Non-BPS 系の物理*

京大基研・杉本茂樹
2000 年 7 月 7 日

1 はじめに

まず始めに、何故 non-BPS な系を考えるのかをお話ししましょう。

これまでの超弦理論の非摂動的な解析の多くは超対称性の持つ著しい性質に支えられてきました。しかし、現実の世界が超対称的ではないわけですから、いずれ超対称性がない状況における弦理論に挑戦しなければならなくなる日が来るのは目に見えています。超対称性が破れた状況で、どこまで弦理論を解析できるのかを探ることに意義があるのは明らかです。

もっと積極的に、 non-BPS な brane を現象論に応用しようという試みもなされています。安定な non-BPS 系は、超対称性の破れた安定な時空を超弦理論の枠内で実現する大変明快な方法であり、様々な解析を行うことができます。例えば、現実の世界が BPS な brane の上に実現されているとして、少し離れたところにある non-BPS な brane が超対称性の破れの起源であると考えるモデルもあります。こうしたモデルは、まだまだ現実的とは言えない情況にあるようですが、シナリオとしては大変興味深く、このような可能性を考えることは有意義だと思います。

また、non-BPS 系の物理は、弦理論や場の理論の解析をするための有用な道具としても使えます。まだそれほど例はありませんが、例えば、non-SUSY な場の理論を non-BPS な D-brane 系で実現することによって、双対性を議論することが可能になる場合もあります。こうした例は、現実の QCD などへの応用の可能性を期待させるものがあり、大変興味深いと思います。

そして、今回、特に後半で強調したいことは、non-BPS 系の物理を探る意義は、単に non-SUSY な物理の理解を深めることだけに留まらないということです。 Non-BPS な系は、超弦理論の低エネルギーを記述するための新しい見方を提供し、超重力理論では見えなかった新たな現象を予言することができます。Non-BPS 系は、弦理論の正しい理解のために避けては通れない重要な研究対象であると思います。

この分野では、数年前の超対称性全盛期にいろいろあったような精密な結果があるわけではなく、まだまだもやもやとした未開拓な分野だと言える思います。そして、かなり挑戦的な予言や良く分からないパズルがいろいろあり、この分野の研究が今後の弦理論の新たな展開への糸口になるのではないかと大いに期待しています。

2 Sen の議論の復習

Type II 弦理論には、BPS な D-brane の他に、non-BPS な D-brane があります。Non-BPS Dp-brane は、Type IIA (IIB) では p が奇数（偶数）の時に存在し、 couple する R-R 場がないため、R-R charge を持ちません。この Non-BPS D-brane に端を持つ open string のスペクトラムを求めて見ると、BPS な D-brane の時と違って GSO projection が掛からず、特に tachyon が存在することが分かります。Non-BPS D-brane が n 枚重なった系を考えると、この brane の上の world volume theory は、 $U(n)$ ゲージ理論で、これの adjoint 表現に属する tachyon 場を含む理論になります。

同じように重要な役割を果たす non-BPS な系として、 Dp-brane と $\overline{\mathrm{D}p}$-brane を重ねた系 (Dp–$\overline{\mathrm{D}p}$ 系と呼ぶ) があります。$\overline{\mathrm{D}p}$-brane は、基準の Dp-brane に対して、向き付けを逆にした Dp-brane のことです。D-brane の R-R charge は、brane の向きを反転すると、符号が反転するので、Dp-brane と $\overline{\mathrm{D}p}$-brane

* 2000 年 7 月 7 日に基研研究会 QFT2000 で行った review talk の報告です。

を重ねると、R-R charge は打ち消しあってなくなります。また、Dp-brane と $\overline{\mathrm{D}p}$-brane をつなぐ open string スペクトラムを調べると、GSO projection の掛かり方が通常とは逆になり、やはり tachyon mode が存在することが分かります。Dp-brane と $\overline{\mathrm{D}p}$-brane を n ペア重ねると、$U(n)\times U(n)$ ゲージ理論が得られ、tachyon 場はこれの bi-fundamental 表現 ($\square$, $\square^*$) に属するようになります。

