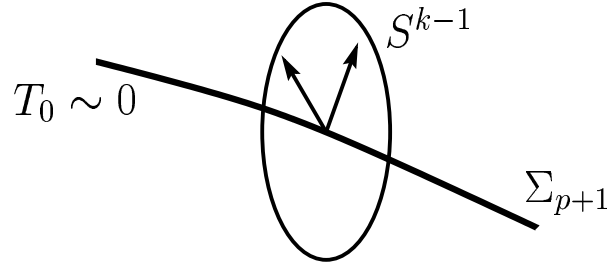


図 5: topological defect

ゲージ対称性で割って得られる coset space です。今の場合、

$$\mathcal{V}_{IIB} = \frac{U(N) \times U(N)}{U(N)} \simeq U(N) \quad (1.2)$$

のように、単に $U(N)$ になります。ここで N は D9-D $\bar{9}$ のペアの数です。従って、 $p+1$ 次元の world-volume に垂直な方向の無限遠方において、タキオン場が真空多様体にどのように巻き付くことができるかを調べることによって、持ち得る topological charge を分類することが可能になります。タキオン場は S^{k-1} から \mathcal{V}_{IIB} への写像を与えるので、余次元が k であるような topological defect を得るには、 S^{k-1} から \mathcal{V}_{IIB} への非自明な写像、つまり、ホモトピー群 $\pi_{k-1}(U(N))$ の非自明な元を調べれば良いわけです。十分大きな N に対して $U(N)$ のホモトピー群は次のようになっています。

$$\pi_n(U(N)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n \text{ は奇数} \\ 0 & n \text{ は偶数} \end{cases} \quad (1.3)$$

これを見ると、 $k-1$ が奇数の場合は、余次元が k であるような topological defect が得られることが分かります。つまり、余次元が偶数であるような topological defect が存在し、上の式にあるように整数の topological charge を持ちます。この整数は、表 3 の IIB D-brane charge の \mathbb{Z} と同一視されます。

それでは、このとき何が起きているのかを説明しましょう。まず始めに type IIB string 理論で、D9-brane と anti D9-brane のペアをいくつか用意しました。そして、タキオンの凝縮の仕方に応じて、ヒッグス現象に伴う topological defect が得られました。この topological defect は余次元が偶数のときに存在し、加法的な topological charge を持っています。例えば、余次元が 2 のとき、topological defect はタキオンが無限遠の S^1 の上で $U(1)$ に非自明な巻きつき方をしたものです。これは D7-brane に対応します。同様に、余次元が偶数の topological defect は BPS な D-brane と解釈されます。

この構成法をもっと詳しく見ていきましょう。これまで、可能な D-brane の charge の分類を議論してきましたが、これから、この topological defect のより明確な構成法を述べましょう。D9-brane と anti D9-brane が N 組ある系を考え、この系から Dp -brane を構成します。topological defect が得られるのは p が奇数の場合です。このとき、余次元は偶数なので、これを $2k$ とおきます。無限遠の球面は $2k-1$ 次元の S^{2k-1} です。world-volume Σ_{p+1} に局所化された topological defect は次のようにして構成されます。垂直方向の空間の座標を x^1, x^2, \dots, x^{2k} とします。この空間に関する回転群 $SO(2k)$ には 2 つのスピノル表現 (\mathcal{S}_+ と \mathcal{S}_- と書く) があります。これらは 2^{k-1} 次元の表現です。この $SO(2k)$ のガンマ行列 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{2k}$ は \mathcal{S}_+ から \mathcal{S}_- への写像を与えます。さて、構成法は次の通りです。 $N = 2^{k-1}$ とおいて、 N 枚の D9-brane の Chan-Paton index を \mathcal{S}_+ か \mathcal{S}_- のどちらかの足と同一視します。ここでは \mathcal{S}_+ としましょう。これを全時空に広げて Chan-Paton 束と呼ばれるベクトル束にします。同様のことを \mathcal{S}_- についても行います。そして、 \mathcal{S}_+ は N 枚の D9-brane からくる Chan-Paton 束で、 \mathcal{S}_- は N 枚の anti D9-brane の Chan-Paton 束であるとしてします。一方、タキオン場はゲージ群 $U(2^{k-1}) \times U(2^{k-1})$ の $(\square, \bar{\square})$ なる表現に属しているので、これは \mathcal{S}_+ から \mathcal{S}_- への写像を与えることになります。そこで、タキオン場をガンマ行列を用いて、

$$T(x) = f(r) \Gamma_i x^i \quad (1.4)$$

という形に書くことができます。ここで $f(r)$ はある収束因子で、原点からの距離 $r = |x|$ にのみ依存する関数です。この公式は一般的な式で、これからしばしば使います。この式で表されるタキオン場は S^{2k-1} 上で正しい巻きつき数を与え、topological charge が 1 であるような topological defect を表していることを確かめることができます。これが type IIB string 理論における余次元が $2k$ の D-brane を D9-D $\bar{9}$ 系の world-volume 上の topological defect として構成する方法です。

この構成の仕方と K 理論の間にはどのような関係があるのでしょうか？少しわかり道になりますが、せっかくですから、K 理論との関係をお話しましょう。

[質問] その $f(r)$ は求まるのですか？

[回答] $f(r)$ については、あまり良く分かりませんが、簡単な scaling の議論によって、余次元が十分大きい場合には core が string size まで縮むということが分かります。従って、この場合には場の理論の解析は意味がなくなります。kink 解の時のような余次元が小さい場合には core は広がっていく傾向にあり、この場合は取り扱いがさらに厄介になります。余次元が 4 よりも大きい場合には core が縮む傾向にあり、低エネルギーの場の理論の近似は意味がなくなるのですが、string 理論ではこの困難を回避することができます。つまり、open string が端を持てる超平面であるという D-brane の元の描像に移れば良いのです。しかし、明日具体例を与えますが、D-brane を topological defect として扱うことはしばしば有用です。この描像を使って後で具体例を考えます。何故なら、場合によっては、従来の open string が端を持つという描像を用いて D-brane の振る舞いを理解しようとするよりは、D-brane を topological defect として取り扱った方が簡単になるからです。さて、上の例では $k > 2$ となる十分大きな k に対しては余次元は 4 より大きくなり、topological defect は string size まで縮んでしまうので、低エネルギーの場の理論でこれを表現することには意味がなくなります。しかし、これは D-brane なので、場の理論の物質として well defined でなくても問題ありません。一方 $k = 1$ のように k が十分小さい場合は、空間に局在する topological defect という描像には問題点があります。何故なら低エネルギーの場の理論では、空間に局在した配位よりも、transverse 方向に広がった配位の方がエネルギーが低くなるからです。まだ説明していませんが、余次元が 1 である type IIA の D8-brane や、同じく余次元が 1 で \mathbb{Z}_2 charge を持つ type I の non-BPS D8-brane がこの例です。

1.4 K-theory

それでは、topological defect としての D-brane の描像に K 理論がどのように用いられるのかを説明することにしましょう。特に、不安定な brane の系との関係に注目することにします。

安定な Dp -brane と安定な anti Dp -brane が対となった不安定な系では、topological obstruction が全くない場合には、完全に対消滅してしまうと仮定しています。先程 D-brane を topological defect として表したときには、 2^{k-1} 枚の D9-brane と 2^{k-1} 枚の anti D9-brane が対消滅する際の topological obstruction として、核となる Σ_{p+1} に局在する topological defect が存在しました。従って topological defect があるために 2^{k-1} 枚の D9-brane と 2^{k-1} 枚の anti D9-brane の対消滅は不完全で、charge を持った Dp -brane となる core が残ります。しかし、もし topological obstruction がなく、 2^{k-1} 枚の D9-brane の構造と 2^{k-1} 枚の anti D9-brane の構造が全く同じであれば、これらは完全に対消滅すると仮定します。

これを数学的に言い直しましょう。D*p*-brane と anti D*p*-brane が *N* 組ある系を考えます。*N* 枚の D*p*-brane が重なった系を考えた場合、この系は $U(N)$ gauge 対称性に対応して rank *N* の Chan-Paton 束 E の構造を持ちます。同様に *N* 枚の anti D*p*-brane が重なった系を考えた場合も、この系は $U(N)$ gauge 対称性に対応する rank *N* の Chan-Paton 束 F の構造を持ちます。そこで D*p*-D*p* のペアが *N* 組ある系を

$$(E, F), \quad (1.5)$$

のように書くことにしましょう。先程、*N* 枚の D*p*-brane と *N* 枚の anti D*p*-brane の構造が全く同じ場合、この系は完全に対消滅を引き起こして真空になると仮定しました。このことは数学的には、同型な Chan-Paton 束 E, E' を使って

$$(E, E'), \quad E \cong E', \quad (1.6)$$

のように書き表される系は対生成、対消滅によって真空と同一視される、と表現することができます。以下では E と E' が同型なときは (E, E') を (E, E) と書くことにします。そこで、一般に任意の rank の Chan-Paton 束の対 (E_1, F_1) と (E_2, F_2) に対して、適当な枚数の brane の対生成あるいは対消滅によって互いに移り合えるとき、すなわち

$$(E_1, F_1) \oplus (H, H) = (E_2, F_2) \oplus (G, G), \quad (1.7)$$

のように書くことができるとき、 (E_1, F_1) と (E_2, F_2) は同値であるとしします。そしてこの同値関係によって、ある滑らかな多様体 X を底空間とするバンドルの対の空間に同値類を定義することができます。この同値類はアーベル群をなし、これを $K(X)$ と書くことにします。String 理論ではあらゆる滑らかな多様体 X に対して、 \mathbb{Z} 上で定義されたアーベル群 $K(X)$ を対応させることができます。

$$X \longrightarrow K(X)_{(\mathbb{Z})}. \quad (1.8)$$

上記のように定義された $K(X)$ は K 群と呼ばれます。基本的に D*p*-D*p* 系の brane の対生成、対消滅に関する剰余類の分類は、対応する K 群 $K(X)$ によって調べることができます*。

それでは、 K 理論が D-brane の分類とどのように関係づいているかを考えることにしましょう。既に具体例を挙げたように、不安定な系が対消滅する際に topological obstruction があるときは、時空より次元の低い安定な topological defect が存在す

*正確には $K(X)$ の部分群である $\tilde{K}(X)$ によって分類されます。詳細は例えば [3, 6, 7] を参照して下さい。

ることを見ました。これは K 理論では、topological defect の余次元空間 X に対する $K(X)$ に non-zero の要素があることに対応します[†]。以上が D-brane の分類に関して K 理論を用いる理由であり、具体的な計算がほとんどできないにも関わらず、適当な近似の下で K 理論によって低い次元の D-brane 全てをある topological defect として表現できます。

