D-brane と K 理論（入門）[1, 2]

杉本 茂樹
京都大学基礎物理学研究所
E-mail: sugimoto@yukawa.kyoto-u.ac.jp

(2004 年 12 月 16 日受理)

1　はじめに

K 理論は超弦理論が生まれるよりもずっと以前から数学者によって導入され、成長を続けてきました。一方、量子重力を含む無矛盾な統一理論を求める過程で物理学者によって発見された超弦理論や D-brane は K 理論とはほとんど無関係に発展していきました。このように異文化に属する人々によって独立に生み出された K 理論と D-brane の間に非常に深い関係があるということを見抜いたのはまたしても Witten でした。[1] 実は安定な D-brane の配位を分類しようとするととても自然に（位相的な）K 理論に導かれるのです。K 群の定義そのものに直接物理的な解釈が与えられるので、これを用いると、僕のような数学の素養のない物理屋にも直観的に K 理論の本が読めるようになります。そうした目で昔の K 理論の教科書を眺めてみると、D-brane が導入されるよりもずっと以前に書かれた本であるにも関わらず、D-brane のことがたくさん書かれていることに驚きます。

また、この K 理論的な構造はそれまで広く用いられてきた従来の超弦理論の記述法に変更を迫る可能性があります。今回の話に登場する超弦理論には RR 場と呼ばれる微分形式で表される場が登場しますが、これは微分形式なので、そのトポロジカルな分類には当然のようにコホモロジー群が用いられてきました。特に、BPS D-brane と呼ばれる安定な D-brane はこの RR 場に関する電荷を持っており、D-brane の電荷はコホモロジー群によって分類されていました。あとで説明するように、K 群はコホモロジー群を拡張したようなもので、この D-brane の電荷の分類が K 理論に取って代わられることになります。D-brane の電荷に関するコホモロジー群を用いた結果と K 理論の予言とは多くの場合一致しますが、異なる例もいろいろ知られています。そうした場合を個々に調べてみると、 K 理論の予言が物理的に正しい結果を与え、コホモロジー群では不十分であるということが示唆されるのです。（例えば、[2, 3] など。）

話はこれだけでは終わりません。 D-brane の記述法にはいろいろあるのですが、その一つとして行列理論を用いたものがあります。あらゆる D-brane を正しく記述し得るあ

[1] この文章は 2003/9/16-17 に立教大学で行われた小研究会「弦理論と重力理論の数学的構造解明に関する学際的研究」でのレビュートークに基づくものです。

[2] **(編集部注)**　本稿は、「立教大学 SFR 自由プロジェクト研究 講究録 No. 4」に掲載された原稿であるが、編集部の依頼により転載させていただいた。

る種の行列理論を用いて構成される安定な D-brane を分類すると、今度は（解析的な）K-homology という概念に自然に導かれます。上の [1] で Witten が用いた D-brane の記述法はベクトル束を用いた幾何学的なものだったのに対して、今度は行列（Hilbert 空間の上の作用素）を用いて代数的に記述されます。この行列理論を用いると D-brane の幾何学的な情報がすべて作用素の言葉で記述されることになるわけです。どういう記述法を使うにしても同じ D-brane を表すので、K 理論を用いても K-homology を用いても同じ結果が得られるべきですが、実際、K 群と K-homology の間には双対性があって、物理的に同じ状況設定を考えると K 群と K-homology は期待通り同型になることを見て取れます。つまり、超弦理論は K 群と K-homology との間の双対性や幾何と代数の間の対応関係を知っていたということになります。

今回はこのようにさまざまな可能性を秘めている K 理論と D-brane との間の関係についての入門的な解説をしてみたいと思います。まず 2 節で、後で用いる D-brane の性質をまとめた後で、3 節で D-brane と K 群との間の関係を議論した Witten の論文 [1] から、4 節では行列理論における D-brane と K-homology との間の関係を議論した我々の論文 [4] からエッセンスだけを抜き出して解説します。予備知識として D-brane も K 理論も仮定せずに、研究会に参加していた数学者と物理屋の両方に楽しんでもらえるようにと思って準備をしたために、あちこちで無理が生じてしまいました。ほとんど説明抜きで認めてもらわざるを得ない事柄や数学的な厳密性を欠いたアバウトな議論等が散在しているので、そのへんのところは広い心を持って見てやってください。

2 D-brane

弦理論というのは、点粒子だと考えられていた素粒子が良く見ると小さなひも状の物体であるという仮説に基づく理論です。もう少しかしこまった言い方をすると、時空を表す多様体を X として、X 上の点というのは一点から X への写像と思うことができますが、その一点を線分 I あるいは円 S^1 に置き換えるのが弦理論の基本的な考え方です。このとき線分 I を考えるとこれは端のある string になり、開弦 (open string) と呼ばれます。一方、円 S^1 を考えるときには、これは端のない string で、閉弦 (closed string) と呼ばれています。（図 1）

図 1: 開弦と閉弦

今回の話で中心的な役割を演じるのは、弦理論の中に存在する D-brane と呼ばれる物

体です。この D-brane は 1995 年ごろからその重要性が認識され、その後の弦理論の大発展をもたらす引き金となりました。ここでは D-brane のことを系統的にきちんと説明する余裕はないので、後の話に必要な事柄を、証明抜きに解説するにとどめます。より詳しいことは [5] などを参照してください。

2.1 D-brane とその上の場

D-brane というものは始め、open string の端点が乗る空間として導入されました。時空をあらわす多様体を X として、その中に多様体 M が埋め込まれている状況を考えましょう。ここで埋め込みの写像 $\varphi : M \to X$ による像 $\varphi(M)$ と M とは以下ではあまり区別せずにしばしば同じ記号 M で表すことにします。それで、string に端点があれば、それが必ず M 上に乗るような状況で弦理論を考えたとき、この M のことを D-brane と呼びます。（図 2）特に、 M の次元が $p+1$ の時には、これを Dp-brane と呼びます。p 次元ではなく、 $p+1$ 次元なのは、p 次元が空間方向、1 次元が時間方向に広がっていることを想定しているためですが、今回の話では、時間方向も空間方向であるかのように扱ってしまうことにするので、時間と空間の区別はあまり気にする必要はありません。

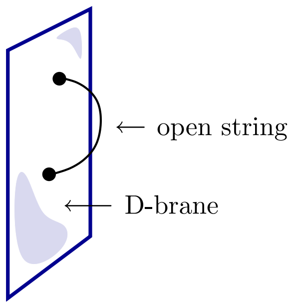

図 2: D-brane

まず、知っておいてほしいことは、D-brane 上にどのような場があるかということです。弦理論では、登場する場は string の振動モードを調べることで求まります。D-brane M が存在する時には、M に端を持つ open string から M 上の場が出てくることになります。例として、時空 $X = \mathbb{R}^{10}$ の中に $M = \mathbb{R}^{p+1}$ が埋め込まれている場合をやると表 1 のようになります。超弦理論にはいくつか種類があるのですが、今回の話では type IIA と type IIB と呼ばれる 2 種類の超弦理論を扱うので、これらについてまとめました。この表にある場以外にも、fermion 場や質量を持つ場などが存在しますが、それらは今回の話では登場しないので省略しました。

この表にあるように D-brane には BPS D-brane と呼ばれるものと non-BPS D-brane と呼ばれるものがあり、p が odd であるか even であるかで存在しうるものが異なります。BPS D-brane は RR 電荷と呼ばれる電荷を持っており、電荷の保存則のために消滅してしまうようなこともなく安定に存在する D-brane です。これに対して、non-BPS D-brane

理論	p	M 上の場	D-brane
type IIA	even	A, Φ^m	BPS Dp-brane
type IIA	odd	T, A, Φ^m	non-BPS Dp-brane
type IIB	even	T, A, Φ^m	non-BPS Dp-brane
type IIB	odd	A, Φ^m	BPS Dp-brane

表 1: D-brane 上の場

は電荷を持っておらず、放っておくと消滅してしまうような不安定な D-brane です。

表 1 で、A と書いたのは M 上の $U(1)$ ゲージ場です。後で使うために M が一般の多様体でゲージ群が $G = U(N)$ である場合も想定してもう少し細かく言うと、M の開被覆 $M = \cup_{i \in I} U_i$ と M 上の階数 N の複素ベクトル束の変換関数 $g_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ (s.t. $g_{ij}(x)^{-1} = g_{ji}(x),\ \ g_{ij}(x) g_{jk}(x) g_{ki}(x) = 1$ on $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$) が与えられた時、$U(N)$ ゲージ場は各 U_i 上で $N \times N$ の反エルミート行列に値を持つ 1-form A_i として与えられ、U_j 上で定義された A_j とは $U_i \cap U_j$ 上で

$$A_i(x) = g_{ij}(x) A_j(x) g_{ij}^{-1}(x) + g_{ij}(x) d g_{ij}^{-1}(x), \qquad x \in U_i \cap U_j \tag{2.1}$$