これらの系は、R-R charge を持たず、保存する charge がないため不安定であり、放っておくと真空に崩壊してしてしまうと考えられています。この不安定性は、brane の上の world volume 理論に tachyon があることと対応していると思われます。従って、これらの non-BPS 系が崩壊して真空に至る過程を world-volume 理論の立場で考えると、「tachyon が凝縮して、potential の minimum に落ち着くと、超対称的な真空になる」ということを表していると考えられます [1]。

この解釈は直観的には大変もっともらしいと思われますが、実際に証明してみせるのは容易ではありません。例えば、tachyon の potential の minimum が本当に超対称的な真空を表わすとすると、そこでのエネルギーは zero になっているはずです。最近、この tachyon の potential が string field theory を用いて計算され、この予想が確からしいことを示す非常に非自明な証拠が得られました。このことに関しては、高橋さんの報告を参照してください。

3 A Puzzle

前節で述べた解釈が本当に正しいことを示すには、さらに込み入った議論が必要になります。特に、これから述べるようなパズルがあります。

まず、Dp–$\overline{\mathrm{D}p}$ 系の場合を説明しましょう。Dp-brane と $\overline{\mathrm{D}p}$-brane とを一枚ずつ平行に重ねた系を考えます。このとき brane の上の有効理論は、$U(1)\times U(1)$ のゲージ理論で、$(+1,-1)$ という charge を持った tachyon (複素スカラー場) がいるような理論になります。この tachyon が凝縮すると、ゲージ対称性は半分破れて、diagonal な $U(1)_{\mathrm{diag}}$ が残ります。先ほど、tachyon が凝縮すると、Dp-brane と $\overline{\mathrm{D}p}$-brane が対消滅して、完全に消えてなくなり、超対称的な真空に落ち着くはずだと言いましたが、brane の world-volume 理論は消えてなくなる訳ではなく、$U(1)$ ゲージ理論になると言っているわけです。Non-BPS D-brane の場合も同様です。Non-BPS D-brane が 1 枚ある場合を考えると、これの上の world-volume 理論は、$U(1)$ ゲージ理論で、tachyon はこの $U(1)$ の charge を持ちません。すると、この tachyon が凝縮しても、やはり $U(1)$ ゲージ対称性は破れずに残ることになります。

これはどう理解したら良いのでしょうか？このパズルは何人かの人々によって議論され、まだ完全な理解に至ったという訳ではないと思いますが、とても面白くてもっともらしい解釈が与えられました [2, 3, 4]。これを簡単に説明しましょう。

まず、D3–$\overline{\mathrm{D3}}$ 系でやってみます。D3-brane と $\overline{\mathrm{D3}}$-brane をつなぐ F-string から tachyon (T と書く) が生じると言いましたが、D3-brane には D-string も端を持てるということを思い出すと、D3-brane と $\overline{\mathrm{D3}}$-brane をつなぐ D-string からも、やはり tachyon ($\tilde{T}$ と書く) が生じるということが予想されます。良く知られているように、D-string の端点はゲージ場の magnetic charge の source になるので、$\tilde{T}$ は、$U(1)\times U(1)$ の magnetic charge を持つことが分かります。注意したいのは、その符号で、T が $U(1)\times U(1)$ の $(+1,-1)$ という charge を持っていたのに対して、$\tilde{T}$ は $U(1)^{\mathrm{mag}}\times U(1)^{\mathrm{mag}}$ の $(+1,+1)$ という charge を持つことに P. Yi が気づきました [2]。(ここで、$U(1)^{\mathrm{mag}}$ は $U(1)$ の magnetic dual。) これは、$\overline{\mathrm{D3}}$-brane が D3-brane に対して向き付けが逆になっているために magnetic dual を考えるときに余計な負符号を拾うためです。従って、$\tilde{T}$ は、$U(1)_{\mathrm{diag}}$ の magnetic charge を持つことになります。そうすると、$\tilde{T}$ が凝縮すると、dual Meissner 効果によって、$U(1)_{\mathrm{diag}}$ は confine するはずです。このようにして、T が凝縮しても破れずに残る $U(1)$ 対称性は confinement を起こして見えなくなるということが結論されます。