Type IIB に orientifold projection を施すと type I 理論が得られます。type I でも type IIB のときと同様に上の手順を繰り返すことができますが、この場合は N 枚の D9-brane が重なった系は $U(N)$ ではなく $O(N)$ のゲージ対称性を持ちます。また type I には時空全体に広がる 32 枚の D9-brane が存在するので、結局、考えるべき系は $(32+N)$ 枚の D9-brane と N 枚の anti D9-brane が重なった $O(32+N) \times O(N)$ のゲージ群を持つ系で、この系のゲージ対称性は Higgs 機構により

$$O(32 + N) \times O(N) \longrightarrow O(32) \times O(N), \quad (1.9)$$

のように破れます。この系では、orientifold projection のため D9-brane および anti D9-brane が持つ構造は複素バンドルではなく実バンドルであり、topological defect として表される D-brane は実バンドルの対による K 群 $KO(X)$ を用いて分類されます。この分類に使われる $KO(X)$ も以前と同じく \mathbb{Z} 係数のアーベル群です。

さて、数学の文献を見れば、調べたい D-brane の transeverse 空間 X に対する K 群を知ることができ、これを用いて D-brane charge を分類することができます。その結果、type IIB では $K(X)$ は良く知られた D-brane charge の表を再現します。一方 type I では $KO(X)$ は、Bott 周期性として知られている mod 8 の周期性を持ち、いくつかの場所に \mathbb{Z}_2 charge が存在します。これは驚くべき結果です。結局、type IIB と type I の D-brane のスペクトラムは次の表のようになります。

K 理論によると type I の D-brane のスペクトラムには超対称な D9-brane、D5-brane、及び D-string が存在し、さらに \mathbb{Z}_2 charge を持つ D8-brane、D7-brane、D-particle、及び D-instanton が存在することが予想されます。 \mathbb{Z}_2 charge を持つ D-brane は安定な non-BPS 状態であり、topological defect として表現されます。そしてひとたび K 理論によって存在が予想された D-brane は、通常の D-brane と同様に open string の端を持つ状態として構成することができます、特に closed string を吸収、放出する boundary state として表すことができます。しかし、ここで注意しておくべきことがあります。次元の低い D-instanton と D-particle は \mathbb{Z}_2 charge を持つ安定な状態として実際に構成することができますが、D7-brane と D8-brane の構成には問題点があります。何故なら先程 type I の D-brane charge を $KO(X)$ で

[†]余次元空間 X が非コンパクト多様体 \mathbb{R}^n のときは、無限遠点を加えてコンパクト多様体 S^n にします。

	$\widetilde{K}(X)$	$\widetilde{KO}(X)$
D9 ($X = S^0$)	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}
D8 ($X = S^1$)	0	\mathbb{Z}_2
D7 ($X = S^2$)	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2
D6 ($X = S^3$)	0	0
D5 ($X = S^4$)	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}
D4 ($X = S^5$)	0	0
D3 ($X = S^6$)	\mathbb{Z}	0
D2 ($X = S^7$)	0	0
D1 ($X = S^8$)	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}
D0 ($X = S^9$)	0	\mathbb{Z}_2
D(-1) ($X = S^{10}$)	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2

表 5: K 群による D-brane の分類

分類しましたが、これは実は background の 32 枚の D9-brane を無視しており正確ではありません。つまり、K 群 $KO(X)$ は vacuum manifold

$$\frac{O(N) \times O(N)}{O(N)} \quad (1.10)$$

に対するホモトピー群を考えていることと同じなのですが、これは type I のアノマリーを相殺するために必要な background の 32 枚の D9-brane を考慮していません。これを考慮に入れると vacuum manifold は

$$\frac{O(32 + N) \times O(N)}{O(32) \times O(N)} \quad (1.11)$$

のような coset になり、結局この coset に対するホモトピー群によって type I の D-brane charge は分類されることとなります。正しい vacuum manifold に対するホモトピー群を計算すると D8-brane に対応する群は 0 となり、type I の D8-brane は安定な状態ではないこととなります。このように type I の次元の高い D7-brane と D8-brane についての議論は微妙で、上に挙げた D-brane のスペクトラムの表とは一致しません。

1.5 type IIA , $K^{-1}(X)$ and unstable D-branes

以上が flat な時空における type IIB と type I の様子ですが、これを滑らかな多様体でコンパクト化された空間に一般化することは容易です。さて、これらの理

論では時空を埋め尽くす安定な D9-brane が存在しましたが、安定な D9-brane が存在しない type IIA では K 理論による D-brane の分類をどのように考えればよいのでしょうか。安定な D9-brane が存在しない type IIA 理論では、D-brane を D9-D $\bar{9}$ 系における topological defect として表現することはできません。すべての D-brane を topological defect として表現するには時空を一様に埋め尽くす不安定な D9-brane を考える必要があります。今の場合 type IIA の時空を埋め尽くす不安定な D9-brane を調べれば十分ですが、この講義では不安定な D-brane についての一般的な考察もしていくので、しばらく一般の不安定な D-brane について議論することにします。

Type II では前に挙げた表 4 で 0 となっている個所に対応して、R-R charge を持たない不安定な D-brane が存在します。0 はその個所に対応する D-brane が存在しないことを意味するのではなく、R-R charge を持つ安定な D-brane が存在しないことを意味するのです。0 の個所に対応する全ての次元の不安定な D-brane に関して、これらを boundary state を使って表すことができます。良く知られているように、boundary state は open string が D-brane 上に端を持つという性質を用いて構成されます。ではこれらの R-R charge を持たない不安定な D-brane を boundary state によって具体的に書き下すことにしましょう。

Closed string が吸収、放出される時空の超曲面を考えましょう。これは closed string の oscillator modes からつくられる Hilbert 空間におけるコヒーレント状態として実現されます。これが boundary state と呼ばれるものです。まず R-R charge

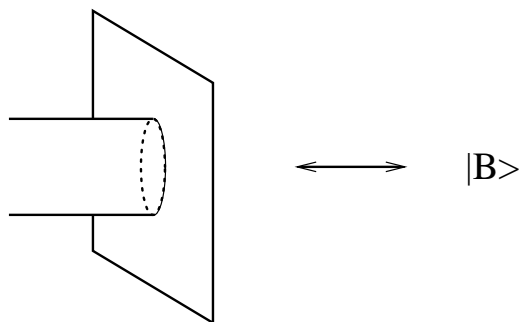


図 6: boundary state

を持つ D p -brane の boundary state について簡単に復習しましょう。R-R charge を持つ D p -brane の boundary state は、closed string の NS-NS セクターから構成される boundary state と R-R セクターから構成される boundary state の和として

$$Dp : |B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|B\rangle_{\text{NSNS}} \pm |B\rangle_{\text{RR}} \right) \quad (1.12)$$

のように書き表されます。もちろん Dp -brane に対応するディリクレ境界条件を満たす R-R セクターの boundary state が存在する場合にこのように書けるのです。R-R セクターの boundary state の前の符号がそのまま Dp -brane が持つ単位 R-R charge の符号に対応します。一方、 Dp -brane に対応する R-R セクターの boundary state が GSO projection によって project out される場合は、 Dp -brane の boundary state は NS-NS セクターだけから

$$Dp : |B\rangle = |B\rangle_{\text{NSNS}} \quad (1.13)$$

のように構成されます。NS-NS セクターのみからなる boundary state で表される Dp -brane を考える場合、それに端を持つ open string からどのようなスペクトラムが得られるのかと思われるかも知れませんが、それを以下で考えていきましょう。

それでは、type IIA において $D9$ -brane が N 枚重なった系を考え、この系の boundary state をみることで、低エネルギーにおける $D9$ -brane の world-volume 上の理論にどのようなスペクトラムが表れるかを調べることにしましょう。 N 枚の $D9$ -brane の world-volume 上の理論に出現する場には、 $D9$ -brane にくっついた open string の励起モードに対応します。そして以下にみるように、open string のスペクトラムは boundary state を調べることで分かります。まず string の摂動論においてシンリンダー図を考えましょう。ここで boundary state $|B\rangle$ は図 8 に対応する

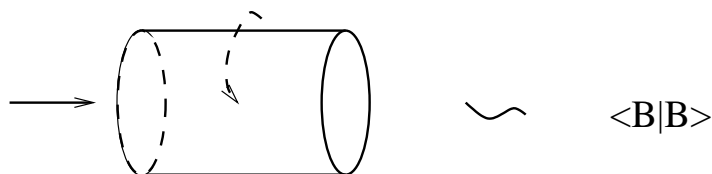


図 7: cylinder 図

$D9$ -brane の系を表すものとします。このシンリンダー図を 2 つの異なるチャンネルで捉えることができます。まず実線の矢印のように眺めると、これは closed string が boundary state から生成されて伝播し、再び boundary state に吸収される図のように捉えることができます。そして文献に載っている公式を用いて具体的に

$$\langle B|B\rangle \quad (1.14)$$

を計算することができます。以上は closed string channel による見方ですが、一方破線の矢印のように眺めると open string channel での loop 図と考えることができます。これらの 2 つの見方は world-sheet の双対性から等価であるはずなので、

$$\int \langle B|B\rangle = \int \text{tr} e^{tH} \quad (1.15)$$

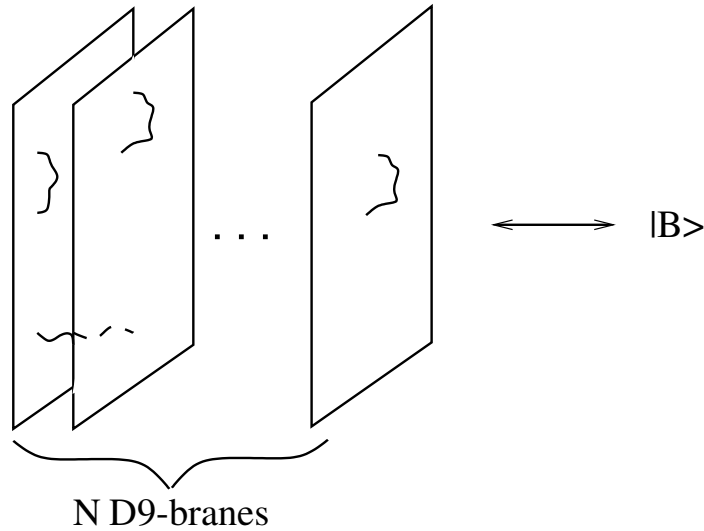


図 8: N 枚の D9-brane

となるはずですが。ここで、積分は cylinder の moduli に関するものであり、右辺のトレースは open string のスペクトラムによる Hilbert 空間全体に関するものです。D9-brane の boundary state は既に分かっているので、式 (1.15) から D9-brane に端を持つ open string のスペクトラムを読み取ることができます。すると D9-brane の boundary state には R-R セクターが存在しないことから、open string のセクターには GSO projection が課されないことが分かります。結局 D9-brane に端を持つ open string のスペクトラムは次のようになります。GSO projection が課されないということは、ゲージ群 $U(N)$ の adjoint 表現に属するゲージ場 A_μ^a の他に、 $U(N)$ の adjoint 表現に属するタキオン場 T^a が存在することを意味します。これが open string 中の質量レベルが最低であるスペクトラムの bosonic part で、言い換えると D9-brane の world-volume 上における有効理論の lowest mode になります。前に触れたようにこれらの D9-brane はもちろん不安定で、D9-brane が一枚だけでも実タキオン場が一つ存在します。Type II 理論の brane anti-brane の系のときと同じ様に、タキオン場の存在は world-volume 理論が不安定であることを意味します。そして world-volume 上における Higgs 機構によって、タキオン場が真空期待値を持ちますが、これは時空で不安定な D9-brane が消滅することを表します。