のような関係でつながっているものとします。M 上のゲージ場を考えた時点で、それが定義される M 上のベクトル束の存在を暗に仮定しているところに注意してください。

表 1 で出てくる T と Φ^m はどちらも実スカラー場で、 M 上の実関数を与えますが、その役割は異なります。Φ^m は $9-p$ 個あって、添え字の $m = p+1, p+2, \ldots, 9$ がそれらを区別するラベルになっています。そして、 M 上の点 $x = (x^0, x^1, \ldots, x^p)$ での $\Phi^m(x)$ の値は D-brane の x^m 方向における位置を与えます。つまり、D-brane M の時空 X への埋め込みが

$$M \ni x = (x^0, x^1, \ldots, x^p) \longmapsto (x, \Phi^{p+1}(x), \ldots, \Phi^9(x)) \in X \tag{2.2}$$

のようにスカラー場 Φ^m によって指定されることになります。この (2.2) の形で埋め込み写像が書けるのは $M = \mathbb{R}^{p+1}$ で $X = \mathbb{R}^{10}$ であるような特殊な場合ですが、曲がった多様体で一般の埋め込み方を考えるときには、 (2.2) は十分小さな座標近傍でうまいこと座標を取ったときに成立する式だと理解してください。

一方、non-BPS D-brane 上に存在するスカラー場 T はタキオン場と呼ばれ、図 3 のような形のポテンシャル $V(T)$ を持っています。以下では、タキオン場 T を適当に規格化することで、図 3 のように $|T| = 1$ がポテンシャルの最低点になるように調節することにします。このポテンシャルの形は弦の場の理論を用いて計算されるのですが、以下では主にトポロジカルな性質に注目するので、今回の話ではその形の詳細はあまり重要ではあり

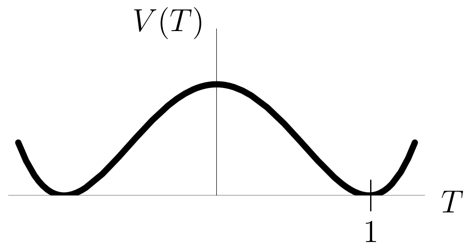

図 3: タキオン場のポテンシャル

ません。ただ、ポテンシャルの最低点が $|T| = 1$ で与えられ、その値がゼロ $V(T) = 0$ であることは覚えておいてください。

2.2 複数枚の D-brane

さて、今までは D-brane が一枚ある場合の話でしたが、複数枚の D-brane が重なった場合どうなるかを考えてみましょう。D-brane が同じ向きに N 枚平行に重なった場合、図 4 のように open string の両端がどの D-brane に乗るかで N^2 とおりの組み合わせ[1] があるので、D-brane 上の場は $N \times N$ 行列に拡張されることが分かります。特に D-brane

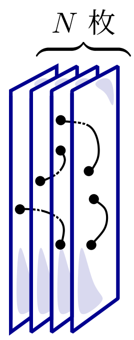

図 4: N 枚重なった D-brane

上のゲージ場 A は $U(N)$ ゲージ場になることが分かり、従ってこの系には $U(N)$ のゲージ対称性があることになります。$U(1)$ ゲージ場を持った D-brane が N 枚重なるとゲージ対称性は $U(1)^N$ ではなく、$U(N)$ に拡大するというわけです。一般に $U(n)$ のゲージ対称性を持った n 枚の D-brane 系と $U(m)$ のゲージ対称性を持った m 枚の D-brane 系とが重なるとゲージ対称性は $U(n+m)$ に拡大することになります。上で出てきた実スカラー場 Φ^m やタキオン場 T も同様に $N \times N$ のエルミート行列に拡張され、$U(N)$ ゲージ対称性に関して adjoint 表現として変換するような場になります。

ここでスカラー場 Φ^m が行列に拡張されたことは注目に値します。上で述べたように D-brane が一枚のときにはスカラー場 Φ^m の値は D-brane の x^m 方向の位置を表していました。D-brane が N 枚あるときには $N \times N$ 行列 Φ^m の各固有値が各 D-brane の位置

[1] ここで、string の向きも区別しています。

を表すと解釈するのが自然です。ただし、これは $\{\Phi^m\}$ が同時に対角化できる場合には問題ありませんが、今の場合 $9-p$ 個の行列 $\{\Phi^m\}$ が互いに可換であるとは限らないので、一般には同時対角化可能とは限りません。そうした場合には、D-brane は非可換な空間に埋め込まれていると解釈されます。今回は主に可換な場合を扱うので、このことにはあまり深入りしませんが、4.2 節で行列理論を考えるときにもう一度触れることにします。

ところで、BPS な D-brane には向きづけがあります。2.1 節で BPS な D-brane は電荷を持っていると言いましたが、この電荷の符号で D-brane の向きが区別されます。上で見たのは D-brane が N 枚、同じ向きに重なった場合の話でしたが、さらにこの N 枚の D-brane とは逆向きの D-brane (これを anti D-brane とか $\overline{\mathrm{D}}$-brane とかと呼びます。) を $\widetilde{N}$ 枚重ねた場合を考えてみましょう。そうすると、図 5 にあるように（図では D-brane と anti D-brane を離して書きましたが、これらがぴったり重なっている場合を想定しています。）D-brane 同士をつなぐ open string の他に、 anti D-brane 同士をつなぐものと D-brane と anti D-brane の間をつなぐような open string もあります。Anti D-brane 同士

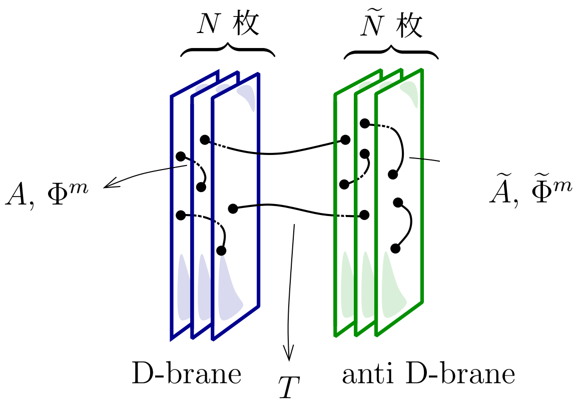

図 5: D-brane - anti D-brane 系

をつなぐ open string からは D-brane 同士をつなぐ場合と同様にして $U(\widetilde{N})$ ゲージ場 $\widetilde{A}$ と $U(\widetilde{N})$ の adjoint 表現に属するスカラー場 $\widetilde{\Phi}^m$ が生じます。一方、D-brane と anti D-brane の間をつなぐ open string からはタキオン場 T が生じることが知られています。このタキオン場は複素 $N\times\widetilde{N}$ 行列で表され、$U(N)\times U(\widetilde{N})$ ゲージ対称性の bi-fundamental 表現に属します。これらの場は (2.1) のあたりの話を拡張して、M 上の階数 N の複素ベクトル束と階数 $\widetilde{N}$ の複素ベクトル束の組の上に定義されることになります。より具体的に言うと、開被覆 $M=\cup_{i\in I}U_i$ とゲージ群 $U(N)\times U(\widetilde{N})$ に関する変換関数 $g_{ij}:U_i\cap U_j\to U(N)$、$\widetilde{g}_{ij}:U_i\cap U_j\to U(\widetilde{N})$ が与えられたときに、各 U_i 上に定義されたゲージ場 A_i, $\widetilde{A}_i$、スカラー場 Φ_i^m, $\widetilde{\Phi}_i^m$、タキオン場 T_i は $U_i\cap U_j$ 上では (2.1) を拡張して

$$A_i=g_{ij}A_jg_{ij}^{-1}+g_{ij}dg_{ij}^{-1},\qquad \widetilde{A}_i=\widetilde{g}_{ij}\widetilde{A}_j\widetilde{g}_{ij}^{-1}+\widetilde{g}_{ij}d\widetilde{g}_{ij}^{-1}, \tag{2.3}$$

$$\Phi_i^m=g_{ij}\Phi_j^mg_{ij}^{-1},\qquad \widetilde{\Phi}_i^m=\widetilde{g}_{ij}\widetilde{\Phi}_j^m\widetilde{g}_{ij}^{-1}, \tag{2.4}$$

$$T_i=g_{ij}T_j\widetilde{g}_{ij}^{-1} \tag{2.5}$$

のような関係でつながっている場であると考えます。

3 D-brane と K-theory

3.1 タキオン場による D-brane の構成

前節で登場した non-BPS D-brane や D-brane と anti D-brane の対は保存する電荷を持っておらず、放っておくと消滅してしまうような不安定な D-brane 系です。これらの不安定な D-brane 系に特徴的なことはタキオン場を含むことです。タキオン場は図 3 にあるようなポテンシャルを持つと言いましたが、$T = 0$ は不安定な停留点になっています。つまり、$T = 0$ から少しでもずらすと、タキオン場は $T = 0$ 付近に留まっていることができず、ポテンシャルの最低点 $|T| = 1$ に向かってころころ転がって行ってしまいます。実は、このタキオン場の不安定性がこれらの D-brane 系の不安定性と直接関係しています。Non-BPS D-brane や D-brane - anti D-brane 対は消滅し得ると言いましたが、これらの D-brane の上のタキオン場がポテンシャルの最低点 $|T| = 1$ にある状況が D-brane が消滅した状況に対応し、タキオン場がポテンシャルの頂上 $T = 0$ 付近にいる状況が D-brane が生成された状況を表すと考えられています。このことは「Sen の予想」と呼ばれ、今や様々な議論により支持されている事実です。実際、図 3 のようにタキオン場のポテンシャルの最低値は $V(T) = 0$ であり、タキオン場が $|T| = 1$ に落ち着いた状況ではエネルギーを持たないことが分かりますが、このことは D-brane が消滅していることとつじつまが合っています。