一般の Dp–$\overline{\mathrm{D}p}$ 系の場合も同様で、Dp-brane と $\overline{\mathrm{D}p}$-brane との間をつなぐ D$(p-2)$-brane から tachyonic な $(p-3)$-brane が生じて、これが凝縮することによって、破れずに残ったゲージ対称性が confine する

という解釈ができます。特に、$p=2$ の場合が面白くて、この場合、D2-brane と $\overline{\mathrm{D2}}$-brane の間をつなぐ D0-brane は、D2($\overline{\mathrm{D2}}$)-brane の world-volume の上では instanton になります。そして、この instanton の効果を正しく取り入れることによって、confinement が起こることを示すことができます。これは、1977 年に Polyakov が 3 次元ゲージ理論の confinement を議論した時の方法を brane の物理として再現したことになっています。また、詳しいことは省略しますが、non-BPS D-brane についても、同様の解釈ができます [4]。

僕がこの話でもう一つ感動したのは、Dp–$\overline{\mathrm{D}p}$ 系のゲージ理論の中で F-string を構成する議論です。F-string の charge は $U(1)_{\mathrm{diag}}$ に関する electric flux によって担われることが容易に分かります。しかし、$U(1)_{\mathrm{diag}}$ は confinement を起こすと言ったので、この electric flux はぼやっと広がっているわけにはいかず、細いひも状に束ねられることが予想されます。これは超伝導体に磁場をかけた時の磁力線の様子と同じです。このようにして細いひも状になった electric flux が F-string であると解釈されます。これは、その昔、ハドロンを記述する模型だった頃の string と状況が非常に良く似ています。QCD ではカラー電荷は confinement を起こすので、quark のカラー電荷に関する flux はやはり細長いひも状になるでしょう。これが QCD における string でした。string はその後、重力を記述する理論の fundamental な object としての地位を築く訳ですが、ここにきて、再び string は Dp–$\overline{\mathrm{D}p}$ 系のゲージ理論の中の electric flux として再解釈されることになったわけです。

4 Op-$\overline{\mathrm{D}p}$ system

さて、ここでもう一つ別の non-BPS 系を紹介しましょう。Orientifold p-plane と $\overline{\mathrm{D}p}$-brane を平行に重ねた、Op–$\overline{\mathrm{D}p}$ 系です。Op-plane が保つ SUSY の成分は Dp-brane と同じなので、これと $\overline{\mathrm{D}p}$-brane を重ねると、やはり超対称性は完全に破れます。Dp–$\overline{\mathrm{D}p}$ 系と大きく異なる点は、tachyon がないことです。また、orientifold plane にはいくつかの種類があり、それに応じてゲージ群が $O(n)$ や $USp(2n)$ であるような world-volume 理論が得られるという点も、様々な応用を考える上で面白いところです。

良く知られているように、摂動論的に定義できる orientifold plane には Op^--plane と Op^+-plane の 2 種類があって、Op^--plane に Dp-brane を n 枚重ねると $O(2n)$ ゲージ理論、Op^+-plane に Dp-brane を n 枚重ねると $USp(2n)$ ゲージ理論が得られます。では、これらの orientifold plane に $\overline{\mathrm{D}p}$-brane を重ねたらどうなるでしょうか？これを考えるには、$\overline{\mathrm{D}p}$-brane の R-R charge が Dp-brane と逆符号になっていることを open string の言葉で解釈しなおしてやれば良くて、その結果、brane 上の fermion に対する Ω-projection が boson の場合の逆になることが分かります [5]。

これを利用した面白い議論がいくつかあるので、紹介しましょう。

Type I 弦理論は、Type IIB 弦理論に O9$^-$-plane と 16 枚の D9-brane を入れたものと解釈でき、$O(32)$ のゲージ対称性を持っていました。これの真似をして、Type IIB 弦理論に、O9$^+$-plane を導入しようとすると、今度は 16 枚の $\overline{\mathrm{D9}}$-brane を入れないとアノマリーが正しく相殺されないことが分かります。こうして得られた理論は、$USp(32)$ のゲージ対称性を持つ、tachyon のない non-SUSY な 10 次元の string 理論になっています。先に言ったルールによると、open string から出る fermion は $USp(32)$ の adjoint 表現ではなく、反対称表現に属しているため、超対称性は explicit に破れています。また、このことを考慮に入れて初めて、アノマリーが正しく相殺されることを確かめることができます [5]。