不安定な brane の系と brane anti-brane の系の議論には類似性があり、実はこれらは相補的な関係にあります。Type II 理論の任意の p における Dp -brane を考えましょう。このとき 2通りの可能性があります。1つは安定な Dp -brane が存在する場合で、 Dp - anti Dp 対の系を考えることで不安定な系を得ることができます。もう一つは不安定な Dp -brane が存在する場合で、単体あるいは複数枚の Dp -brane

を考えることで不安定な系を得ることができます。またこれらの2つの不安定な系は $(-1)^{F_L}$ orbifold によって次のように関係がつくことに注意することには価値があります。

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Type IIA} & & \text{Type IIB} \\
 \text{D}(2p)\text{-D}\overline{\text{D}}(2p) \text{ 系} & \xleftrightarrow{(-1)^{F_L}} & \text{不安定な D}(2p)\text{-brane の系} \\
 \text{不安定な D}(2p+1)\text{-brane の系} & \xleftrightarrow{(-1)^{F_L}} & \text{D}(2p+1)\text{-D}\overline{\text{D}}(2p+1) \text{ 系}
 \end{array}$$

実際 Ashoke Sen は type II 理論の brane anti-brane の系で $(-1)^{F_L}$ の orbifold を考えることによって、不安定な D-brane の系を構成しました。 $(-1)^{F_L}$ で割る操作は type IIA 理論と type IIB 理論を入れ替える操作であることが知られています。そして、type IIB の brane anti-brane の系は $(-1)^{F_L}$ で割る操作によって type IIA 理論の不安定な brane の系に移ります。

以上が R-R charge を持たない不安定な D-brane をどのように定義するかということについての簡単な復習です。これらの brane の存在に関する物理的解釈は後で詳しく議論します。ここでは次元の低い D-brane を、時空を埋め尽くす不安定な D9-brane の系の topological defect として表すことに専念します。つまり、type IIB、type I のときと同様の議論を type IIA の不安定な D9-brane の系で行うことにします。

それでは type IIA 理論における $2N$ 枚の D9-brane の系から始めましょう。D9-brane の world-volume 上の理論で Higgs 機構が起こったとすると、 $U(2N)$ ゲージ対称性が

$$U(2N) \longrightarrow U(N+K) \times U(N-K) \quad (1.16)$$

のように破れます。 K は何かある値を取りますが、ここでは $K=0$ の場合だけを考えます。つまり、タキオン場が正の固有値と負の固有値の数が同じになる

$$T = \begin{pmatrix} T_0 \cdot \mathbf{1}_N & 0 \\ 0 & -T_0 \cdot \mathbf{1}_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1}_N : N \times N \text{ 行列} \quad (1.17)$$

のような真空期待値を持ち、ゲージ対称性が

$$U(2N) \longrightarrow U(N) \times U(N) \quad (1.18)$$

というように破れる場合にのみ着目します。 K が non-zero であるということは F_{10} が non-zero であることを意味し、これは non-zero の cosmological constant を持つ type IIA 理論を考えていることになります [8]。我々は通常の flat な時空における超対称な type IIA 理論に興味があるので、 $K=0$ の場合だけを考えるのです。

このような対称性の破れの際には、type IIB の場合と同じように topological defect を考えることができます。そして topological defect は type IIA string 理論の vacuum manifold \mathcal{V}_{IIA} のホモトピー群によって分類されます。Type IIA の vacuum manifold は coset として

$$\mathcal{V}_{\text{IIA}} = U(2N)/(U(N) \times U(N)) = Gr(N) \quad (1.19)$$

のように与えられます。すなわち \mathcal{V}_{IIA} は有限次元のグラスマン多様体 $Gr(N)$ です。K 理論に詳しい人ならば、これを見ればどうして type IIA と type IIB の間に対称的なパターンが現れるのかが理解できると思います。何故なら $Gr(N)$ のホモトピー群と群多様体 $U(N)$ のホモトピー群は互いに Bott 周期性によって関係づいているからです*。なお K 理論や数学的な解釈においては、どちらの多様体も N が無限大の極限において重要になります。Type IIA の時空を埋め尽くす D9-brane に関する vacuum manifold として $Gr(N)$ が現れましたが、このことから type IIA の topological defect は type IIB の topological defect が存在しない次元に存在するという結果にたどり着くこととなります。 $Gr(N)$ のホモトピー群は、 $U(N)$ のホモトピー群と Bott 周期性によって関係づいているので

$$\pi_n(\mathcal{V}_{\text{IIA}}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n \text{ は偶数} \\ 0 & n \text{ は奇数} \end{cases} \quad (1.20)$$

のようになります。もちろん π_n を調べることによって、topological defect の world-volume に垂直な空間における無限遠である n 次元球面 S^n が、vacuum manifold \mathcal{V}_{IIA} にどのように巻きつくかを調べることができます。偶数次元のホモトピー群が非自明になっているので、topological defect は余次元が奇数次元の場合に存在することが分かります。これは type IIB string 理論のときとちょうど逆になっています。

それではこれから type IIA の topological defect を具体的に構成して行きましょう。Type IIB の場合と同じようにこの構成を実行していくうちに、topological defect を得るために type IIA の不安定な D9-brane を何枚用意すればよいか明らかになります。またタキオン場の配位も具体的に書き下すことができ、この配位は無限遠の球面から vacuum manifold への写像を与え、原点付近に有限なエネルギーの core を持つ topological defect を与えます。

まず $2N$ 枚の D9-brane を考えましょう。そして垂直な空間が $(2k-1)$ 次元であるような topological defect を調べることにします。なぜなら無限遠の球面 S^{2k-2} の次元は、それが vacuum manifold に非自明に巻きつくためには偶数であるべきだからです。余次元空間の座標を x^i ($i = 1, \dots, 2k-1$) のように書くことにし、この空

* $\dots = \pi_{2k+1}(U(2^k)) = \pi_{2k}(U(2^k)/(U(2^{k-1}) \times U(2^{k-1}))) = \pi_{2k-1}(U(2^{k-1})) = \dots$

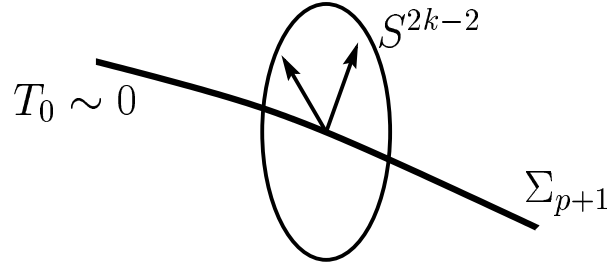


図 9: Type IIA 理論の topological defect

間の回転群 $SO(2k-1)$ に対するガンマ行列を Γ^i で表すことにします。 $SO(2k-1)$ の既約なスピノール表現は一つだけで (これを \mathcal{S} と書く)、これはちょうど type IIA では一種類の D9-brane しかないことに対応しています。ちなみに type IIB の場合には既約なスピノールは2つあり (\mathcal{S}_+ と \mathcal{S}_-)、これに対応して D9-brane と anti D9-brane がありました。それでは \mathcal{S} を $2N$ 枚の D9-brane の系が持つ Chan-Paton 束と考えることにしましょう。これから、余次元が $(2k-1)$ となる topological defect を構成するのに必要な D9-brane の枚数は、 $2N = \dim \mathcal{S} = 2^{k-1}$ であることが分かります。そしてタキオン場の配位は

$$T = f(r) \vec{\Gamma} \cdot \vec{x} \quad (1.21)$$

のように書き表すことができます。 Type IIB の場合と同じ様に、(1.21) 式でタキオン凝縮が表されると仮定すると全てが上手くいきます。 Type IIB ではタキオン場はゲージ対称性 $U(N) \times U(N)$ の $(\square, \bar{\square})$ なる表現に属しており、 \mathcal{S}_+ から \mathcal{S}_- への写像と見なすことができますが、この性質は偶数余次元のガンマ行列を使った (1.21) 式の形によって確かに実現されていました。一方、 type IIA ではタキオン場はゲージ対称性 $U(2N)$ の adjoint 表現に属しており、 Chan-Paton 束 \mathcal{S} から \mathcal{S} への写像と見なすことができますが、この性質は奇数余次元のガンマ行列を使った (1.21) 式によって確かに実現されています。(1.21) 式は type IIA か type IIB かに応じて Chan-Paton 束の写像に関して異なる解釈を与えますが、どちらの場合も対応する余次元を持つ安定な topological defect、すなわち安定な D-brane の存在を表します。

以上が type IIA string 理論における D-brane のスペクトラムの説明です。 Type IIA string 理論に orientifold projection を課すことによって例えば type I' string 理論を得ることができますが、K 群を計算すればどの次元に安定な non-BPS D-brane が存在するかを予測することができます。そこで話を完全にするために、 type IIA の場合には K 理論がどのように関与するのかを考えることにしましょう。

Type IIA の不安定な D9-brane は Witten による conjecture に意味を持たせよ

うとして発見されました。Witten による conjecture とは、type IIA string 理論の D-brane charge は高次の K 群 $K^{-1}(X)$ によって分類される、というものです。コホモロジー理論で様々な高次のコホモロジー群を定義できるように、K 理論でも高次の K 群を定義することができます。特に $K^{-1}(X)$ は、 X に余分な S^1 を加えた時空に関する K 群 $K(X \times S^1)$ ($\supseteq K^{-1}(X)$) によって定義されると思って大体構いません。従って仮に X を 10 次元時空だと思えば、 X の替りに 11 次元の多様体 $X \times S^1$ に移って考えることになりとても興味を引かれます。これはもちろん、type IIA string 理論での余分な S^1 部分は M 理論と関係があることを知っているからです。しかし、これを M 理論の立場から意味のあるものとして捉えることはできません。何故なら、M 理論には時空を埋め尽くす brane anti-brane の系がないからです。