ここまでの議論はタキオン場が空間的に一様な場合で考えていましたが、これが一様でなくなった場合はどうなるでしょうか？特に面白いのは、不安定な D-brane 系の上でゲージ場やタキオン場の配位がトポロジカルに非自明になる場合で、このときには上の議論を用いると次元の低い安定な D-brane が構成されることが分かります。このことを具体例で説明しましょう。Dp-brane と anti Dp-brane のペアを考えると、この上のタキオン場は 2.2 節で述べたように複素スカラー場になりますが、これが次のような渦状の配位を取ったとします。

$$T(r,\theta) = f(r)\, e^{i\theta}. \tag{3.1}$$

ここで (r,θ) は Dp-brane の広がっている $(p+1)$ 次元空間（$\mathbb{R}^{p+1}$ とする）のうちの二次元平面の極座標で、この二次元に直交する $(p-1)$ 次元方向については一様な配位を考えているとします。$f(r)$ は図 6 のように十分小さな r に対して $f(r) = 0$ で十分大きな r に対して $f(r) = 1$ となるような滑らかな関数とします。そうすると、上で述べた事から、r が十分大きなときにはタキオン場はポテンシャルの最低点にあるので、Dp-brane と anti Dp-brane の対は消滅していて、(r,θ) 平面の原点付近にだけエネルギーの塊が残ったような状況であることが分かります。このエネルギーの塊は $(p-1)$ 次元方向に広がった物体

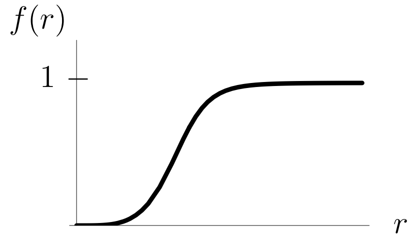

図 6: $f(r)$ の形

であることから D$(p-2)$-brane であると解釈されるのです。今は広がった方向の次元だけを見て D$(p-2)$-brane であると言いましたが、もっと精密な議論によって実際にこうやって得られるものが確かに D$(p-2)$-brane であることを弦理論の枠内で示すことができます。[1] ここではこの程度の議論で認めてください。

ところで、(3.1) のようなタキオン場の配位は、トポロジカルに非自明な配位です。というのは、タキオン場が十分遠方 $r \gg 1$ でポテンシャルの最低点 $|T| = 1$ にいるという条件のもとで連続的に場の配位をずらして行ったとしても、決して $T = \text{constant}$ という自明な配位に持って行くことはできないからです。このように十分遠方でポテンシャルの最低点になるようなタキオン場の配位が与えられたとき、タキオン場を十分大きな $R \gg 1$ によって $r = R$ で定義される遠方の S^1 の上に制限すると、これは S^1 から $U(1)$ ($\simeq$ ポテンシャルの最低点 $|T| = 1$ を与える T の空間) への写像を与えます。従って、こうした配位は $\pi_1(U(1)) \cong \mathbb{Z}$ で分類されることになります。この $\pi_1(U(1))$ の値は D$(p-2)$-brane の電荷と解釈されます。

少し細かいことを言うと、タキオン場などの場の配位は本来、運動方程式の解になるように求まるはずですが、(3.1) を考えたときには特に運動方程式は考えませんでした。これは、今は D-brane の電荷などのトポロジカルな性質に注目しているためです。このような考察によってトポロジカルクラスを一旦分類したら、各トポロジカルクラスに属する配位の中で作用を最小にするような配位が運動方程式の解になっているはずなので、各トポロジカルクラスに対応した運動方程式の解は存在するものと考えています。また、量子論を考える際には場の配位をトポロジカルクラスごとに分けてから、その中で経路積分を考えたりするので、そうした意味でもこのような考察は有用です。というわけで、以下の議論でも場の配位が運動方程式の解であるかどうかは特に問わないことにします。

ここまでは Dp-brane と anti Dp-brane を一対用意して D$(p-2)$-brane を構成する話でしたが、これを一般化して Dp-brane と anti Dp-brane を N 対用意して D$(p-n)$-brane を作ることを考えることもできます。この場合、2.2 節で述べたようにタキオン場 T は複素な $N \times N$ 行列になりますが、ポテンシャルの最低点が $TT^\dagger = T^\dagger T = 1$ で与えられるということさえ注意すれば、上と全く同様の考察によって今度は $\pi_{n-1}(U(N))$ で分類され

[1] 例えば [6] を見てください。

ることが分かります。ここで $\pi_{n-1}(U(N))$ は N が十分大きいときには N によらずに

$$\pi_{n-1}(U(N)) \cong \begin{cases} 0 & (n: \mathrm{odd}) \\ \mathbb{Z} & (n: \mathrm{even}) \end{cases} \tag{3.2}$$

となることが知られています。従って、n が偶数のときに $\mathbb{Z}$ の電荷を持った安定な D($p-n$)-brane が構成できることになります。このことは表 1 で述べたように電荷を持つ BPS Dp-brane が存在する p の値が type IIA なら偶数で type IIB なら奇数と決まっていたことをうまく再現しています。このように高い次元の不安定な D-brane 系から出発してタキオン場がトポロジカルに非自明な配位を考えることによって低い次元の安定な D-brane が得られるという関係は D-brane descent relation と呼ばれています。

これと同じことですが、次のような見方で見ることもできます。Dp-brane - anti Dp-brane を N 対用意して、この brane の広がる空間 $\mathbb{R}^{p+1}$ を $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^{p+1-n}$ に分け、$\mathbb{R}^{p+1-n}$ 方向には一様な配位を考えます。ここで、$\mathbb{R}^n$ に無限遠点 $\{\infty\}$ を付け加えてコンパクト化し、球面 S^n を考えましょう。この S^n の開被覆として $S^n = U \cup U'$ を取ります。ここで $U = \mathbb{R}^n = S^n \backslash \{\infty\}$ で U' は付け加えた無限遠点周りの小さな円盤とします。U 上のタキオン場 T と U' 上のタキオン場 T' は、$U \cap U'$ では (2.5) のように変換関数 $g: U \cap U' \to U(N)$、$\tilde{g}: U \cap U' \to U(N)$ を用いて

$$T(x) = g(x)T'(x)\tilde{g}^{-1}(x), \qquad x \in U \cap U' \tag{3.3}$$

でつながっていることになります。今、手で付け加えた無限遠点まわりでは Dp-brane - anti Dp-brane 対は消滅している状況を考えることにして、U' 上でタキオン場は $T' = 1$ (単位行列) とすると、$U \cap U'$ では $T = g\tilde{g}^{-1} \in U(N)$ となります。従ってタキオン場は $U \cap U'$ から $U(N)$ への写像を与えますが、$U \cap U' \simeq S^{n-1} \times I$ (I は開区間) なのでこれは $\pi_{n-1}(U(N))$ で分類されることになります。

今、変換関数 g と $\tilde{g}$ で定義される S^n 上のベクトル束の組を考えましたが、ベクトル束の組を分類したいわけではないことに注意してください。例えば、(3.3) で仮に $g = \tilde{g}$ だとすると、U 上でも $T = 1$ と置くことができるようになり、あらゆる点で Dp-brane - anti Dp-brane 対は消滅していることになるので、自明なベクトル束の組を考えるのと物理的には同じ状況になります。このように物理的に区別できる状態を分類しようと思ったら、「消滅している Dp-brane - anti Dp-brane 対は物理的に何もないのと同じ」という気持ちを表す同値関係をベクトル束の組の間に定義してそれを分類する必要があるわけです。