また、Op–$\overline{\mathrm{D}p}$ 系が tachyon を出さずに超対称性を破るという特徴を利用して、現実の世界の SUSY braaking を説明しようという試みもなされています。これについては、例えば、[6] などを参照してください。

それから、もう一つ面白い応用として、non-SUSY なゲージ理論の双対性に関する議論があります。O3–$\overline{\mathrm{D3}}$ 系を考えたいのですが、その前に、O3-plane の S-duality について復習しておきます。O3$^+$-plane に n 枚の D3-brane を重ねると、brane 上の理論は、ゲージ群が $USp(2n)$ であるような 4 次元の $N=4$ SYM

になります。これの S-dual は昔から良く知られていて、ゲージ群が $SO(2n+1)$ の $N=4$ SYM になります。この理論を再び brane の言葉で解釈すると、O3$^-$-plane に D3-brane が $n+1/2$ 枚重なったものと思うことができます。O3$^-$-plane に D3-brane が 1/2 枚重なったものというのは、D3-brane の O3$^-$-plane に関する鏡像が同じ D3-brane になっている場合で、この D3-brane は O3$^-$-plane から剥れることができずに stuck されています。しばしば、この O3$^-$-plane に 1/2 D3-brane が重なったものを $\widetilde{\mathrm{O3}}^-$-plane と呼びます。上で言ったことをまとめると、O3$^+$-plane の S-dual は $\widetilde{\mathrm{O3}}^-$-plane である、ということが出来ます [7]。

それでは、O3$^+$-plane に $\overline{\mathrm{D3}}$-brane を n 枚重ねたものを考えてみましょう。このとき、brane 上の理論は non-SUSY な $USp(2n)$ ゲージ理論になります。この理論の S-dual は、先ほどの議論から $\widetilde{\mathrm{O3}}^-$-plane に $\overline{\mathrm{D3}}$-brane を n 枚重ねたような理論になるはずです。これは、O3$^-$-plane に $\overline{\mathrm{D3}}$-brane が $(n-1/2)$ 枚重なったものと思うことが出来るので、brane 上の理論は、non-SUSY な $SO(2n-1)$ ゲージ理論になりそうです。この議論で予想されることは、non-SUSY な $USp(2n)$ 理論と non-SUSY な $SO(2n-1)$ 理論が互いに dual な関係にあるということです [8]。試しに、't Hooft の anomaly matching condition が成り立つかどうか調べてみると、確かに成り立っていることがすぐに示せます。この例は、non-SUSY なゲージ理論に対しても弦理論が有用であることを示す大変興味深い例になっていると思います。

5 より大胆に

ここで、もう一歩踏み込んで、次のような主張をしてみます。

主張 Type I, II 弦理論の低エネルギーの振る舞いは（少なくとも topological な性質は）次のような 10 次元ゲージ理論で記述される:

$$\begin{array}{ccccl} \text{Type I} & : & O(N+32)\times O(N)\ \text{theory} & \text{with} & \text{tachyon in (vec.,vec.)}, \\ \text{Type IIA} & : & U(N)\ \text{theory} & \text{with} & \text{tachyon in adjoint rep.}, \\ \text{Type IIB} & : & U(N)\times U(N)\ \text{theory} & \text{with} & \text{tachyon in } (\square,\square^*), \end{array}$$

(ただし、$N\to\infty$ の limit を考える。)

ここで、Type I と Type IIB は D9-$\overline{\mathrm{D9}}$ 系のゲージ理論で、Type IIA は non-BPS D9-brane のゲージ理論のことです。Type I では、O9$^-$-plane がいるためにゲージ群が直交群になり、D9-brane の枚数が $\overline{\mathrm{D9}}$-brane よりも 16 枚だけ多くないと anomaly が正しく相殺されないことが分かるので、$O(N+32)\times O(N)$ ゲージ理論になっています。

このように主張してみましたが、これらのゲージ理論の定義がきっちり与えられている訳ではないので、どこまで正しい主張をしているのかかなり曖昧ですが、ここで言いたいのは以下のようなことです。