この conjecture を確かなものにしようと思うのであれば、string の立場から $K^{-1}(X)$ に対する意味付けを与えなければなりません。そこで不安定な D9-brane の系を導入して、これらの系の間と同値関係を定義することを考えましょう。D9-brane は 1 種類だけなので D9-brane の系は 1 つの Chan-Paton 束 E で表されますが、この系はさらにタキオン場 T によっても特徴づけられます。従って D9-brane の系を (E, T) と書くことにします。これらの対 (E, T) の間に適当な同値関係を定義すると、 X を $X \times S^1$ に拡張することなく、この同値類が結局 $K^{-1}(X)$ であることを数学的に示すことができます [6]。

以上が type IIA 理論の K 理論による描像です。また orientifold projection を課した様々なモデルについても対応する K 群を調べることができ、それらのモデルにどのような種類の安定な D-brane が存在するかを知ることができます。そしてどの場合でも帰納的に、安定な non-BPS D-brane を表す boundary state を構成することができます。このように、D-brane が存在可能なときには必ず対応する K 群が非自明な値を取る、という首尾一貫した描像を得ることができます。現れる K 群は通常の K 群であったり、高次の K 群であったり、実 K 群であったりと様々です。

明日、不安定な D-brane の物理的解釈を与えますが、その準備としてここで不安定な D-brane についてももう少し説明しておきたいと思います。安定な D-brane と同様に、不安定な D-brane を表現するのにも二通りの方法があります。既に見たように、R-R charge を持たない不安定な D-brane は open string が端を持つ超曲面として実現されます。そして次に説明するように、不安定な brane の系における topological defect として解釈することもできます。

Type IIB string 理論では余次元が偶数のところに安定な D-brane が存在しました。もし余次元が奇数のところを考えると、タキオン場による余次元空間の無限

遠から理論の vacuum manifold への写像は、自明な場合しかありません。つまり、余次元空間の回転群に対するガンマ行列を用いて (1.21) 式のようなタキオン場の配位をとることはできますが、これは自明な写像になります。しかし、この配位は core に沿って有限なエネルギー密度を持つので、余次元が奇数である type IIB の不安定な D-brane を表していると考えることができます。Type IIA string 理論の場合も同様です。余次元が偶数のところを考えると、余次元空間の回転群に対するガンマ行列を用いて構成した (1.21) 式のようなタキオン場の配位は、余次元空間の無限遠から理論の vacuum manifold への自明な写像になります。しかしこの配位は core に沿って有限なエネルギー密度を持つので、余次元が偶数である type IIA の不安定な D-brane を表していると考えることができます。これらのタキオン場の配位は考えている理論における不安定な配位であり、R-R charge を持たない不安定な D-brane を topological defect として表しています。

以上により type II の安定な D-brane と同様に、type II の不安定な D-brane に対しても二つの異なる見方を得ることができました。以下これらの相補的な捉え方を用いることで、string 理論における false vacuum decay および配位空間の複雑な構造等を理解することができます。

[質問] タキオンポテンシャルに下限はありますか？

[回答] A.Sen による間接的な議論があって、それによると適当なコンパクト化の下では string の摂動論を使うことができ、タキオンポテンシャルは安定な下限を持つことが分かります。これは open string から生じるタキオンで、closed string から生じるタキオンよりは扱い易いのです。例えば bosonic string 理論の closed string のタキオンポテンシャルは下限を持つのかそれとも不安定なのか良く分かりません。ここでは Higgs 機構のようにタキオンがポテンシャルの下限に落ちることが、brane と anti brane の対消滅を表すものと仮定しています。

2 2日目

2.1 branes in different dimensions

type IIA と type IIB の D-brane は以下のテーブルのようにまとめることができます。

この表を見ると、安定な D-brane と不安定な D-brane が交互に現れることが分かります。特に type IIA 理論では、低い次元の D-brane は D9-brane 上でタキオン

	IIA		IIB
D9	unstable	\leftrightarrow	stable
D8	stable	\leftrightarrow	unstable
D7	unstable	\leftrightarrow	stable
	\vdots		\vdots
D0	stable	\leftrightarrow	unstable
D(-1)	neg. mode: yes	\leftrightarrow	neg. mode: no
D(-2)	?	\leftrightarrow	-

表 6: D-branes in type II string theory.

場 T が

$$T = \Gamma \cdot x \quad (2.1)$$

のような配位をとる topological defect として表現できます。それではこれからこの表の中で一番次元の低い D-brane に注目しましょう。これを考える理由を少しお話します。まず前に述べたように type IIA には R-R 10-form field strength F_{10} があり、これが non-zero のときには cosmological constant がある理論、あるいは massive IIA 理論になります。この F_{10} に dual な 0-form field strength F_0 と couple する物が上の表の一番次元の低い D-brane に対応すると考えられますが、これは何なのでしょう？これを D(-2)-brane と呼ぶことにして、これから調べていくことにしましょう。

もうひとつ興味を引かれる事は、type IIA と type IIB における D-instanton です。これらは Euclid 化した時空の D-brane なので、安定か不安定かを議論することには意味が無いのですが、negative mode を持つかどうかには意味があります。Type IIB の D-instanton は良く知られているように、negative mode を持っていません。一方 type IIA の D-instanton は D9-brane と同じように boundary state を使って表現できます。D9-brane にはタキオンが存在し、これが不安定性を意味していましたが、これと同じように D-instanton にも tachyonic mode があり、これは string 理論の運動方程式の解のまわりに negative mode があることを意味しています。言い換えると、type IIA の D-instanton は Euclid 化した supergravity の古典解で negative mode を 1 つ持つものです。これはどのような物理的役割を果たすのでしょうか？この D-instanton は、boundary state によって表される string 理論の妥当な解なので、何か物理的解釈があるはずで

2.2 digression : false vacuum decay in field theory

これが何故面白い問題であるのかを見るために、ちょっと脱線して、場の理論における false vacuum decay の話をしましょう。次のように false vacuum があるようなポテンシャルを持った量子力学系を考えましょう。

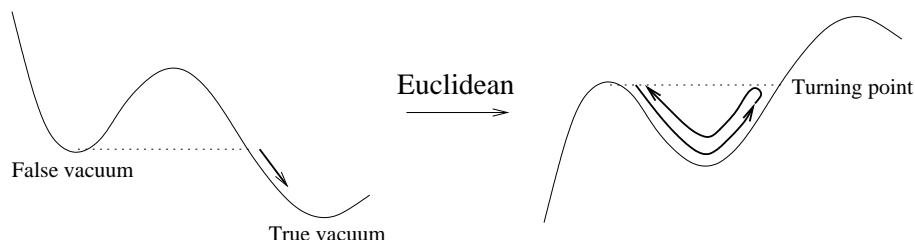


図 10: 左は Minkowski 空間での potential の図で、右はそれを Euclid 化した図。

まず、はじめに系が false vacuum にあったとしましょう。別に true vacuum、あるいは minimum がなくてどこまでも落ちていくようなところがあると、この系は不安定な系であることが期待されます。まず、トンネル効果でポテンシャルの障壁を超えて、そこから true vacuum に落ちるか、あるいは run away していきます。この過程は場の理論では経路積分を準古典的に評価することによって取り扱うことができます。この方法は、Coleman ら [9] によって確立され、また他の人々 [10, 11] によって重力を含む系に応用されました。

では、この false vacuum decay の過程を Euclidean 経路積分で評価する方法を少し詳しくみていきましょう。Euclidean ではポテンシャルの形が逆さまになります。このとき、経路積分で主に寄与するような場の配位は、ある種の instanton 解です。これは Euclid 化した運動方程式の解で、bounce と呼ばれています。bounce は次の図のように、まず Euclidean time $t = -\infty$ に false vacuum にいて、そこから逆さにしたポテンシャルを転がり落ち、 $t = 0$ で転回点で折り返して、 $t = \infty$ で再び元の点に戻るような解です。この bounce 解は negative mode を一つ持ちます。この negative mode は経路積分に本質的に寄与し、これが false vacuum からの崩壊確率を与えると解釈されます。

$$\Gamma/V = A e^{-B/\hbar} (1 + \mathcal{O}(\hbar)) \quad (2.2)$$

negative eigen value は Gauss 積分を通して determinant の形で A に入っています。 B は作用に古典解を代入したものです。この式の右辺は false vacuum の単位体積当たりの崩壊確率を表すこととなります。またバウンス解が分かれば、崩壊確率だけでなく tunnelling の後の準古典的な時間発展についても調べることができま

す。バウンス解で tunnelling が生じ $t = 0$ の転回点まで達すると、そこからは元の Lorentzian signature における運動方程式に従って時間発展していくことになります。

これからの議論に関連のある興味深い例として、5次元 Kaluza-Klein 理論が挙げられます。fermion のない5次元重力理論を S^1 でコンパクト化した系は false vacuum decay を起こす不安定な系であることが、Witten によって示されました [11]。ここで興味深い点が2つあります。1点目は、この理論の経路積分に主に寄与するバウンス解があることです。このバウンス解は5次元の Euclidean Schwarzschild black hole 解になっています。この解ではある方向が無遠慮で漸近的に S^1 になります。この S^1 の半径は Kaluza-Klein の S^1 の半径と同一視されます。Euclidean Schwarzschild black hole 解は葉巻のような形で、 $\mathbb{R}^2 \times S^3$ の topology を持っています。この Euclidean Schwarzschild black hole 解はバウンス解であり、真空が不安定であることを示唆しています。この事実は80年代初期に知られていましたが、最近の string 理論のコンパクト化の際にはあまり重視されていないような気がします。この点にはまた後で触れることにします。2点目は、この Euclidean Schwarzschild black hole 解の転回点から Wick rotation をして、どのようにして false vacuum decay を起こすのかを調べることができる点です。この転回点は、Euclidean Schwarzschild black hole 解で、Euclidean time t を反転する \mathbb{Z}_2 で固定される点になっています。この転回点で、Wick rotation して Lorentzian signature に戻ると、4次元時空に穴が生成されることが分かります。この穴は4次元で見ると時空の境界になっているのですが、この境界付近を5次元でみるといたるところでなめらかになっています。この穴は一定の確率で生成され、そしてすぐに光速に近いスピードで広がっていきます。これは非常に劇的な効果です。false vacuum decay が起こって通常の時空になるのではなく、時空が完全に消滅してしまうわけです。

2.3 type IIA D-instanton is not a bounce for susy vacuum

ところで、type IIA には D-instanton がありましたが、これは D-instanton に端を持つ open string から生じるタキオンに対応した negative mode を一つ持っています。では、type IIA の超対称な真空は5次元 Kaluza Klein 理論のときと同じように、崩壊してしまうのでしょうか？もし、この D-instanton がバウンス解であると解釈できたとすると、先に見たように、type IIA 理論は false vacuum decay を起こすことになるはずですが。