3.2 K 群による D-brane の分類

さて、こうした議論を踏まえて、いよいよ K 理論との関係を議論していきましょう。上の Dp-brane - anti Dp-brane 対から次元の低い D-brane を構成する話を $\mathbb{R}^n$ とか S^n だ

けでなく、より一般の多様体に通用するように拡張することを考えてみます。Dp-brane - anti Dp-brane 対から出発して上のようなやり方でやろうとすると、$(p+1)$ 次元より低い次元の D-brane しか作れないので、気前良く $p=9$ とします。超弦理論では時空の次元は 10 次元なので、こうしておけば、あらゆる D-brane を構成できると考えるわけです。表 1 によると BPS な D9-brane が存在するのは type IIB の場合ですので、しばらく type IIB 理論の場合をやります。

まず、2.2 節でやったように D9-brane N 枚と anti D9-brane $\widetilde{N}$ 枚を考えてみましょう。ここで、$N=\widetilde{N}$ でないとアノマリーが生じてしまって量子論的に矛盾のない理論にならないのですが、今は古典論的に取り扱っているので、とりあえず、$N=\widetilde{N}$ を課さずにやってみます。これらの D9-brane や anti D9-brane は 10 次元時空 X を埋めつくすので、D9-brane 上のゲージ場 A と anti D9-brane 上のゲージ場 $\tilde{A}$ とはそれぞれ X 上の階数 N と $\widetilde{N}$ の複素ベクトル束（それぞれ E、$\tilde{E}$ と書く）の上に定義されることになります。

ここで、やや唐突ですが、$K^0(X)$ と書かれる集合を次のように定義します。

$$K^0(X) := \left\{ (E,\tilde{E}) \,\middle|\, E,\ \tilde{E} \text{ は } X \text{ 上の複素ベクトル束} \right\} \Big/ \sim \tag{3.4}$$

ここで、同値関係 '$\sim$' で割りましたが、これは

$$\begin{aligned} & (E,\tilde{E}) \sim (E',\tilde{E}') \\ \overset{def}{\Longleftrightarrow}\ & \text{「}\ E\oplus H \cong E'\oplus H',\ \tilde{E}\oplus H \cong \tilde{E}'\oplus H' \text{ となるような} \\ & \quad X \text{ 上の複素ベクトル束 } H,\, H' \text{ がとれる。」} \end{aligned} \tag{3.5}$$

によって定義されます。ここで '$\oplus$' はベクトル束の直和、'$\cong$' はベクトル束としての同値を表します。この $K^0(X)$ は $\oplus$ が和となるような群をなし、K 群と呼ばれています。実際、$K^0(X)$ の二つの元 $(E,\tilde{E}), (F,\tilde{F})$ の和を $(E\oplus F, \tilde{E}\oplus\tilde{F})$ で定義すると、自明なベクトル束 I の組 (I,I) が単位元で、$(E,\tilde{E})$ の逆元が $(\tilde{E},E)$ となるような群をなすことがすぐに確かめられます。このような K 群を扱う理論が（位相的）K 理論です。[1]

実はこの群 $K^0(X)$ が求めたかった D-brane の分類を与えます。記号から察せられるように (3.4) で出てくる E は D9-brane に対応したベクトル束で $\tilde{E}$ は anti D9-brane に対応したベクトル束です。上では E と $\tilde{E}$ の階数をそれぞれ N と $\widetilde{N}$ としましたが、(3.4) の定義では E、$\tilde{E}$ の階数は特に指定せず、あらゆるものを考えています。同値関係 (3.5) は (H,H) や (H',H') の形のベクトル束の組を足したり引いたりして移りあうものは同一視しなさいと言っています。(H,H) というのは、上で $X=S^n$ の例で説明したように、タキオン場があらゆる点でポテンシャルの最低点になるようにとれる状況を表していて、消滅しうる D9-brane と anti D9-brane の対に対応しています。従って、この同値関係 (3.5) の意味するところは、物理の言葉で言うとまさしく「消滅した D9-brane と anti

[1] 位相的 K 理論の教科書としては例えば [7] があります。

D9-brane の対は何もないのと同じである」と言っているわけです。こうして、D9-brane - anti D9-brane 対が生成消滅する過程も含めて物理的に移りあえる配位を分類すると自然に $K^0(X)$ という K 群の概念に導かれることが分かりました。このようにして得られたものが図 2 にあるような open string の端が乗れる空間としての D-brane を分類する群になっていると言うには論理的にまだギャップがあるので、この主張はそういう意味では'予想' と言うべきかも知れませんが、先に説明した $X = \mathbb{R}^n$ のように具体的に D-brane を構成できるような場合には K 理論の元と open string の端としての D-brane が同じものを表していることは確かめられているので、「$K^0(X)$ が type IIB 理論の D-brane を分類する」という主張は一般に成立するものと考えられています。

上で、D9-brane の数と anti D9-brane の数が同じでないとアノマリーが生じてしまうと言いましたが、D9-brane の数と anti D9-brane の数が等しい場合を考えたかったら $K^0(X)$ の定義 (3.4) のところで $\mathrm{rank}\, E = \mathrm{rank}\, \widetilde{E}$ という制限をおいたもの（これを $\widetilde{K}^0(X)$ と書きます。）を用います。これは $K^0(X)$ の部分群をなし、一般に $K^0(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \widetilde{K}^0(X)$ という関係が成立します。ここで $\mathbb{Z}$ の部分は E と $\widetilde{E}$ の階数の差に対応していて、D9-brane の電荷を表します。また、ここまで暗黙のうちに X はコンパクトである場合を考えていましたが、X がコンパクトでない場合は、X の一点コンパクト化 $\dot{X}$ を用いて $K^0(X) := \widetilde{K}^0(\dot{X})$ によって K 群を定義します。

ここで導入した K 群は、足し算 '$\oplus$' しかないベクトル束の世界に引き算を導入して群にしたものと思うことができます。これは定義 (3.4), (3.5) のところで「X 上の複素ベクトル束」とあるところを一般の半群に置き換えることで、より一般に成立する手続きです。例えば「X 上の複素ベクトル束」のところを「自然数」に置き換えて K 群を作ると、引き算が導入されて整数 $\mathbb{Z}$ が得られます。今、D-brane の言葉で言うなら、D-brane の枚数は一枚、二枚、、、と足し算しかなかったところを anti D-brane を導入することで引き算も可能にしたというところが本質であると言えます。

3.3 別の表現

K 群の定義には 3.2 節で紹介したものの他にもいろいろありますが、物理との対応が見やすい表現の仕方がもう一つあります。[8, 9] これは次の節で説明する行列理論を考えるときに参考になるのでついでに簡単に紹介してみます。なお、ここで紹介する K 群の定義は [10] を参考にしながら書いています。

まずは再び type IIB 理論で考えます。出発点として、今度は D9-brane と anti D9-brane の対をあらかじめ無限個用意しておきます。そうすると、タキオン場 $T(x)$ は時空の各点 $x \in X$ で、$\infty \times \infty$ の行列、あるいは無限次元の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ に作用する作用素を与えることになります。ここで Hilbert 空間の各基底は D9-brane の一枚一枚と一対一に対応しているので、加算無限個の基底があるような Hilbert 空間を取ります。このような Hilbert 空間は、本質的に一つしかないので、これからの話は $\mathcal{H}$ の取り方には依存しませ

ん。ここで D9-brane に対応する Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ と anti D9-brane に対応する Hilbert 空間 $\widetilde{\mathcal{H}}$ とを敢えて区別して書くと、タキオン場は

$$T(x) : \mathcal{H} \to \widetilde{\mathcal{H}}, \quad T^\dagger(x) : \widetilde{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}, \tag{3.6}$$

のように作用する作用素です。

少し細かいことを言うと、$x \in X$ に関する連続性も要求するために、より正確には次のようにします。Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の基底を $\{e_n\}_{n\geq 1}$ とするとき、$\mathcal{H}$ の元は $\sum_{n=1}^\infty c_n e_n$ のように書けますが、この係数 $c_n \in \mathbb{C}$ を X 上の連続関数 $f_n(x) \in C_0(X)$ に置き換えて $\sum_{n=1}^\infty f_n e_n$ のような形の元[1] を考えたものを $C_0(X)$ 上の Hilbert 空間と呼び、$\mathcal{H}_{C_0(X)}$ と書きます。ここで、$C_0(X)$ は X 上の連続関数で、X がコンパクトではない場合には無限遠で 0 になるようなもの全体の集合です。そうして、$\mathcal{H}_{C_0(X)}$ から $\widetilde{\mathcal{H}}_{C_0(X)}$ への $C_0(X)$-module としての準同型 T で、その共役 $T^\dagger$ が存在するようなもの全体の集合を $\mathbb{B}(\mathcal{H}_{C_0(X)}, \widetilde{\mathcal{H}}_{C_0(X)})$ と書きます。($\mathcal{H}_{C_0(X)}$ と $\widetilde{\mathcal{H}}_{C_0(X)}$ とを区別しない時には単に $\mathbb{B}(\mathcal{H}_{C_0(X)})$ と書く。) これは $\mathcal{H}$ から $\widetilde{\mathcal{H}}$ への有界線形作用素 $\mathbb{B}(\mathcal{H}, \widetilde{\mathcal{H}})$ に $x \in X$ 依存性を持たせたような拡張になっています。これらを使って (3.6) を正確に書くと、タキオン場は $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H}_{C_0(X)}, \widetilde{\mathcal{H}}_{C_0(X)})$, $T^\dagger \in \mathbb{B}(\widetilde{\mathcal{H}}_{C_0(X)}, \mathcal{H}_{C_0(X)})$ ということになります。