超弦理論の低エネルギーの振る舞いは、これまでは超重力理論で記述するのが一般的でした。このとき、D-brane などのソリトンは超重力理論の古典解として記述されます。これに対して、次節で説明するように、上の 10 次元のゲージ理論の古典解を調べると、知られている D-brane の spectrum を再現することが示せるばかりではなく、超重力理論では見えなかった、新しいタイプの D-brane の存在まで予言されます。ここで、上のゲージ理論の古典解と言いましたが、実際には運動方程式を解いて解を求める訳ではなく、topological な charge を調べるだけなので、理論の詳細に依らずに予言が出来るわけです。超重力理論では見えなかった D-brane というのは安定な non-BPS D-brane のことで、超対称性を破って初めて見えるものです。上の 10 次元ゲージ理論はいずれも超対称性の破れた理論であり、そのために定量的な解析は非常に困難になるのですが、そのおかげでこうした non-BPS な D-brane を正しく取り入れることができたとも言えます。

このように、超弦理論には超重力理論では捕えきれない自由度があるので、そうした自由度まで含めて超弦理論の低エネルギーの振る舞いを正しく記述するには超重力理論を超える必要があります。上であげた 10 次元ゲージ理論は、少なくとも topological な性質を見る限りでは、超重力理論に取って替わるべき理論であると思えるのです。さらに言えば、第 3 節の最後で触れたように、このゲージ理論には F-string も含まれているように思えます。従って、重力など、弦理論の自由度は全てこのゲージ理論で記述できるのではないかと期待することは、それほど不自然なことではないと思います。

さて、こうした主張を一旦認めると、大胆な予言がいろいろ出てきます。例えば、理論の真空は超重力理論で考える場合よりも遥かに豊かな構造を持っていることが分かります。例として、Type IIB の場合をやりましょう。Type IIB は $U(N)\times U(N)$ ゲージ理論で記述されましたが、ここで tachyon が凝縮すると、diagonal な $U(N)$ に破れると思われています。理論の真空 $\mathcal{V}_{\rm IIB}$ は tachyon の VEV で parameterize されるので、

$$\mathcal{V}_{\rm IIB}=(U(N)\times U(N))/U(N)\simeq U(N) \tag{5.1}$$

のようになります。これは topological に non-trivial で、実際、

$$\pi_{8-p}(\mathcal{V}_{\rm IIB})=\begin{cases}\mathbb{Z} & (p:\mathrm{odd})\\ 0 & (p:\mathrm{even})\end{cases} \tag{5.2}$$

のように non-trivial な homotopy を持ちます。実は $\pi_{8-p}(\mathcal{V}_{\rm IIB})$ は Dp-brane の charge に対応しており、(普通の 't Hooft-Polyakov monopole の時 magnetic charge が $\pi_2(\mathcal{V})$ で表されたのと同じ理屈です。) Type IIB の D-brane の spectrum を正しく再現していることも分かります。

同様に、時間一定面における場の配位空間 $\mathcal{C}_{\rm IIB}$ も、non-trivial な topology を持っており、特に $\pi_1(\mathcal{C}_{\rm IIB})\neq 0$ であることが分かります。これを示すには、tachyon 場が空間的無限遠の S^8 では $\mathcal{V}_{\rm IIB}$ に値をとることに注意し、 tachyon 場の S^8 における配位を S^1 に値をとるパラメータ θ $(0\leq\theta\leq 2\pi)$ に沿って連続的に変形していくことを考えます。そうすると、tachyon 場は $S^1\times S^8$ から $\mathcal{V}_{\rm IIB}$ への写像を定義することになりますが、これが topological に non-trivial であることを示せれば、配位空間に non-trivial な cycle があることが分かる訳です。ここで、$\theta=0$ で tachyon 場が場所に寄らず一定である場合（真空の配位）を考え、ゲージ変換によって S^8 上の一点における tachyon 場の値は θ によらず一定に取れることを考慮に入れると、tachyon 場は S^9 から $\mathcal{V}_{\rm IIB}$ への写像を定義すると言い直すことができます。従って、これは $\pi_9(\mathcal{V}_{\rm IIB})$ の元を定義することになりますが、 $\pi_9(\mathcal{V}_{\rm IIB})=\mathbb{Z}$ なので、non-trivial な topology を持つことが分かります。