では type IIA の D-instanton がバウンス解であるかどうかについて調べてみま

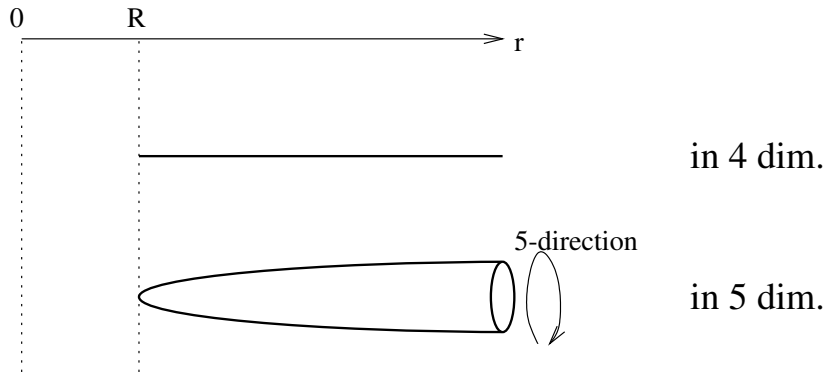


図 11: Euclidean Schwarzschild black hole 解を転回点で Wick rotation した後の geometry。4 次元時空中における 3 次元空間の動径方向を r とした。

しょう。もしバウンス解であれば、これは string phenomenology の分野には夢のある話となるでしょう。何故なら、type IIA のコンパクト化されていない flat な 10 次元時空は false vacuum decay が生じる不安定な状態で、先程議論した Kaluza-Klein 理論の場合と同様の結果になると考えられるからです。さらに、duality によって type IIA の真空は他の超弦理論の真空に移ることができるので、これらも false vacuum decay が生じる不安定な真空であると思われます。これは我々の時空が超対称な真空にあるのではなく、実際は弦理論の超対称でない安定な真空にあるのだという、興味深いシナリオを与えてくれます。しかしこの結論に飛びつく前に、type IIA の D-instanton が果たしてバウンス解であるかどうかをきちんと調べなければいけません。これから見ていくように、実際はバウンス解ではないことが判明します。従って type IIA の超対称な真空は安定であると言えます。しかしこれからの解析は、type IIA の D-instanton や他の不安定な D-brane の物理的解釈を再考するという点で意味があります。

次のような方針で考えていきます。まず、type IIA の D-instanton が false vacuum decay を引き起こすバウンス解であるための条件を満足しているかどうかを調べてみます。もし、その性質を満たしていなければ、また別の物理的解釈を考えることにしましょう。バウンスには次に挙げるようないくつかの性質があります。まず、バウンスは無限遠で漸近的に false vacuum になっています。ここで無限遠というのは、時空の全ての方向に関して無限遠方ということで、時間が $\pm\infty$ で空間的にも無限遠方を考えています。次に、バウンスは \mathbb{Z}_2 対称性を持っていて、その固定点は転回点を表しており、Euclid 時空中で余次元が 1 の超平面をなしています。False vacuum が tunneling の後でどうなるかを知るには、バウンス解を Wick rotation する必要があります。もし、バウンス解が well-defined な Lorentzian

signature の解につながれば、この解を使ってどのように真空が崩壊していくのかを具体的に見ることができます。

D-instanton がこれらの条件を満たしているのかをチェックするのに、以下のような D-brane の 2 つの記述を用います。これらの 2 つの記述は相補的で、どちらもこれからの解析では大変重要になります。まず 1 つ目は、boundary state による記述です。これは string が D-brane に端を持つという従来の見方です。2 つ目は、topological defect による記述です。Dp-brane の world-volume Σ_{p+1} は不安定な Dq-brane の world-volume Σ_{q+1} に埋め込まれた topological defect として表されます。ここで、 q は p よりも大きく、全時空の次元よりも小さい数です。

以前は全空間の中の topological defect として任意の次元の D-brane を考えましたが、ここでは少し異なる見方をします。つまり、 p を固定して置いて様々な値の q を考えます。Dp-brane を、type II のコンパクト化されていない時空における、BPS な D-brane としましょう。もし余次元 $(q - p)$ が偶数であれば、安定な Dq-brane と anti Dq-brane があります。Dp-brane はこの Dq-brane と anti Dq-brane のペアを $2^{\frac{q-p}{2}-2}$ 組重ねた不安定な系の topological defect として表すことができます。もし余次元 $(q - p)$ が奇数であれば、安定な Dq-brane は存在せず、Dq-brane は不安定です。この不安定な Dq-brane を $2^{\frac{q-p-1}{2}}$ 枚集めた系では、topological defect に対応するタキオン場の配位を余次元空間の回転群に対するガンマ行列 Γ を使って

$$T = f(r)\Gamma \cdot x \quad (2.3)$$

のように書き下すことができ、これが Dp-brane を表します。Dp-brane が不安定な場合にも同じ議論が当てはまります。余次元 $q - p$ が偶数のときは、 $2^{\frac{q-p}{2}-2}$ 枚の不安定な Dq-brane の系の topological defect として Dp-brane を表すことができ、余次元が奇数の場合は、 $2^{\frac{q-p-1}{2}}$ 組の安定な Dq-brane と anti Dq-brane のペアの系の topological defect として Dp-brane を表すことができます。以上が D-brane の topological defect としての描像です。

これらとは別に、D-brane の記述として、supergravity の古典解によるものがあります。原理的には、安定な D-brane も不安定な D-brane も supergravity の運動方程式の解として表すことができるはずですが、それでは、type IIA の D-instanton を supergravity の近似で考えてみましょう。Type IIA の D-instanton と同じ対称性を持つ古典解を探します。まず、D-instanton は 10 次元 Euclid 空間の点状の物体なので、10 次元の回転対称性 $SO(10)$ があります。この対称性のから、励起される場は metric と dilaton であることが分かります。scalar field strength F_0 が励起されるかどうかは問題になりますが、これが non-zero であると、宇宙項が non-zero になってしまうので、漸近的に flat な type IIA の真空になりません。従って、 $F_0 = 0$ であり、metric と dilaton だけが励起されることになります。この系は 11 次元 supergravity

に持ち上げて考えるのが便利です。10次元の dilaton は 11次元 metric の (11,11) 成分 $g_{11,11}$ として解釈されます。10次元で metric と dilaton しか励起されないということは、11次元では metric しか励起されないということを意味します。従って、type IIA の D-instanton に対応する古典解に要求される対称性は、10次元の回転対称性と 11次元方向の並進対称性です。この対称性を満たす Einstein 方程式の真空解を探すこととなります。Birkhoff の定理によると、D-instanton の core の外側では、この対称性を持つ解は Euclidean Schwarzschild black hole 解

$$ds^2 = \left(1 - \frac{M}{r^8}\right) (dx^{11})^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{M}{r^8}} + r^2 d\Omega_9^2 \quad (2.4)$$

だけであることが示されます。

以前に議論したように、Euclidean Schwarzschild black hole 解が、Kaluza Klein 理論の不安定性を導いたことを思い出すと、これは大変興味深い結論です。5次元 Kaluza Klein 理論の時には false vacuum decay を起こして時空が消滅するという現象が起りましたが、同じようなことが string 理論でも起こるのでしょうか？

上の形の解は type IIA の supergravity 近似における D-instanton を与えると考えられますが、これと以前用いた smooth な本当の Euclidean Schwarzschild black hole 解と比較してみましょう。D-instanton の解は、instanton の core の外側では確かに Euclidean Schwarzschild black hole 解と同じ形をしています。core の付近の様子は以下に述べる理由で Euclidean Schwarzschild black hole 解とは異なります。

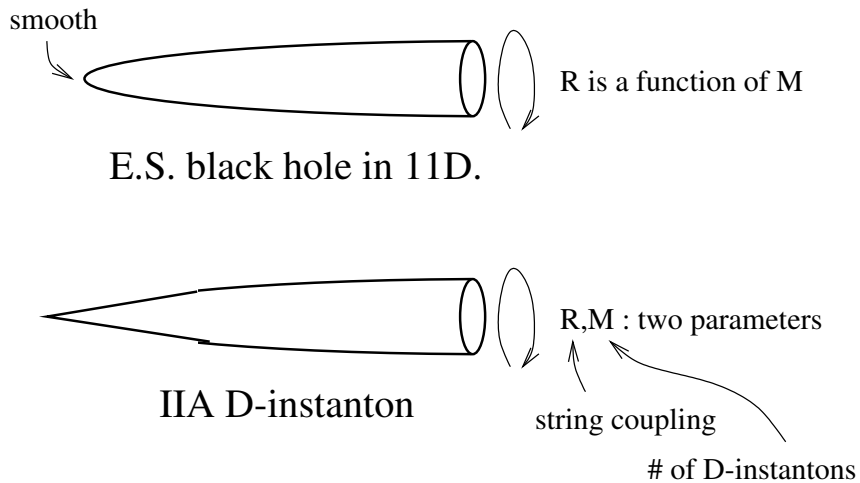


図 12: Euclidean Schwarzschild black hole 解と D-instanton 解。

まず Euclidean Schwarzschild black hole 解を見ると、これは “質量” M の 1 パラメータしか持っていません。もう 1 つのパラメータである 11次元方向の半径 R は、

Euclidean horizon 付近が滑らかなになるという条件から、 M の関数として表されます。そしてこの多様体は滑らかなので、spin structure は一意的に決まり、fermion を無限遠方で 11 次元方向に 1 周させると、これは反周期的であることが分かります。従って経路積分に寄与するのは反周期的な fermion であり、これは supersymmetry が破れていることを意味します。一方、D-instanton は supersymmetric な type IIA の真空における励起なので、無限遠方では漸近的に supersymmetric な真空になるはずですが、従って fermion を 11 次元方向に 1 周させたときには周期的でなければなりません。これは、type IIA の D-instanton に対応する解は horizon のところで決して滑らかなにはならず、特異的であることを意味します。これによって、D-instanton 解にはパラメータが 2 つ存在することになります。つまり、horizon のところで滑らかであるという条件が無くなるので、半径 R は M と無関係に任意の値をとることができます。この 2 つのパラメータには次のような物理的解釈があります。 R は M 理論の 11 次元方向のコンパクト化の半径で、これは type IIA の string coupling constant と関係づいています。そして M は supergravity では連続的なパラメータですが、string 理論の立場ではこれは D-instanton の数と解釈されるので、離散的な値をとります。このことのために、supergravity の近似は残念ながらあまり役に立たず、type IIA の D-instanton の解のまわりの negative mode の数を正しく数えることはできません。何故かという、特異点があるために波動関数をどのように規格化すれば良いかが分からないからです。一方、Euclidean Schwarzschild black hole 解の時には、negative mode がただ一つ存在することが示せます。そして、無限遠方での fermion の境界条件が反周期的であるようなセクターの経路積分を考えると、Euclidean Schwarzschild black hole は false vacuum decay を引き起こすこととなります。