ここで、今考えている状況に合わせた物理的要請を置きます。 3.1 節で考えたように $TT^\dagger = T^\dagger T = 1$ の時が D9-brane と anti D9-brane が消滅した状況と解釈すると、物理的に実現可能な配位では $TT^\dagger$ や $T^\dagger T$ の固有値は 1 にのみ集積すべきです。というのは、もし $TT^\dagger$ や $T^\dagger T$ の固有値が 1 に集積しなかったり、1 以外に集積したりする場合には、消滅していない D9-brane - anti D9-brane 対が無限個存在することになってしまうので、そういう配位を実現するには無限にエネルギーが必要ということになるためです。今、具体的なポテンシャルの形などを指定していないので、エネルギーが有限になるための条件が本当に $TT^\dagger$ や $T^\dagger T$ の固有値は 1 にのみ集積すべきという条件と等価なのかどうかなどの精密な議論ができなくて申し訳ないのですが、とりあえず、このような直観的な議論で納得することにします。

こうした状況をうまく表したものが

$$K^0(X) := \left\{ T \in \mathbb{B}(\mathcal{H}_{C_0(X)}, \widetilde{\mathcal{H}}_{C_0(X)}) \;\middle|\; \begin{array}{l} T^\dagger T - 1 \in C_0(X) \otimes \mathbb{K}(\mathcal{H}) \\ TT^\dagger - 1 \in C_0(X) \otimes \mathbb{K}(\widetilde{\mathcal{H}}) \end{array} \right\} \Big/ \sim \tag{3.7}$$

です。ここで $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ というのは $\mathcal{H}$ 上のコンパクト作用素と呼ばれる作用素の集合で、

$$\begin{aligned} K \in \mathbb{K}(\mathcal{H}) \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad & \text{「} \mathcal{H} \text{ の正規直交基底 } \{\psi_n\}_{n\geq 1}, \{\phi_n\}_{n\geq 1} \text{ と} \\ & \lim_{n\to\infty} \mu_n = 0 \text{ となる数列 } \{\mu_n\}_{n\geq 1} \text{ が取れて} \\ & K = \textstyle\sum_{n=1}^\infty \mu_n \,|\, \psi_n \,\rangle \langle\, \phi_n \,| \text{ と書ける。」} \end{aligned} \tag{3.8}$$

[1] ただし、$\sum_{n=1}^\infty f_n^* f_n$ が $C_0(X)$ 内で収束するものとします。

のように定義されます。ここで、$|\psi_n\rangle\langle\phi_n|$ は $\mathcal{H}$ の内積 $(*,*)$ を用いて $v\in\mathcal{H}$ を $v\mapsto\psi_n(\phi_n,v)$ のように写す写像です。特に、 $K=K^\dagger$ の時には (3.8) で $\psi_n=\phi_n$ とすることができるので、$T^\dagger T-1\in C_0(X)\otimes\mathbb{K}(\mathcal{H})$ という条件は $T^\dagger(x)T(x)-1$ の固有値が 0 にのみ集積するという上で要求した条件を表していることが分かります。また、ここで $C_0(X)$ の元は X がコンパクトでない場合には無限遠で 0 になるような関数なので、3.1 節のところでやったように無限遠では D9-brane と anti D9-brane が消滅している状況を考えていることになります。

(3.7) で使われる同値関係 '$\sim$' についての詳しい説明は省略しますが、一言で言うと、(a) ユニタリ変換 (b) ユニタリ作用素を直和で足す (c) ホモトピー の３つの操作で結びつくものを同一視することで与えられます。これらについても、それぞれ (a) ゲージ対称性で移りあうものを同一視 (b) 消滅している D9-brane - anti D9-brane 対を付け加える操作で移りあうものを同一視 (c) 連続変形で移りあうものを同一視 という物理的な解釈を与えることができます。

こうして (3.7) によって得られる $K^0(X)$ は (3.4) で定義される K 群と同じ記号で書きましたが、実際これらが同型であることが知られています。(3.4) に比べると、(3.7) による定義の方は D-brane 上の場であるタキオン場が用いられているため、より直接的な物理的解釈が可能であるという利点があります。

これまではもっぱら type IIB 理論の話でしたが、今度は type IIA 理論を考えてみます。上と同じ方針でやろうとするなら、やはり不安定な D9-brane 系を用いて D-brane を構成したくなります。表 1 で見たように、type IIA 理論の D9-brane は non-BPS D9-brane と呼ばれるものであり、これはタキオン場を含む不安定な D-brane でした。それでは、上に習って non-BPS D9-brane を無限枚用意してやってみたらどうなるでしょうか？ 2.2 節で述べたように、non-BPS D-brane を N 枚考えたとき、これ上のタキオン場は $N\times N$ のエルミート行列だったので、今の $N=\infty$ の場合のタキオン場は $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素になります。したがって、 (3.7) のところで $T=T^\dagger$ を課して

$$K^1(X):=\left\{T\in\mathbb{B}(\mathcal{H}_{C_0(X)})\,\middle|\,T=T^\dagger,\ \ T^2-1\in C_0(X)\otimes\mathbb{K}(\mathcal{H})\right\}\Big/\sim \tag{3.9}$$

のようにしたものを用いれば良いわけです。これによって type IIA 理論の D-brane は $K^1(X)$ で分類されることになります。

ここでは詳しく言いませんが、実は $K^n(X)$ のように $n\in\mathbb{Z}$ でラベルされた K 群の系列を定義することができます。それで $K^n(X)\cong K^{n+2}(X)$ という周期性 (Bott 周期性) が成り立つために、この系列の中では $K^0(X)$ と $K^1(X)$ の二つが独立なものになります。これらの 2 種類の K 群がちょうど type IIB と type IIA という 2 種類の超弦理論の D-brane を分類する群として使われるというわけです。

3.4 簡単な具体例

少し実感を持たせるために、最も簡単な $X=\mathbb{R}^n$ の場合を考えてみましょう。3.1 節でやったように、10 次元時空 $\mathbb{R}^{10}$ を $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^{10-n}$ とに分けて、$\mathbb{R}^{10-n}$ 方向には一様で、$\mathbb{R}^n$ 方向の無限遠では D9-brane が消滅している状況を考えます。このような場合、構成されうる安定な D-brane の分類は type IIB 理論では $K^0(\mathbb{R}^n)$、type IIA 理論では $K^1(\mathbb{R}^n)$ で与えられることになります。これらは、

$$K^0(\mathbb{R}^n)\cong\begin{cases}0 & (n:\mathrm{odd})\\ \mathbb{Z} & (n:\mathrm{even})\end{cases},\qquad K^1(\mathbb{R}^n)\cong\begin{cases}\mathbb{Z} & (n:\mathrm{odd})\\ 0 & (n:\mathrm{even})\end{cases}\tag{3.10}$$

で与えられることが知られています。今の状況設定だと、得られる D-brane は $\mathbb{R}^{10-n}$ 方向に広がった D$(9-n)$-brane なので、これらの群が表すのは D$(9-n)$-brane の電荷であると解釈されます。実際、この結果は表 1 にあるように電荷を持つ安定な Dp-brane (BPS Dp-brane) は type IIB 理論では p が奇数の時で、type IIA 理論では p が偶数の時であることを正しく再現しています。

4 K-homology

前節で説明した K 群と双対な関係にある K-homology と呼ばれる群があります。前節で考えた D-brane の分類はこの K-homology を用いても行うことができます。K-homology の定義のしかたにもいろいろあるのですが、特に次に説明する位相的なものと解析的なものが物理との対応をつける上で便利です。位相的 K-homology は直接 D-brane を表し [9, 4]、解析的 K-homology はある種の行列理論で記述される D-brane としての解釈 [4] がなされます。この節では、これらについて手短にまとめてみます。K-homology についての詳しい解説は [11] や [10] などを参照してください。