このように場の配位空間に non-trivial な cycle があるときには、図 1 から想像できるように、sphaleron と呼ばれる negative mode を一つ持つ古典解が存在することが予想されます。

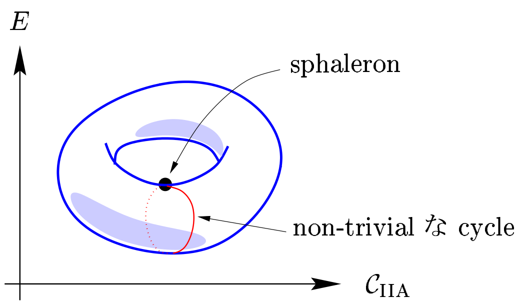

図 1: 縦軸にエネルギー、横軸に場の配位をとった図。配位空間がこの図のように non-trivial な cycle を持つとき、cycle の頂上が最小になるように cycle を選ぶと、その頂上に対応する配位は negative mode (cycle に沿って落ちる方向への変分に対応) を一つ持った古典解になります。

Type II 弦理論の non-BPS D-brane は、このようにして得られる sphaleron (あるいはその高次元版) に他ならないということが [9] によって主張されました。上の例で言うと、この sphaleron は Type IIB の

non-BPS D0-brane と解釈されます。この non-BPS D-brane には tachyon がいましたが、これが sphaleron の negative mode にちょうど対応しているということも分かります。

6 K 理論

それでは、topological に安定なソリトンを考えていくことにしましょう。まず、Type IIB を考えてみます。前節で言ったように、この理論は D9–$\overline{\rm D9}$ 系のゲージ理論によって記述されます。D9-brane と $\overline{\rm D9}$-brane が N 枚ずつあると、$U(N)\times U(N)$ ゲージ理論になりますが、この 2 つの $U(N)$ のゲージ場が住む rank N の (複素) ベクトル束をそれぞれ E と $\widetilde{E}$ で表すことにします。この D9–$\overline{\rm D9}$ 系を topological に分類するためにぴったりの概念が数学の方では古くから知られていました。それは K 群と呼ばれる群で、

$$K(X)=\left\{\,(E,\widetilde{E})\;\middle|\; E,\,\widetilde{E}\text{ は }X\text{ 上の複素ベクトル束}\right\}\Big/\!\sim \tag{6.1}$$

で定義されます。ここで、同値関係 “$\sim$” は

$$\begin{aligned} &(E,\widetilde{E})\sim(E',\widetilde{E}')\\ \Leftrightarrow\quad &{}^{\exists}H,{}^{\exists}H' : X\text{ 上の複素ベクトル束 }\ \text{s.t. }(E\oplus H,\widetilde{E}\oplus H)\simeq(E'\oplus H',\widetilde{E}'\oplus H') \end{aligned} \tag{6.2}$$

によって定義されます。(“$\simeq$” はベクトル束の組として同型という意味。)

この $K(X)$ の物理的な意味を説明しましょう。X は今考えている時空を表わす多様体で、E と $\widetilde{E}$ は上で述べたように、それぞれ D9-brane と $\overline{\rm D9}$-brane の上のゲージ場が定義される X 上のベクトル束です。(6.2) の $\oplus$ は brane を重ねる操作に対応していて、$(E,\widetilde{E})$ を $(E\oplus H,\widetilde{E}\oplus H)$ にする操作は、もともとの配位 $(E,\widetilde{E})$ に D9-brane と $\overline{\rm D9}$-brane の対 (H,H) を重ねたことに対応しています。従って、同値関係 (6.2) は、D9–$\overline{\rm D9}$ pair の対生成や対消滅で移り合えるものは同一視しなさい、という意味だと解釈できます。このような考察により、Type IIB の D-brane charge は $K(X)$ によって分類されるということが Witten によって主張されました [10]。