D-instanton の negative mode の数を数えるには、D-instanton を open string が端を持つ通常の D-brane の描像で考えなければなりません。そうして考えると N 個の D-instanton が重なった系には N^2 個の negative mode が存在することが分かります。これらの negative mode は、 $U(N)$ ゲージ対称性の adjoint 表現に属する open string のタキオンに対応します。どのような理論においても、バウンス解は negative mode を一つだけ持ちます。従ってバウンス解となり得るのは $N = 1$ の D-instanton 解です。 $N > 1$ の D-instanton 解は negative mode の数が多すぎるので、バウンス解にはなりません。よって以下で考えるのは $N = 1$ の場合ですが、この場合は N が小さすぎて supergravity 近似は良くありません。そもそも不安定な D-brane を考えていることから、supergravity の古典解が有効でないことは予想されます。従って open string が端を持つ通常の D-brane の描像に戻ることにしてしまおう。その前にもう一度強調しておきますが、Euclidean Schwarzschild black

hole 解は type IIA の supersymmetric な真空の崩壊を導くバウンス解ではありませんが、supersymmetry を破るようにコンパクト化された M 理論や string 理論では、false vacuum decay を引き起こすバウンス解になり得ます。例えば、supersymmetry を破るような反周期的 spin structure を与えた S^1 でコンパクト化した M 理論などが考えられます。これは現在 Harvey と Kraus と研究中のテーマです。

さて、これまで D-instanton の supergravity による記述を考えてきましたが、これはあまりうまくいかないことが分かりました。そこで、type IIA の D-instanton を従来の不安定な D-brane として記述することを考えましょう。この type IIA D-instanton はバウンス解に要求される \mathbb{Z}_2 対称性を持っています。つまり、10 次元 Euclidean 時空の原点に局在した D-instanton を考えると、この配位には 10 個の Euclidean 座標 x^1, \dots, x^{10} のうちのひとつ x^{10} を反転する

$$P : x^{10} \rightarrow -x^{10} \quad (2.5)$$

という対称性があります。その理由を言うと、まず、この反転対称性は world-sheet parity 変換を組み合わせてゲージ化できることを知っているの、type IIA string 理論の対称性です。また、D-instanton はこの反転対称性のもとで、符号を変えるような量子数を持っていません。このことから、D-instanton がこの反転対称性のもとで不変であることが期待されます。D-instanton が反転対称性のもとで不変であることから、 $x^{10} = 0$ の 9 次元の超平面における配位がバウンス解の転回点に対応すると解釈されます。この転回点における配位が物理的に何を表しているのかを解析してみましょう。D-brane の boundary state による記述を用いて直接それを解析することはとても困難なことです。そこで、D-instanton を topological defect として記述する方法を用いてみましょう。D-instanton を記述するには 32 枚の D9-brane がある系を考えることになります。D-instanton は topological defect と言っても topological に不安定なのですが、原点にある non-zero のエネルギー密度を持った配位になります。この配位はこれまで何度も出てきたお馴染みの式

$$T = \Gamma_i x^i \quad (2.6)$$

で表されます。ここで Γ_i は 10 次元 Euclid 空間の回転群のガンマ行列で、 x^i ($i = 1, \dots, 10$) は 10 次元 Euclid 空間の座標です。 $x^{10} = 0$ の超平面におけるバウンスの物理的解釈を与えるために、10 次元の座標を 9 次元空間の座標 \vec{x} と Euclidean time x^{10} に分解します。そして $SO(10)$ のガンマ行列を同様に分解します。するとガンマ行列の適当な表示の下で、 T の配位は

$$T = \begin{pmatrix} x^{10} \cdot \mathbf{1}_{16} & \vec{\Gamma} \cdot \vec{x} \\ \vec{\Gamma}^T \cdot \vec{x} & -x^{10} \cdot \mathbf{1}_{16} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

のように表わされます。それではこの行列の物理的解釈を考えてみましょう。まず非対角成分を無視して対角成分だけに着目しましょう。これは 32 枚の D9-brane のうち 16 枚の D9-brane に対しては $x^{10} \cdot \mathbf{1}_{16}$ となる kink 解の配位を取り、残りの 16 枚の D9-brane に対しては $-x^{10} \cdot \mathbf{1}_{16}$ となる anti-kink 解の配位を取ることを意味します。既に説明したように、それぞれの kink 解、anti-kink 解は安定な D8-brane、anti D8-brane を表すので、対角成分は 16 枚の D8-brane と 16 枚の anti D8-brane の対を表します。従って式 (2.7) は、まず D8-D $\bar{8}$ のペアを 16 組構成し、これらの world-volume 上に非対角成分の配位 $\vec{\Gamma} \cdot \vec{x}$ を与えることで、type IIA D-instanton が構成されることを表します。これが一つの解釈です。このタキオン場の分解は、D-instanton を (2.6) のように 32 枚の D9-brane から一気に構成する代わりに、2 段階に分けて、まず D8-D $\bar{8}$ のペアを 16 組構成し次にそれらの bound state として D-instanton を構成することを意味します。しかしこれとは別の表現

$$T = \begin{pmatrix} \vec{\Gamma} \cdot \vec{x} & x^{10} \cdot \mathbf{1}_{16} \\ x^{10} \cdot \mathbf{1}_{16} & -\vec{\Gamma}^T \cdot \vec{x} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

の方が以下の話ではもっと便利です。この表現でも、D-instanton を 2 段階で構成していると解釈することができます。まず、対角成分に注目すると、32 枚の D9-brane のうち 16 枚の D9-brane から D0-brane を構成し、残りの 16 枚の D9-brane から anti D0-brane を構成していると解釈できます。そして、D-instanton はこうして得た D0-D $\bar{0}$ 系の bound state として表されます。

さて、転回点 $x^{10} = 0$ における配位を考えてみましょう。(2.8) 式で、 $x^{10} = 0$ とおくと、非対角成分が zero になります。この配位は D0-D $\bar{0}$ 系を表しています。こうした解釈を boundary state を用いて得るにはどうすれば良いのか私には分かりません。D-brane を boundary state ではなく、topological defect として表すことにしたのはこのためです。これは、D-brane の 2 つの記述を相補的に用いることによって物理的な理解を深めることができるという例になっています。ここでは、type IIA string 理論の D-instanton は反転対称性を持ち、その転回点の配位は D0-D $\bar{0}$ 系を表すということを示すことができました。

このような見方をすると、D-instanton のバウンスとしての解釈が不適當であるということが示唆されます。やや微妙な議論ですが、その理由は次の通りです。もう一度、supergravity 近似の話に戻って、 N 個の type IIA D-instanton の core から十分離れたところにおける幾何を表す Euclidean Schwarzschild black hole 解を考えてみましょう。

$$ds^2 = \left(1 - \frac{M}{r^8}\right) (dx^{11})^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{M}{r^8}} + r^2 d\Omega_9^2 \quad (2.9)$$

この計量の係数の無限遠方での振る舞いに注目します。この計量もやはり反転対称性を持っており、転回点を定義することができます。この転回点における計量の振る舞いを調べると、計量の係数が無限遠方で十分早く 1 に近づくために、ADM mass が zero であることが分かります。もし false vacuum decay を引き起こすバウンス解を表すと考えたいのであれば、これは重要です。false vacuum decay を起こす解の転回点でのエネルギーは zero なので、ADM mass は zero にならなければいけません。supergravity 近似での解はこの ADM mass の性質を備えており、バウンス解を表すことができると思われます。しかし、type IIA string 理論で D-instanton が 1 個の場合には特異点があるばかりでなく、 M が小さいので supergravity の近似も良くないことが分かりました。従って supergravity による議論は信頼できません。Type IIA string 理論における D-instanton は転回点で $D0-D\bar{0}$ ペアになると解釈でき、この ADM mass が zero であると仮定すると、明らかに正エネルギー定理に反します。ただし正エネルギー定理の証明が superstring 理論や supersymmetry のある理論に拡張できるかどうかは良く分かりませんが、これらの理論でも正エネルギー定理が有効であると考えています。ここで得た D-instanton の $x^{10} = 0$ での配位は原点に局在した $D0-D\bar{0}$ ペアだと考えられ、これは non-zero の質量を与えるとされます。従って type IIA の D-instanton は false vacuum decay を引き起こすバウンスではないでしょう。

私は以上の議論だけではこの結論の十分な証明にはなっていないと思います。そこで type IIA D-instanton がバウンスにならないと思われる別の理由を与えましょう。それは、D-instanton のような不安定な D-brane に対しては完全に異なる物理的解釈を与えられる、ということから結論されます。私は同じ物に対してこのような異なる 2 つの解釈が与えられるとは思いません。そこで type IIA D-instanton に対してバウンスとは異なる満足のいく物理的解釈を見出すことができれば、これが type IIA string 理論の超対称な真空は false vacuum decay を起こさないことを支持すると思われます。

2.4 digression2 : sphalerons in field theory

string 理論における不安定な D-brane、特に type IIA string 理論における D-instanton の役割を調べるために、もう一度、場の理論に立ち戻ってみましょう。83 年に、場の理論における興味深い静的な古典解の存在が指摘されました。そして、この解が物理的に大変面白い役割を果たすことが分かりました。実際、この解は標準模型の枠内で最初に発見されました。この配位は sphaleron と呼ばれています [12, 13, 14]。Sphaleron は 1 つの negative mode を持つ静的な古典解です。

Sphaleron の存在は、理論の配位空間における可縮でないループの存在によって保証されています。例として $SU(2)$ ゲージ理論に doublet Higgs が一つあるような模型が考えられます。Sphaleron はこの模型において Manton によって初めて発見されました。

考えている理論の配位空間の中で、真空から真空に至る可縮でないループが見つかったとします。つまり、配位空間の基本群の非自明な元に対応するループです。このとき、配位空間のコンパクト性を仮定すると、エネルギーが non-zero である静的な運動方程式の解が必ず存在することを示すことができます。従って、配位空間の中の可縮でないループがあると、真空以外の運動方程式の解が必ず存在すると言えます。