4.1 位相的 K-homology と D-brane

まず、位相的な K-homology と D-brane の関係を説明します。簡単のため X はコンパクトで境界のない smooth な多様体とすると、位相的 K-homology の定義は次のように与えられます。

$$K_i(X):=\{\,(M,E,\varphi)\,\}\big/\sim\,,\qquad (i=0,1).\tag{4.1}$$

ここで、 (M,E,φ) は次のようなものです。

$$\left\{\begin{array}{ll}M: & \text{境界のないコンパクトな } \mathrm{Spin}^c \text{ 多様体で } \dim M\equiv i\ (\mathrm{mod}\,2)\text{ なもの}\\ E: & M\text{ 上複素ベクトル束}\\ \varphi: & M\text{ から } X\text{ への連続写像}\end{array}\right.\tag{4.2}$$

Spin^c 多様体というのは一言で言うなら、$U(1)$ 電荷を持った fermion がうまく定義できるような構造を持った多様体ですが、とりあえず、ここでは細かいことはあまり気にしないことにしましょう。[1] この3つ組み (M, E, φ) のことを K-cycle と呼びます。ここで M は連結であることを要求せず、また E の階数は M の連結成分ごとに変わっても良いとします。こうしておけば二つの K-cycle (M_0, E_0, φ_0), (M_1, E_1, φ_1) の和を形式的に直和 $(M_0, E_0, \varphi_0) \cup (M_1, E_1, \varphi_1)$ を考えることで導入することができます。同値関係 '$\sim$' は次の (a)$\sim$(c) から生成されるものとします。

(a) ボルディズム

二つの K-cycle (M_0, E_0, φ_0), (M_1, E_1, φ_1) に対して

$$(\partial W, E|_{\partial W}, \varphi|_{\partial W}) \cong (M_0, E_0, \varphi_0) \cup (-M_1, E_1, \varphi_1) \tag{4.3}$$

となるような3つ組み (W, E, φ) が存在するとき $(M_0, E_0, \varphi_0) \sim (M_1, E_1, \varphi_1)$。ここで (W, E, φ) は (4.2) で与えたような3つ組みですが、W は境界を持つコンパクトな Spin^c 多様体とします。(4.3) で ∂W は W の境界を表し、右辺で $-M_1$ とあるのは M_1 で向き付けが逆になった気持ちを表しています。絵で表すと図 7 のように (M_0, E_0, φ_0) と (M_1, E_1, φ_1) の間をうまくつなぐような (W, E, φ) が取れるとき、この二つを同一視するという感じです。

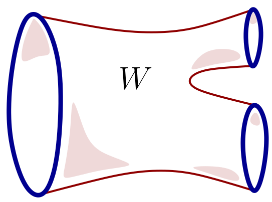

図 7: ボルディズム

(b) 直和

$$(M, E_1, \varphi) \cup (M, E_2, \varphi) \sim (M, E_1 \oplus E_2, \varphi) \tag{4.4}$$

(c) ベクトル束の変形

$$(M, E, \varphi) \sim (\widehat{M}, \widehat{H} \otimes \rho^*(E), \varphi \circ \rho) \tag{4.5}$$

[1] 向き付けのある多様体 M の接束の変換関数を $w_{ij} : U_i \cap U_j \to SO(n)$ とします。スピノルは $SO(n)$ の普遍被覆群である $Spin(n)$ の表現なので、 M 上にスピノルを定義するには射影 $p : Spin(n) \to SO(n) \cong Spin(n)/\mathbb{Z}_2$ のもとで $p \circ \widetilde{w}_{ij} = w_{ij}$ となる $\widetilde{w}_{ij} : U_i \cap U_j \to Spin(n)$ を取って $Spin(n)$ 束がうまく定義できる必要があります。一般にはこのような $\widetilde{w}_{ij}$ を取っても $U_i \cap U_j \cap U_k$ 上で $\widetilde{w}_{ij}\widetilde{w}_{jk}\widetilde{w}_{ki} = 1$ を満たすようにできる保証はありませんが、これができる場合が Spin 多様体です。また、ある $g_{ij} : U_i \cap U_j \to U(1)$ を持ってきて $\widetilde{w}_{ij}$ の代わりに $\widetilde{w}'_{ij} = g_{ij}\widetilde{w}_{ij}$ を変換関数とする束がうまく定義できる場合が Spin^c 多様体です。

ここで $\widehat{M}$ と $\rho : \widehat{M} \to M$ は各 $x \in M$ に対してファイバー $\rho^{-1}(x)$ が偶数次元の球面であるような M 上の球面束を表していて、$\widehat{H}$ は $\widehat{M}$ 上のベクトル束でファイバー $\rho^{-1}(x) \cong S^{2k}$ への制限 $\widehat{H}|_{S^{2k}}$ が $\widetilde{K}^0(S^{2k}) \cong \mathbb{Z}$ の生成元に対応するものです。

この物理的な解釈は次のように与えられます。まず、X は D-brane が埋め込まれる時空を表す多様体だとします。そして、M は BPS な D-brane を表し、φ が時空 X への埋め込み方を指定します。表 1 にあるように type IIA 理論には奇数次元、type IIB 理論には偶数次元の BPS D-brane が存在するので、$K_0(X)$ が type IIB 理論、$K_1(X)$ が type IIA 理論の D-brane を表すと考えると (4.2) にある M の次元の制限が理解できます。2.1 節では M の X への埋め込み方は M 上のスカラー場 $\{\Phi^m\}$ が指定すると言いましたが、これの役割を担うのが φ です。2.2 節では $\{\Phi^m\}$ たちが互いに可換でない場合は非可換な空間への埋め込みを表すということにも触れましたが、今は X は普通の（可換な）多様体を考えているので、$\{\Phi^m\}$ たちが互いに可換であるような配位のみを扱っています。E は D-brane M 上のベクトル束で、この上に (2.1) のようなゲージ場が定義されるようになります。

同値関係にも物理的な解釈が与えられます。(a) は単に D-brane の幾何学的な変形で移りあうものを同一視するというものです。(b) は 2.2 節で説明したように、D-brane を同じ向きに何枚か重ねるとゲージ対称性が拡大するという現象に対応しています。(c) は 3.1 節で説明した D-brane descent relation に他なりません。M を Dp-brane とすると、M の球面束 $\widehat{M}$ は図 8 のように D$(p+2k)$-brane と anti D$(p+2k)$-brane の対で球面から外れた部分が対消滅を起こしたものとみなせて、$\widetilde{K}^0(S^{2k})$ の生成元に対応する配位というのは 3.1 節で説明した仕方で D$(p+2k)$-brane - anti D$(p+2k)$-brane 系から Dp-brane を構成していることになります。従って、(c) はそうやって D$(p+2k)$-brane と anti D$(p+2k)$-brane の対から構成した Dp-brane と、はじめから $(p+1)$ 次元の多様体 M を持ってくることで導入した Dp-brane を同一視しなさいという約束とみなすことができます。

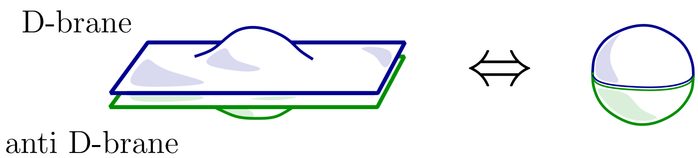

図 8: D-brane - anti D-brane 対と球面状の D-brane

4.2 行列理論と解析的 K-homology

3 節で説明した K 理論と D-brane の関係は、3.1 節で出てきた D-brane decent relation に基づいていて、D9-brane - anti D9-brane 対や non-BPS D9-brane のような次元の高い不安定な D-brane 系から出発してあらゆる D-brane を構成するという話でした。実は

これと全く逆方向のことができます。つまり、次元が低い不安定な D-brane 系から出発しても、あらゆる次元の D-brane を構成することができるのです。次元が低い不安定な D-brane 系というのは基本的には何を使っても良いのですが、ここでは最も次元が低い 0 次元の D-brane である D(-1)-brane を考えましょう。3.3 節のまねをして、type IIB 理論では D(-1)-brane - anti D(-1)-brane 対が無限個ある系を、type IIA 理論では non-BPS D(-1)-brane が無限個ある系を出発点に取ります。そうすると、3.3 節の時のように、場の変数は加算無限次元の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ に作用する作用素になりますが、今の場合は 0 次元の brane を考えているので、場と言っても、空間依存性のないただの作用素です。このように、作用素（あるいは $\infty \times \infty$ の行列）を場の変数としているところは 3.3 節で用いたセットアップと良く似ていますが、空間依存性がない分だけ見かけ上理論の枠組みが著しく簡略化されています。それにも関わらず、行列のサイズが無限大であるために 10 次元の理論と同じだけの情報を含んでいるのです。