Type IIA や Type I の D-brane も同様に、それぞれ、$K^1(X)$, $KO(X)$ という K 群による解釈が出来ます。ここで、$KO(X)$ は $K(X)$ の定義で複素ベクトル場だったところをすべて実ベクトル場に置き換えたもので、これは Type I D9-$\overline{\rm D9}$ 系のゲージ群が real な Lie 群であったことを反映しています。$K^1(X)$ の定義は次の通りです。

$$K^1(X)=\left\{\,(E,\alpha)\;\middle|\;\begin{array}{l}E\text{ は }X\text{ 上の複素ベクトル束}\\ \alpha\text{ は }E\text{ の自己同型}\end{array}\right\}\Big/\!\sim \tag{6.3}$$

ここで、同値関係 “$\sim$” は

$$\begin{aligned} &(E,\alpha)\sim(E',\alpha')\\ \Leftrightarrow\quad &\left\{\begin{array}{l}{}^{\exists}H,{}^{\exists}H' : X\text{ 上の複素ベクトル束},\\ {}^{\exists}\beta,{}^{\exists}\beta' :\ \text{それぞれ }H,\,H'\text{ の自己同型で、恒等写像と homotopic なもの}\\ \quad\text{s.t. }(E\oplus H,\alpha\oplus\beta)\simeq(E'\oplus H',\alpha'\oplus\beta')\end{array}\right. \end{aligned} \tag{6.4}$$

これの物理的な解釈は Hořava によって与えられました [11]。E は non-BPS D9-brane のゲージ場が定義される X 上のベクトル束で、α は non-BPS D9-brane の上の tachyon 場 T で真空期待値が $|\langle T\rangle|=1$ となるように規格化したものを用いて、$\alpha=-\exp(\pi i T)$ と表される operator です。同値関係 (6.4) は、tachyon 場の配位が non-trivial な topological charge を担わないような non-BPS D9-brane は自由に生成消滅できるということを表しています。

これらの群が、どんな様子であるのかを少し書き下してみましょう。まず、$K(X)$ や $KO(X)$ は、

$$K(X) = \mathbb{Z} \oplus \widetilde{K}(X) \quad (6.5)$$
$$KO(X) = \mathbb{Z} \oplus \widetilde{KO}(X) \quad (6.6)$$

のような形に書くことができ、$\mathbb{Z}$ は D9-brane charge と解釈できることが示せます。$\mathbb{Z}$ の値は anomaly の考察から、Type IIB では zero、Type I では 32 に固定されているので、以下の考察では忘れることにします。そして、$p+1$ 次元方向に一様に延びた Dp-brane を表したかったら、これに transverse な空間 $\mathbb{R}^{9-p}$ を一点コンパクト化した S^{9-p} を X として採用すれば良いので、この Dp-brane charge は $K(S^{9-p})$ などで表されることになります。表にまとめてみると、

	p	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
IIA	$K^1(S^{9-p})$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$
IIB	$\widetilde{K}(S^{9-p})$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0
I	$\widetilde{KO}(S^{9-p})$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$

のようになります。$\mathbb{Z}$ があるところは BPS な D-brane の charge で、知られている spectrum をぴったり再現していることが分かります。Type I では、$p=-1,0,7,8$ のところに $\mathbb{Z}_2$ があることに注意してください。この $\mathbb{Z}_2$ は、1 つでは安定だけれど、2 つ重なると崩壊してしまうような non-BPS D-brane が存在することを示しています。これらは couple する R-R field がないので、R-R charge を持たないけれど、non-trivial な charge を持つ安定な non-BPS D-brane です。

K 群と R-R charge の対応は Witten の論文よりも前に [12] によって示唆されていました。$K(X)$ は、係数を $\mathbb{Q}$ に拡大すれば、

$$\begin{array}{ccc} K(X)\otimes\mathbb{Q} & \simeq & H^{\mathrm{even}}(X;\mathbb{Q}) \\ \Psi & & \Psi \\ (E,\widetilde{E}) & \to & \sqrt{\hat{A}(X)}\left(\mathrm{ch}(E)-\mathrm{ch}(\widetilde{E})\right) \end{array}$$