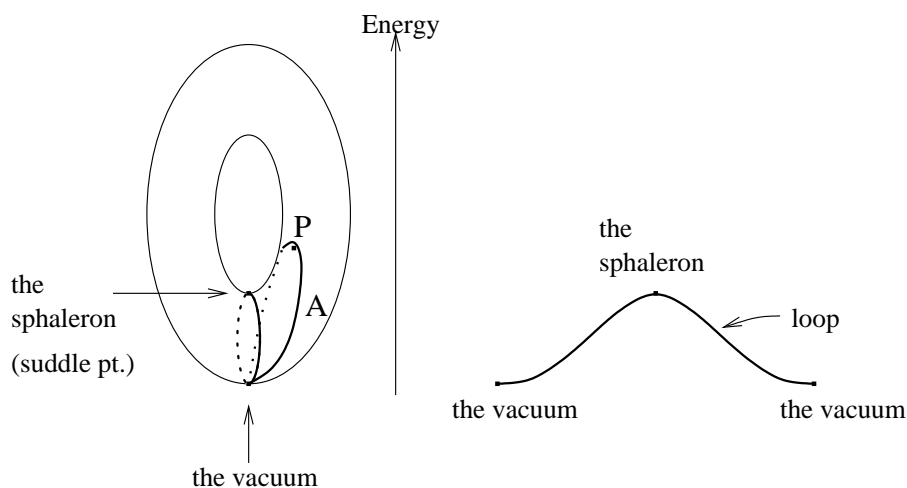


図 13: 配位空間における可縮でないループ。

直感的に説明しましょう。図 13 のように、配位空間がコンパクトであるとして、可縮でないループの代表元として例えばループ A を取り、点 P でのエネルギーを求めます。この操作を連続変形で移れる様々なループについて行います。ループをずらすとその配位に対するエネルギーが変わりますが、鞍点の存在は保証されることになります。鞍点の配位は運動方程式の解であり、これが sphaleron 解と呼ばれるものです。そしてこの解のまわりには 1 つだけ negative mode があり、これはループに沿って真空の方へ落ちる方向の変分に対応します。このように可縮でないループがあると sphaleron 解があり、さらにこの解には negative mode が 1 つ存在することが分かります。物理的には sphaleron 解は、ループに沿って真空から真空へ配位を動かしたときのポテンシャル障壁の頂上にいる解だと考えることができます。

場の理論における sphaleron についてももう少し説明をしましょう。既に触れた

ように Manton によるオリジナルな例は標準模型のような、doublet Higgs を持つ $SU(2)$ ゲージ理論で、この模型には sphaleron があります。上のようにして得られる sphaleron 解はもちろん、磁荷などの charge を持っていない真空のセクターにおける解であるということを補足しておきます。Manton によって発見された sphaleron 解は topological defect と結びついています。理論の真空のセクターにおける可縮でないループの存在は、vacuum manifold の 3 次のホモトピー群が非自明であるかどうかによって決まります。その理由を説明しましょう。3 次元空間の座標を \vec{x} とし、この 3 次元空間における場の配位空間を t ($-\infty < t < \infty$) で座標付けされるループに沿って移動することを考えます。そうすると、このループは 4 次元空間 (\vec{x}, t) における場の配位を表すこととなります。配位空間におけるループが可縮でないことはこの 4 次元空間における場の配位が topological に安定であることと関係があります。つまり、配位空間に可縮でないループが存在するためには、無限遠の S^3 における Higgs 場の配位が vacuum manifold に非自明に巻きついている必要があります。実際、先の $SU(2)$ ゲージ理論では、vacuum manifold は S^3 であり、 $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$ であるので、無限遠の S^3 が vacuum manifold の S^3 に非自明に巻きつくことができます。従って、 $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$ の生成元が配位空間の非自明なループを一周することに対応します。この 4 次元空間 (\vec{x}, t) における非自明な配位は、 t を固定して 3 次元空間上の配位とみなすと、磁荷などを持たない topological に自明な配位であることが分かります。こうした見方をすると、 $t = -\infty$ では真空の配位をとり、 $t = 0$ では sphaleron の配位であり、ループを一周して $t = \infty$ に達すると、再び真空になります。従って、4 次元空間におけるこの配位は $t = \pm\infty$ で漸近的に真空になるような配位で、 $t = 0$ の断面における配位が sphaleron 解になります。場の理論における sphaleron の議論は以上です。

2.5 unstable D-branes as D-sphalerons

それでは string 理論の不安定な D-brane について再び考えていくことにしましょう。これらは全て D-sphaleron として解釈できるということをこれから説明したいと思います。String 理論において、場の理論の sphaleron と最も類似しているものは type IIB の D0-brane です。そこでまず type IIB の D0-brane を考えることにしましょう。これは既に何度も説明したように、不安定な D-brane です。そして、type IIB の不安定な D-brane は $D9-D\bar{9}$ 系の world-volume 上で安定でない topological defect として表されることもみました。不安定な D0-brane は、 $D9-D\bar{9}$ のペアを 16 組用意した系の world-volume 上で、topological に不安定なタキオン

場の配位を

$$T = \Gamma \cdot x, \quad x^\mu = x^1, \dots, x^9 \quad (2.10)$$

のようにおくことによって表されます。 $\pi_8(U(16)) = 0$ なので、これは topological に自明な配位です。従って無限遠におけるこの配位はゲージ変換によってほどけます。しかしこの配位は、D0-brane の world-line に沿って局在する有限なエネルギーを持っています。D0-brane に両端を持つ open string のスペクトラムを調べると、この中には確かにタキオンがあります。そして N 個の D0-brane が重なった系には $U(N)$ の adjoint 表現に属するタキオン場があります。ちなみに、この系に orientifold projection を課して type I にすると、 $N = 1$ の場合はタキオンが取り除かれ、 \mathbb{Z}_2 charge を持つ安定な non-BPS D0-brane が得られます。

さて、Type IIB string 理論の配位空間に次のようにループを構成することができ、D0-brane の配位は sphaleron であることを示しましょう。場の理論のときと同じように、D0-brane の world-line に垂直な空間の座標 \vec{x} に Euclidean time t を加えて、10次元の Euclid 空間 $\vec{y} = (\vec{x}, t)$ とします。そして、この10次元空間での配位を

$$T = \Gamma \cdot y \quad (2.11)$$

のように与えます。ここで Γ は10次元空間の回転群に対するガンマ行列です。新たに加えたパラメータ t は string 理論における時間座標ではないことに注意してください。 \vec{x} で座標付けされる9次元空間における配位が時間一定面における配位を表わし、 t は単にそうした配位の1パラメータセットを特徴付けるパラメータです。それでも、タキオン場の配位を10次元のガンマ行列を用いて(2.11)のように書くことができます。 $\pi_9(\mathcal{V}_{\text{IIB}}) = \mathbb{Z}$ なので、この配位はもちろん無限遠で vacuum manifold に非自明に巻きつきます。これは通常 type IIB の D-instanton の charge と解釈される charge を持っており、10次元 Euclid 空間における topological に安定な配位を表します。これが type IIB string 理論の配位空間における可縮でないループを与えます。この配位の $t = 0$ における断面を見ると、もとの不安定な D0-brane の配位を再現します。このことを再び場の理論の言葉で解釈すると、D0-brane は type IIB string 理論の配位空間における可縮でないループの頂上での配位を表し、これはまさに sphaleron に対応します。

ここでの結論は3つあります。まず、type IIB の D0-brane は D-sphaleron と解釈されます。これは negative mode を一つ持った古典解で、場の理論における sphaleron と同じ役割を果たします。またこれは type IIB string 理論の配位空間における可縮でないループに沿ったポテンシャル障壁の頂上にあたる配位です。2つ

目の結論は type IIB string 理論の配位空間は可縮でないループを持つということです。これは驚くべきことで、string の解析でこのことをどのように理解したら良いのかは良く分かりません。3つ目の結論は、D0-brane に限らず、他の全ての不安定な D-brane も同じように D-sphaleron と解釈されるということです。点状の物体のかわりに空間に広がった物体を考え、その world-volume に垂直な方向だけに注目します。このとき world-volume に沿った方向のポアンカレ不変性があるので、配位空間の中でこのポアンカレ不変性を持ったセクターだけを考えることができます。そうすると、これはやはり可縮でないループを持ち、高次元のどの不安定な D-brane も、この可縮でないループの頂上に対応した D-sphaleron として解釈できることが分かります。

2.6 back to the type IIA D-instanton

同じ事を type IIA の D-instanton でも行うことができます。Type IIB の D0-brane のときは時間一定面での配位を考えましたが、type IIA では Euclid 化して考えます。ここで述べたいことは、type IIA の D-instanton は D-sphaleron と解釈でき、Euclid 化した時空間における配位空間の中の可縮でないループの頂上の配位に対応するということです。これは実際に配位空間の中のループを構成することによって示すことができます。やり方は type IIB の D0-brane の場合と全く同様ですが、type IIA の D-instanton は 10 次元時空間上の配位です。そして、 $\pi_9(\mathcal{V}_{\text{IIA}}) = 0$ なのでこの配位は不安定です。Type IIA と type IIB の vacuum manifold は相補的な関係にあったことを思い出して下さい。 $\pi_n(\mathcal{V}_{\text{IIB}})$ は n が奇数のときに非自明でしたが、 $\pi_n(\mathcal{V}_{\text{IIA}})$ は n が偶数のときに非自明になります。従って $\pi_9(\mathcal{V}_{\text{IIA}}) = 0$ なので、無限遠でのタキオン場の配位

$$T = \Gamma \cdot x, \quad x^\mu = x^1, \dots, x^{10} \quad (2.12)$$

は vacuum manifold に非自明に巻きつくことはできません。しかしこれは原点付近に局在した配位で、その解釈は既に説明した通りです。この Euclid 化した 10 次元時空間での配位は、新たに 1 パラメータ t を導入した 11 次元空間の配位の $t = 0$ における断面と考えることができます。しかし、これらは新たなパラメータ t によって特徴付けられる 10 次元の string 理論の配位の集合を意味しており、 t を新たな時空間の次元を表すパラメータと考えることはできません。そして、再びタキオン場の配位はこれらの 11 個の座標 (\vec{x}, t) を用いて書き下すことができます。

$$T = \Gamma \cdot y, \quad \vec{y} = (\vec{x}, t) \quad (2.13)$$

この配位は 11 次元空間の無限遠を表す S^{10} の上で vacuum manifold に非自明に巻き付いており、topological に安定な配位です。また、この配位は $t = \pm\infty$ で真空に近づくことが分かります。つまり、これは type IIA string 理論の配位空間の中の真空から真空に至る可縮でないループを表しています。そして、このループの中点にあたる $t = 0$ での配位は type IIA の D-instanton になります。このようにして、D-instanton は type IIA の配位空間における可縮でないループの存在によって保証される sphaleron と解釈されます。Type IIB のときの議論を適用すると、この 11 次元空間における配位の持つ charge は D(-2)-brane charge と見なせることが分かります。D(-2)-brane の物理的な解釈は type IIA の配位空間の可縮でないループを表す配位であると言うことができます。これによって例えば cosmological constant の量子化を議論することができます。cosmological constant は type IIA string 理論の R-R 10-form field strength F_{10} と関係があります。 F_{10} は type IIA の D8-brane の world-volume と結合する R-R 9-form 場の field strength であり、type IIA の D8-brane は cosmological constant の異なる真空を隔てる domain wall で、その magnetic dual が D(-2)-brane です。Type IIA の配位空間のループが運ぶ D(-2)-brane charge と D8-brane の charge の間には電磁双対性があることを示すことができます。

