超弦理論の魅力

京都大学基礎物理学研究所／杉本茂樹

1　はじめに

弦理論はもともとはハドロンの物理を記述するための理論として'70年ごろに見出された理論でしたが、その後の発展によって幾度もその姿を大きく変え、'80 年代の後半頃には究極の理論の候補と呼ばれるようにまでなりました。しかし、話はそれで終わりではなく'90年代半ば頃から再び激動の時代を迎えることになります。現在ではそうした発展はやや落ち着いて来つつありますが、その魅力は依然として衰えることはなく、日本でも多くの研究者が弦理論の研究を行っています。

歴史が順当に繰り返されるとしたら、もうそろそろ次の大発展が起こっても良い頃です。今回は基研創立 50 周年記念シンポジウムということで、とても良い機会ですので、これまでの弦理論の発展を概観しつつ、今後の展望を考えていきたいと思います。まずは 2 節で弦理論がどういう理論だったのかを軽くおさらいして、3 節で統一理論としての超弦理論について解説します。3 節の内容は、'84 年頃に起こった弦理論の first revolution と呼ばれる大発展の成果です。これは僕が大学院に入るずっと前の話で、僕は必ずしもその道の専門家という訳ではないのですが、超弦理論を研究する上で心の拠り所となるところなので、敢えて加えてみました。4 節では '94 年頃から始まった second revolution と呼ばれる大発展についてレビューをします。5 節ではこれまでの発展によって果たして弦理論は究極の統一理論にどれだけ近づくことができたのかを反省しつつ、今後の方向性を探りたいと思います。最後に 6 節で、タイトルにもした超弦理論の魅力をまとめて締めくくります。

2　超弦理論とは？

弦理論は現在のところ点粒子だと思われている素粒子が実はひもであるという仮説に基づく理論です。これだけ聞くととても単純なことのようですが、これから見ていくようにいろいろと奇跡的なことが起こり、大変魅力的な理論なのです。まず注目すべきことは、

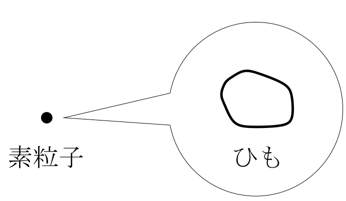
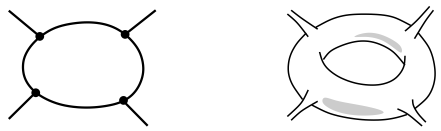


図 1: 良く見るとひも状

この理論の構成要素がたった一つのひもであるということです。現在の素粒子の標準理論では各素粒子に対応する場をいちいち導入しなければならなかったことを思い出すと、これは大変面白い特徴です。ひもには様々な振動モードがありますが、様々な素粒子がその

振動モードと対応することで、クォーク、レプトン、光子、重力子などあらゆる素粒子を一つのひもで記述できる可能性を期待させるわけです。実際ひもを量子化すると、その振動モードの一つに重力子を含むことがすぐに分かります。クォーク、レプトン等がどう実現されるかについては、また 3 節で議論することにしますが、とりあえず重力を自然に含むということは弦理論の重要な特徴であり、多くの人々がこの理論に魅せられる大きな理由の一つだと思います。通常は重力を量子化しようとしてもどうしても発散が生じてしまい、これをいかに解消するかが大きな問題でした。驚くべきことに弦理論では危険な発散が生じず、consistent な量子重力理論になるのです。

1-loop の Feynman 図を例にとって、その様子を絵的説明すると次のようになります。まず通常の場の理論の場合、1-loop の Feynman 図で loop をまわる運動量の積分を loop の長さの積分で置き換えたとき、この loop がつぶれる（長さがゼロになる）ところの寄与が一般に紫外発散を生じます。これに対し、弦理論の場合、点粒子がひもに拡張されるのに対応して Feynman 図における線が面に置き換わり、図 2 の右図のような形になります。ここでトーラスを図 3 の右図のように対辺が同一視された平行四辺形で表すことにす



場の理論　　　　弦理論

図 2: 1-loop の Feynman 図

ると、場の理論のつぶれた loop に対応するのは図 3 で実線で書いた cycle がつぶれて図 4 の左図のように平行四辺形が横長になった状況であることが分かります。ところが、こ

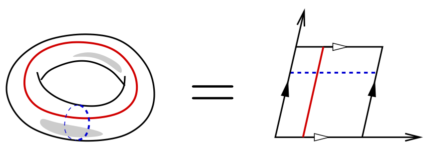


図 3: トーラス

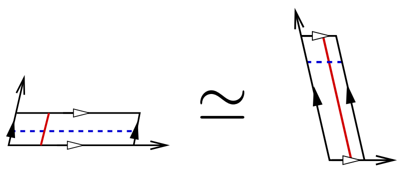


図 4: どちらも同じトーラス

の平行四辺形の形を変えずに横に倒すと、図 4 の右図のように実線で書いた cycle が長く伸びたようなトーラスになります。こちらは場の理論におけるつぶれた loop に対応する Feynman 図ではなく、紫外発散は生じません。弦理論は、このようにトーラスを縦に見るか横に見るかという見かけ上の違いにはよらずに振幅が定義されるように作られているため、その結果として紫外発散が除去されることになります。ここでは最も簡単な場合で説明しましたが、より複雑な Feynman 図についても、本質的に同じ原理によって危険な発散が除去されていることが分かります。このようにして、consistent な重力の量子論になるわけです。