のような対応で、偶数次の cohomology 群を足し上げたものと同型であることが知られています。ここで右辺はちょうど D-brane の上の Chern-Simons 項を通じて R-R charge の source になっており、これを積分したものが R-R charge を与えます。普通の BPS な D-brane を考える場合は、D-brane charge は R-R charge に他ならないので、この対応によって、K 理論で考えても、cohomology で考えても同じになります。しかし、この対応では、係数を $\mathbb{Q}$ に拡大しているために $\mathbb{Z}_2$ のような charge は見えなくなってしまっています。超重力理論の立場では、専ら cohomology が使われてきましたが、これでは D-brane の charge を完全に捉えることはできず、特に R-R charge に対応しない D-brane charge も正しく取り入れるには K 理論を用いなければいけません。また、D-brane が non-trivial な cycle にまきついて、一見安定に思われる配位も K 理論で考えると不安定であることが示されることがあります [13]。これは、D-brane と $\overline{\mathrm{D}}$-brane の対生成を介して崩壊するような過程が起こり得ることを意味しています。

まとめると、弦理論を正しく解析するには、D-brane と $\overline{\mathrm{D}}$-brane の対生成 non-BPS D-brane の生成 R 度を考慮に入れる必要があり、そのためには、従来の cohomology を用いる charge の分類では不十分で、K 理論を用いる必要がある、ということだと思います。

7 おわりに

規定の枚数を超えたようなので、このへんで終わりにしたいと思います。この報告をまとめるにあたって、研究会では紹介したいくつかの話題をカットせざるを得なかったことをお詫びいたします。

後半では non-BPS 系を考えることによって超重力理論では見えなかった所まで踏み込むことができるということを説明してきました。しかし、うまく行っているのは結局のところ topological な話ばかりです。今後の課題は、いかにして dynamics を取り入れるか？いかにして K 理論を超えるか？というところだと思っています。

参考文献

[1] A. Sen, hep-th/9904207, and references therein. *"Non-BPS States and Branes in String Theory,"*

[2] P. Yi, Nucl. Phys. **B550** (1999), 214, hep-th/9901159.
"Membranes from Five-Branes and Fundamental Strings from Dp-Branes."

[3] A. Sen, JHEP **9910** (1999) 008, hep-th/9909062
"Supersymmetric World-volume Action for Non-BPS D-branes."
A. Sen, JHEP **9912** (1999) 027, hep-th/9911116
"Universality of the Tachyon Potential."

[4] O. Bergman, K. Hore and P. Yi, Nucl. Phys. **B580** (2000) 289, hep-th/0002223.
"Confinement on the Brane."

[5] S. Sugimoto, Prog. Theo. Phys. **102** (1999) 685, hep-th/9905159. *"Anomaly Cancellations in the Type I D9-$\overline{D9}$ System and the USp(32) String Theory."*

[6] G. Aldazabal, L. E. Ibanez and F. Quevedo, JHEP **0001** (2000) 031, hep-th/9909172.
" Standard-like Models with Broken Supersymmetry from Type I String Vacua. "
C. Angelantoni, I. Antoniadis, G. D'Appollonio, E. Dudas and A. Sagnotti,
Nucl. Phys. **B572** (2000) 36, hep-th/9911081.
" Type I Vacua with Brane Supersymmetry Breaking. "

[7] E. Witten, JHEP **9807** (1998) 006, hep-th/9805112.
" Baryons and Branes in Anti de Sitter Space. "

[8] A. M. Uranga, JHEP **0002** (2000) 041, hep-th/9912145.
" Comments on Non-Supersymmetric Orientifolds at Strong Coupling. "

[9] J. A. Harvey, P. Horava and P. Kraus, JHEP **0003** (2000) 021, hep-th/0001143.
"D-Sphalerons and the Topology of String Configuration Space."

[10] E. Witten, JHEP **9812** (1998) 019, hep-th/9810188.
" D-branes and K-theory. "

[11] P. Horava, Adv. Theo. Math. Phys. **2** (1999) 1373, hep-th/9812135.
"Type IIA D-branes, K-Theory and Matrix Theory."

[12] R. Minasian and G. Moore, JHEP **9711** (1997) 002, hep-th/9710230.
"K-Theory and Ramond-Ramond Charge."

[13] D. E. Diaconescu, G. Moore and E. Witten, hep-th/0005090.
"E_8 Gauge Theory, and a Derivation of K-Theory from M-Theory."