まずは、type IIA 理論で non-BPS D(-1)-brane を考えてみましょう。D(-1)-brane というのは 0 次元の物体なので、この上にゲージ場は存在せず、表 1 のとおり、タキオン場 T と 10 個のスカラー場 Φ^m $(m = 0, 1, \ldots, 9)$ が存在します。non-BPS D(-1)-brane が無限個あると、これらの場は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ に作用する自己共役作用素とみなされます。この理論で、具体的にどうやって D-brane を構成するのかという話は今回は時間の関係で割愛しますが、直観的に言うと non-BPS D(-1)-brane という点状の物体を $(p+1)$ 次元平面に無限個うまく敷きつめることで Dp-brane を構成するという感じです。このときタキオン場 T が non-BPS D(-1)-brane たちをくっつけるのりのような役目を果たします。

では、再び答えから入ります。解析的 K-homology の定義は次で与えられます。

$$K_1(X) := \{ (\mathcal{H}, \phi, T) \} \big/ \sim \tag{4.6}$$

$$\begin{cases} \mathcal{H}: & \text{Hilbert 空間} \\ \phi: & C_0(X) \text{ から } \mathbb{B}(\mathcal{H}) \text{ への準同型} \\ T: & T \in \mathbb{B}(\mathcal{H}) \text{ で } T = T^\dagger \text{ で } T^2 - 1 \in \mathbb{K}(\mathcal{H}), \\ & \text{かつ } [T, \phi(a)] \in \mathbb{K}(\mathcal{H}) \ \text{ for } {}^\forall a \in C_0(X) \end{cases} \tag{4.7}$$

ここで使われている記号はだいたい 3.3 節で説明しましたが、$\mathbb{B}(\mathcal{H})$ は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素（ノルムが有限な作用素）で、$\mathbb{K}(\mathcal{H})$ は（3.8）で定義される $\mathcal{H}$ 上のコンパクト作用素です。

これらの物理的な解釈は次のとおりです。まず、T はタキオン場で、$T^2 - 1 \in \mathbb{K}(\mathcal{H})$ という条件は 3.3 節でのべたように、無限個の non-BPS D(-1)-brane が消滅せずに残ってポテンシャルが発散したりしないための条件です。一方、ϕ は D-brane の時空への埋め込み方を指定するスカラー場 $\{\Phi^m\}$ の自由度に対応しています。これがどうしてかを説明するために、$X = \mathbb{R}^{10}$ の場合で考えましょう。今、$\{\Phi^m\}$ は $\mathcal{H}$ 上の作用素ですが、Φ^m 同士が互いに可換な場合を考えているとしてます。このとき、x^m と Φ^m とを対応させ、

$$\phi : C_0(X) \ni f(x^0, x^1, \ldots, x^9) \longmapsto f(\Phi^0, \Phi^1, \ldots, \Phi^9) \in \mathbb{B}(\mathcal{H}) \tag{4.8}$$

のような形で ϕ を与えると $C_0(X)$ から $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ への（C^* 代数としての）準同型になりますが、これによって $\{\Phi^m\}$ の選び方と ϕ の選び方が対応していると考えます。実は一般に位相空間[1] と可換な C^* 代数の間の対応関係から ϕ の像 $\phi(C_0(X))$ も再びある位相空間 M を用いて $\phi(C_0(X)) \cong C_0(M)$ の形で書けることが分かります。この M が D-brane に対応します。そして、この $\phi : C_0(X) \to C_0(M)$ は M から X への固有写像[2] $\varphi : M \to X$ に対して定義される $\varphi^* : C_0(X) \ni f \mapsto f \circ \varphi \in C_0(M)$ とみなすことができるのです。従って ϕ は D-brane M とその時空 X への埋め込み方 φ の情報を担っています。最後に $[T, \phi(a)] \in \mathbb{K}(\mathcal{H})$ for ${}^\forall a \in C_0(X)$ という条件は、これも大雑把にしか言えませんが、行列理論にある T の運動項 $\sim [T, \Phi^m]^2$ が発散しないための条件と解釈されます。

(4.6) の同値関係 '$\sim$' についても、詳しくは省略しますが、3.3 節で出てきたのとほぼ同様に (a) ユニタリなゲージ変換 (b) 消滅している non-BPS D(-1)-brane を加える (c) 連続変形 という３つの操作で写りあうものを同一視するという物理的な解釈を与えることができます。

このようにして、non-BPS D(-1)-brane に基づく行列理論において、タキオン場 T のポテンシャルや運動項が発散しないような配位を分類することを考えて、解析的 K-homology という概念にたどり着きましたが、これは type IIA 理論における D-brane の分類を与えていると考えられます。実際、この解析的 K-homology は 4.1 節で説明したように D-brane のより直接的な解釈ができる位相的 K-homology と同型であることが知られており、さらに 4.3 節で触れるように 3 節で説明した K-theory による D-brane の分類とも整合した結果を与えます。

全く同様のことは type IIB 理論で D(-1)-brane - anti D(-1)-brane 対が無限個ある系から出発してもできます。上の場合との違いは、 D(-1)-brane に対応する Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ と anti D(-1)-brane に対応する Hilbert 空間 $\widetilde{\mathcal{H}}$ の二つがあり、それぞれに対応してスカラー場が二種類（$\{\Phi^m : \mathcal{H} \to \mathcal{H}\}$ と $\{\widetilde{\Phi}^m : \widetilde{\mathcal{H}} \to \widetilde{\mathcal{H}}\}$）出てきて、タキオン場 $T : \mathcal{H} \to \widetilde{\mathcal{H}}$ が自己共役ではなくなること、それから T のポテンシャルの最低点を与える条件が $T^2 = 1$ ではなく $T^\dagger T = TT^\dagger = 1$ に、運動項がゼロになる条件が $[T, \Phi^m] = 0$ ではなく $T\Phi^m - \widetilde{\Phi}^m T = 0$ になるということなどです。これだけのことを念頭において、上に習えば、この場合に対応する群がどうなるのかはすぐに見当がつきます。答えは

$$K_0(X) := \left\{ (\mathcal{H}, \widetilde{\mathcal{H}}, \phi, \widetilde{\phi}, T) \right\} \big/ \sim \tag{4.9}$$

[1] 正確には局所コンパクトなハウスドルフ空間。

[2] X のコンパクトな集合 K の逆像 $\varphi^{-1}(K)$ が M の中でコンパクトになるような連続写像のことを固有写像と言います。これは直観的に言うと、D-brane が時空 X の境界以外に端を持たないということを意味しています。

$$\begin{cases} \mathcal{H}, \widetilde{\mathcal{H}}: & \text{Hilbert 空間} \\ \phi: & C_0(X) \text{ から } \mathbb{B}(\mathcal{H}) \text{ への準同型} \\ \widetilde{\phi}: & C_0(X) \text{ から } \mathbb{B}(\widetilde{\mathcal{H}}) \text{ への準同型} \\ T: & T \in \mathbb{B}(\mathcal{H}, \widetilde{\mathcal{H}}) \text{ で } \ T^\dagger T - 1 \in \mathbb{K}(\mathcal{H}),\ TT^\dagger - 1 \in \mathbb{K}(\widetilde{\mathcal{H}}), \\ & \text{かつ } T\,\phi(a) - \widetilde{\phi}(a)\,T \in \mathbb{K}(\mathcal{H}, \widetilde{\mathcal{H}}) \quad \text{for } {}^\forall a \in C_0(X) \end{cases} \tag{4.10}$$

となります。

一つ面白いことは、(4.6) や (4.9) の定義の中で、時空 X は $C_0(X)$ の形でのみ現れるという点です。この $C_0(X)$ は可換な C^* 代数ですが、これをより一般の非可換な C^* 代数に置き換えても、この定義自体はそのまま通用します。今は可換な時空 X に埋め込まれた D-brane だけを考えたのでスカラー場 Φ^m 同士は互いに可換であるとしましたが、行列理論では一般に Φ^m 同士が互いに可換でないような配位も自然に現れるので、非可換幾何への拡張や応用は物理としても大変面白いテーマだと思います。

4.3 K 群 と K-homology

K 群はコホモロジー群を拡張したようなものであるのに対して、K-homology はホモロジー群を拡張したようなものになっています。K 群 $K^i(X)$ や K-homology $K_i(X)$ で何気なく添え字 $i = 0, 1$ が上についたり下についたりして区別されていましたが、これは コホモロジー群 $H^i(X; \mathbb{Z})$ とホモロジー群 $H_i(X; Z)$ の場合の添え字 i のつき方と同じです。実際、K 群や K-homology で有理数 $\mathbb{Q}$ とのテンソル積を考えると

$$K^0(X) \otimes \mathbb{Q} \cong \bigoplus_{i:\,\text{even}} H^i(X; \mathbb{Q}), \qquad K^1(X) \otimes \mathbb{Q} \cong \bigoplus_{i:\,\text{odd}} H^i(X; \mathbb{Q}) \tag{4.11}$$

$$K_0(X) \otimes \mathbb{Q} \cong \bigoplus_{i:\,\text{even}} H_i(X; \mathbb{Q}), \qquad K_1(X) \otimes \mathbb{Q} \cong \bigoplus_{i:\,\text{odd}} H_i(X; \mathbb{Q}) \tag{4.12}$$