2.7 higher homotopy groups of string configuration space

これまでの議論は高次元へ一般化することができます。これまでは type IIA string 理論と type IIB string 理論の配位空間における可縮でないループにのみ注目してきました。同じ議論を使って配位空間をより詳しく調べると、Bott 周期性から示唆されるように type IIB string 理論の配位空間には可縮でないループだけでなく、可縮でない高次の奇数次元の球面も存在することが分かります。従って type IIB の配位空間には可縮でない球面 S^{2p+1} ($p = 0, 1, \dots$) が存在すると言えます。これは驚くべきことです。コンパクト化されていない flat な時空における type IIB string 理論を調べて、その配位空間がこのような複雑なホモトピー構造を持っていることを string の立場でどう説明すればよいのか、私には分かりません。同様に type IIA string 理論における時間一定面の配位の空間にも可縮でない球面 S^{2p} ($p = 1, 2, \dots$) が存在します。

弱結合領域における type II string 理論の配位空間が複雑なホモトピー構造を持つことは注目に値します。例えば type IIA の場合は無限次元グラスマン多様体と同じような構造をしています。これを聞くと、かつて無限次元グラスマン多様体を用いた非摂動的な string 理論の定式化が多くの人々によって議論されたことを

思い出すでしょう。しかし、ここで議論した type IIA の配位空間に関するグラスマン多様体と、十数年前に string 理論で議論されたものとの間に何か関係があるかどうか私には分かりません。

Type IIB と type IIA の配位空間の中に、可縮でない高次元の球面があるということをより確かにするために議論を続けます。sphaleron の配位を具体的に与え、type IIB 理論の配位空間には可縮でない奇数次元の球面 S^{2k+1} があることを示しましょう。これは前と同様の議論によって球面 S^{2k+1} の頂上にあたる sphaleron の配位の存在を意味しています。この sphaleron は、球面 S^{2k+1} にそって真空の方へずらす自由度が $(2k+1)$ 次元あることに対応して、 $(2k+1)$ 個の negative mode を持っています。では、この sphaleron は string 理論の中ではどう解釈できるでしょ

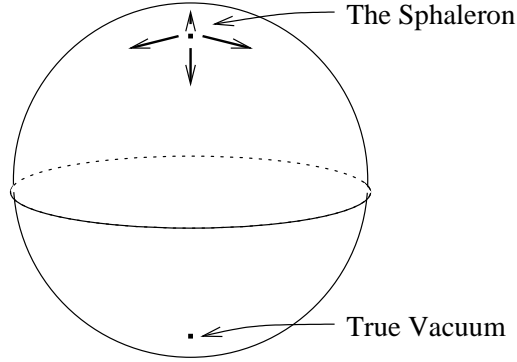


図 14: 配位空間における可縮でない S^{2k+1} 。 S^{2k+1} の頂上 (真空の対点) での配位が sphaleron 解になる。

うか。実は、配位空間の球面 S^{2k+1} の頂上に対応する sphaleron は、別に新しいものではなく、前に議論した D0-sphaleron を $(k+1)$ 個重ねたものであるという解釈ができます。こう解釈して、正しい数の negative mode を与えるかどうかを調べてみましょう。これは大変重要な要請です。配位空間の中の球面を考えて、その頂上で要求される数よりもたくさんの negative mode があつたとしたら、これは sphaleron とは解釈できません。可縮でないループの場合に議論したように、球面に対応した正しい数の negative mode を与える場合にのみ、球面の頂上のエネルギーが極小であるような sphaleron の配位と解釈することができます。

それでは、実際に正しい数の negative mode を与えるかどうかを調べてみましょう。まず、配位空間の可縮でない球面を与える配位を見つけるには、球面の座標に対応する $(2k+1)$ 個の余分なパラメータ $(t^1, t^2, \dots, t^{2k+1})$ を導入し、タキオン場の配位を、ループのときと同様に

$$T = \Gamma \cdot y, \quad \vec{y} = (\vec{x}, t^1, \dots, t^{2k+1}) \quad (2.14)$$

のように与えます。球面が奇数次元の場合はすべて topological に安定です。タキオン場の配位の $t^1 = t^2 = \dots = t^{2k+1} = 0$ における断面を考えると、 x 上では

$$T = \Gamma \cdot y|_{t=0} = \begin{pmatrix} \Gamma \cdot x & & & \\ & \Gamma \cdot x & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Gamma \cdot x \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

のような配位となり、対角成分の各ブロックは D0-sphaleron を表します。これはよく見る配位ですが、これが最もエネルギーの低い配位を実現しているかどうかには微妙な点があります。簡単なトポロジーの議論から、実際には D-sphaleron が $(k+1)$ 個重なった状態が最もエネルギーが低い状態であることが分かります。 $(k+1)$ 個の D-sphaleron が重なった配位が正しい数の negative mode を持つことを確かめましょう。まず negative mode の数を数えるとちょっと驚きます。何故なら、 $(k+1)$ 個の D-sphaleron にはそれらをつなぐ open string から生じる $(k+1)^2$ 個の negative mode があり、期待される $(2k+1)$ 個に対してこれは多すぎるからです。しかし、 $(k+1)^2$ は上手い具合に

$$(k+1)^2 = 1 + 3 + \dots + (2k-1) + (2k+1) \quad (2.16)$$

と分解されます。右辺の $(2k+1)$ 個の negative mode は、可縮でない球面 S^{2k+1} の $(2k+1)$ 次元の方向に対応しています。そして、他の $(2i-1)$ 個 ($i=1, \dots, k$) の negative mode も、可縮でない球面 S^{2i-1} の $(2i-1)$ 次元の方向に対応します。従って、可縮でないループ、 S^3, \dots, S^{2k+1} の頂上に対応する sphaleron の寄与を足し合わせたものは、正しく $(k+1)^2$ 個の negative mode を表します。

2.8 digression3 : the use of sphalerons

時間をオーバーしましたが、最後にいくつかの応用と結論を述べたいと思います。string 理論の配位空間が非自明なトポロジーを持つことを示し、数多くの sphaleron の配位が存在することを見てきました。場の理論では sphaleron はバリオン数の破れを引き起こすなど、物理的に重要な役割を果たします。そして以下の2つのような状況のときに sphaleron のエネルギーに達し、物理的過程に sphaleron を考慮することが重要になり得ます。すなわち、温度が高い状況や高エネルギーでの散乱過程を考える場合です。高温では sphaleron は数多く生成されるので、おそらく重要になります。しかし高エネルギーでの散乱過程ではおそらく重要ではありません。何故なら、数個の高エネルギーの粒子を用いた散乱過程では、質量の大きい物体を生成することは困難だからです。

一方、string 理論では逆に D-sphaleron は高エネルギー散乱過程で重要な役割を果たすと思います。特に string 理論では sphaleron は実際は D-brane なので、string の halo の中には core があり、昔から多くの人達が考えていた black hole が途中で生成される散乱過程と関係があるかも知れません。しかし具体的な関係は私には分かりません。一方、高温では D-sphaleron はあまり重要ではないでしょう。何故なら、sphaleron の質量を与えるエネルギーに達する前にハゲドロン転移を起こす温度に近づくからです。ハゲドロン転移の温度を超えたところでは、string 理論で何が起こるか理解されておらず、D-sphaleron が意味をなすかどうか分からなくなります。繰り返しますが D-sphaleron の存在は物理的応用の可能性を秘めています。しかし現時点で分かっていることは、コンパクト化されていない flat な時空でも string 理論の配位空間は複雑なトポロジーを持つということです。

Thank you!

[質問] D(-2)-brane は D8-brane と dual と言えますか？

[回答] そう思います。通常の Dirac の量子化条件をこれらは満足しており、D(-2)-brane charge と D8-brane charge は通常のように量子化されることが分かります。

[質問] 場の理論の解析では、例えば instanton が背景にある場合の有効作用などが計算されていますが、今の場合、sphaleron などが存在することによって有効理論に生じる新たな相互作用はありますか？

[回答] 基本的には場の理論の解析はこの場合にも当てはまると思います。まだあまり詳しくは計算されていませんが、多くの点で、場の理論の場合と類似していると思います。バリオン数が破れる過程のような興味深い応用は、おそらく超対称性を破るようなコンパクト化をした場合に得られるのではないかと思います。そのときには、string 理論における D-sphaleron は場の理論の sphaleron と同じような役割を果たすものと期待されます。

参考文献

- [1] R. Minasian and G. Moore, JHEP **9711** (1997) 002, hep-th/9710230,
“*K-theory and Ramond-Ramond charge*”
- [2] A. Sen, hep-th/9904207, and references therein,
“*Non-BPS states and branes in string theory*”
- [3] E. Witten, JHEP **9812** (1998) 019, hep-th/9810188
“*D-branes and K-theory*”
- [4] P. Yi, Nucl. Phys. **B550** (1999) 214, hep-th/9901159,
“*Membranes from Five-Branes and Fundamental Strings from Dp-Branes*”

- [5] A. Sen, JHEP **9910** (1999) 008, hep-th/9909062,
“Supersymmetric World-volume Action for Non-BPS D-branes”
- [6] P. Hořava, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1999) 1373, hep-th/9812135,
“Type IIA D-branes , K-Theory , and Matrix Theory”
- [7] O. Bergman, E. G. Gimon and P. Hořava, JHEP **9904** (1999) 010, hep-th/9902160,
“Brane Transfer Operations and T-Duality of Non-BPS States”
- [8] J. A. Harvey, P. Hořava and P. Kraus, hep-th/0001143.
“D-Sphalerons and the Topology of String Configuration Space”
- [9] See for example, S. Coleman, *Aspects of Symmetry* (Cambridge Univ. Press, 1985)
“The Uses of Instantons”
- [10] D. J. Gross, M. J. Perry and L. G. Yaffe, Phys. Rev. **D25** (1982) 330,
“Instability of flat space at finite temperature”
- [11] E. Witten, Nucl. Phys. **B195** (1982) 481,
“Instability of the Kaluza-Klein vacuum”
- [12] N. S. Manton, Phys. Rev. **D28** (1983) 2019,
“Topology in the Weinberg-Salam theory”
- [13] F. R. Klinkhamer and N. S. Manton, Phys. Rev. **D30** (1984) 2212,
“A Saddle-Point Solution in the Weiberg-Salam Theory”
- [14] C. H. Taubes, Commun. Math. Phys. **86**(1982) 257; **86** (1982) 299.