のような同型が成り立つことが知られています。$\mathbb{Q}$ とのテンソル積をとると、$\mathbb{Z}_n$ などのねじれ部分の情報が落ちるので、K 群や K-homology はねじれ部分を除くとホモロジー群やコホモロジー群と同じであると言えます。

また、X が n 次元のコンパクトな多様体のとき、Poincaré 双対性 $H_i(X; \mathbb{Z}) \cong H^{n-i}(X; \mathbb{Z})$ が成立していたことからも想像できるように

$$K_i(X) \cong K^{n-i}(X) \tag{4.13}$$

という同型が成立します。これにより、X が 10 次元の時には、type IIB 理論の D9-brane - anti D9-brane 系から構成される D-brane の分類を与える K 群 $K^0(X)$ と D(-1)-brane - anti D(-1)-brane 系から構成される D-brane の分類を与える K-homology $K_0(X)$ とが同じ結果を与え、type IIA 理論の non-BPS D9-brane 系から構成される D-brane の分類を与える K 群 $K^1(X)$ と non-BPS D(-1)-brane 系から構成される D-brane の分類を与える K-homology $K_1(X)$ とが同じ結果を与えることが分かります。

では、X を 9 次元の多様体として、10 次元時空が $\mathbb{R} \times X$ のように与えられ、$\mathbb{R}$ 方向には一様な配位にのみ興味がある場合はどうなるでしょうか？この場合には type IIB 理論の D9-brane - anti D9-brane 対や type IIA 理論の non-BPS D9-brane から D-brane を構成する場合には、単に $\mathbb{R}$ 方向を無視すれば良いだけで、やはり、それぞれ $K^0(X)$、$K^1(X)$ で分類されることになります。一方、行列理論から構成する場合、一つのやり方として、$\mathbb{R}$ 方向に広がった不安定な D0-brane 系をもとにして、$\mathbb{R}$ 方向については一様な配位を考え、 4.2 節でやったのと同様の方法で D-brane を構成すれば欲しいものが得られることになります。そうすると、type IIB 理論では non-BPS D0-brane、type IIA 理論では D0-brane - anti D0-brane 対を考えることになるので、今度はそれぞれ $K_1(X)$、$K_0(X)$ で分類されることになります。これは再び (4.13) で X が 9 次元の時の式 $K^0(X) \cong K_1(X)$, $K^1(X) \cong K_0(X)$ とつじつまが合っています。

5 おわりに

今回は入門編ということで、K 群や K-homology が安定な D-brane を分類する群として自然に出てくるということを割と丁寧に説明しましたが、これを利用してどんな応用があるのかということに触れる余裕はあまりありませんでした。

例えば面白い話題として type I 理論への応用があります。[1, 12, 13, 6] Type I 理論は type IIB 理論で string の向き付けの区別をなくすようにして構成されるものですが、この理論にも D9-brane や anti D9-brane が存在するので、基本的な考え方は type IIB 理論の場合と同じす。違いは D9-brane が N 枚あるとゲージ群が $O(N)$ になるというところです。このために、この理論の D-brane を分類する K 群は (3.4) で複素ベクトル束だったところを実ベクトル束で置き換えたもの（これを $KO^0(X)$ と書く。）になります。この群で 3.4 節でやったことを繰り返すと

$$KO^0(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (n \equiv 0, 4 \pmod 8) \\ \mathbb{Z}_2 & (n \equiv 1, 2 \pmod 8) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{5.1}$$

であるために、 $\mathbb{Z}$ の電荷を持つ D1-brane, D5-brane, D9-brane に加えて $\mathbb{Z}_2$ の電荷を持つ D(-1)-brane, D0-brane, D7-brane, D8-brane が存在することが分かります。この $\mathbb{Z}_2$ の電荷を持つ D-brane というのは、一つだと安定だけれど二つ重なると不安定になって消滅してしまうようなものです。K 理論の結果を用いることによって、type I 理論にこうした不思議な性質を持つ D-brane が存在するということが理論の詳細を調べたり運動方程式を解いたりするまでもなく予言できてしまった訳です。実際、この予言どおりの D-brane が弦理論の枠内で（図 2 のように open string が端を持つ空間として）構成できることも示されています。

また、KO 群の系列には $KO^n(X)$ $(n \equiv 0,1,2,3,4,5,6,7 \bmod 8)$ のように 8 種類ある

のですが、実は type I 理論には 8 種類の不安定な D-brane 系があり、この $KO^n(X)$ の系列と一対一に対応していることが分かります。これらについても、3 節や 4 で議論したようなことを適用することができ、複雑な構造をしている type I 理論の D-brane を統一的にエレガントに記述することが可能になります。

4.3 節で触れたように、ホモロジー群やコホモロジー群を用いたかつての解析では得られなかったような新しい予言を K 理論が与え得るのは、これらの群に $\mathbb{Z}_n$ のようなねじれ部分があるときですが、これは決して物理では使われないようなマニアックな多様体だけに限られたことではありません。その典型的な例は orientifold が存在する場合で、[3] で議論されているように、K 理論による解析はそれまで信じられていた orientifold の分類表の一部に修正を迫ります。このような例からも、 K 理論は単に物理とうまく対応して美しいというだけに留まらず、超弦理論を解析するのに必要不可欠な道具として積極的に利用されるべきものであることが分かります。

数学と物理の交流という意味で考えてみると、今のところ、やはり K 理論の方が D-brane よりも歴史が長い分テクノロジーが発達していて、K 理論の知識を使って弦理論を解析するという方向の議論は多くなされているけれども、その逆に弦理論の知識を使って K 理論と関係した数学の研究に役立てるという方向にはなかなか進んでいない気がします。しかし、今回の話でも K 群と K-homology の関係や位相的な見方と解析的（代数的）な見方の間の関係などの数学的な事実が弦理論から予想できるなど、弦理論の有用性を垣間見ることができます。今後、こうした方向からも、数学と物理の間の豊かな交流が見られることを期待しています。

それにしても、量子重力を含めた統一理論を作りたいという物理学者の欲求から研究されているはずの弦理論が、実に様々な局面で美しく深い数学的な内容を含んでいることにはいつも驚かされます。

参考文献

[1] E. Witten,
"D-branes and K-theory,"
JHEP **9812**, 019 (1998) [arXiv:hep-th/9810188].

[2] D. E. Diaconescu, G. W. Moore and E. Witten,
"E_8 gauge theory, and a derivation of K-theory from M-theory,"
Adv. Theor. Math. Phys. **6**, 1031 (2003) [arXiv:hep-th/0005090].

[3] O. Bergman, E. G. Gimon and S. Sugimoto,
"Orientifolds, RR torsion, and K-theory,"
JHEP **0105**, 047 (2001) [arXiv:hep-th/0103183].

[4] T. Asakawa, S. Sugimoto and S. Terashima,
"D-branes, matrix theory and K-homology,"
JHEP **0203**, 034 (2002) [arXiv:hep-th/0108085].

[5] J. Polchinski, S. Chaudhuri and C. V. Johnson,
"Notes on D-Branes,"
arXiv:hep-th/9602052.

[6] T. Asakawa, S. Sugimoto and S. Terashima,
"Exact description of D-branes via tachyon condensation,"
JHEP **0302**, 011 (2003) [arXiv:hep-th/0212188].

[7] M. Karoubi,
"K-Theory, an introduction,"
Springer-Verlag.

[8] E. Witten,
"Overview of K-theory applied to strings,"
Int. J. Mod. Phys. A **16**, 693 (2001) [arXiv:hep-th/0007175].

[9] J. A. Harvey and G. W. Moore,
"Noncommutative tachyons and K-theory,"
J. Math. Phys. **42**, 2765 (2001) [arXiv:hep-th/0009030].

[10] B. Blackadar,
"K-Theory for Operator Algebra,"
Cambridge University Press.

[11] P. Baum and R. G. Douglas,
"K-homology and Index Theory"
Proc. of Symposia in Pure Mathematics, **38** (1982) 117.

[12] O. Bergman,
"Tachyon condensation in unstable type I D-brane systems,"
JHEP **0011**, 015 (2000) [arXiv:hep-th/0009252].

[13] T. Asakawa, S. Sugimoto and S. Terashima,
"D-branes and KK-theory in type I string theory,"
JHEP **0205**, 007 (2002) [arXiv:hep-th/0202165].