ただし、上のようなメカニズムがうまく働いて矛盾のない理論になるためには様々な整合性の条件が必要になります。特に著しい特徴は、理論の整合性からひもの住める時空が非常に制限されるということです。今のところ、4 次元の Minkowski 時空を含む時空に安定して住めるものは基本的に 5 つのみが知られており、それぞれ Type I, Type IIA, Type

IIB, Heterotic $SO(32)$, Heterotic $E_8 \times E_8$ のように呼ばれています。その主な特徴を表 1 にまとめてみました。ここで、ひもの種類に open と closed がありますが、これらは図 5

弦理論	Type I	Type IIA	Type IIB	Het $SO(32)$	Het $E_8 \times E_8$
ゲージ群	$O(32)$	$U(1)$	なし	$SO(32)$	$E_8 \times E_8$
ひも	open + closed	closed	closed	closed	closed
超対称性	$N=1$	$N=2$	$N=2$	$N=1$	$N=1$
時空の次元	10	10	10	10	10

表 1: 5 つの超弦理論

のように端のあるひもと端のない輪になったひものことでそれぞれ開弦（open string）、閉弦（closed string）と呼ばれています。超対称性というのは理論に含まれるボソンとフェル

図 5: 開弦と閉弦

ミオンを入れ換えるような変換に関する対称性のことで、表には $N=1$ や $N=2$ と書かれていますが、これは超対称変換の数を表しています。表 1 を見てすぐに分かることは、どれも時空の次元が 10 次元であり、超対称性があることです。これらは弦理論の驚くべき予言です。現在のところ、現実の世界では 4 次元を超える次元の存在も超対称性もまだ実験で確認されていませんが、非常に高いエネルギースケールでは時空が 10 次元で超対称性があるということを示唆しているわけです。

表 1 に挙げた 5 つの弦理論は超対称性があるために超弦理論と呼ばれています。以下ではこれらの超弦理論について議論していきます。

3　大統一理論と超弦理論

前節で説明した超弦理論がいかにして現実世界を記述しうるかを考えるために、まず現実の素粒子を簡単に復習しておきましょう。現在までに見つかっている素粒子をまとめると、表 2 のようになります。大まかに分けると、ゲージ粒子と物質粒子とがあり、ゲージ

ゲージ群	$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$
ゲージ粒子	G 　 $W^{\pm}$ Z 　 γ

物質粒子	クォーク	レプトン
第一世代	$u,\ d$	$e,\ \nu_e$
第二世代	$c,\ s$	$\mu,\ \nu_\mu$
第三世代	$t,\ b$	$\tau,\ \nu_\tau$

表 2: 現在までに見つかっている素粒子

粒子は強い力、弱い力、電磁気力を媒介する粒子で $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ というゲージ対称性に伴って出てきます。物質粒子はクォークとレプトンとからなり、何故か同じ量子数を持つ粒子が 3 つずつ現れるという 3 世代構造をなしています。何故このような世代構

造があるのかは、現在の素粒子論の最大の謎の一つで、これをうまく説明するような理論が背後に存在することを強く示唆しています。

表 2 に書いたように、力を媒介するゲージ粒子は $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ というゲージ群と対応していますが、このゲージ群を一つの単純群にまとめて力を統一しようともくろむのが大統一理論（GUT）の基本的な考え方です。典型的な例は、表 3 のようにゲージ群が $SU(5)$、$SO(10)$ や E_6 であるような理論で、それぞれ $SU(5)$ GUT、$SO(10)$ GUT、E_6 GUT などと呼ばれています。これらの大統一理論では、このようにゲージ群が一つにまと

ゲージ群	$SU(5)$	$SO(10)$	E_6
物質粒子	$(\psi_{10},\psi_{5^*},\psi_1)\times 3$ 世代	$\psi_{16}\times 3$ 世代	$\psi_{27}\times 3$ 世代

表 3: 典型的な大統一理論

まるだけではなく、それに伴って物質粒子もうまくまとまります。例えば表 3 の $SO(10)$ GUT における物質粒子は ψ_{16} のように書きましたが、これは $SO(10)$ の 16 次元表現に属する粒子という意味です。表 2 にあるクォーク、レプトンは、（ワイル・フェルミオンで表すと）それぞれの世代につき全部で 16 成分あるのですが、これらがうまい具合にぴったりと ψ_{16} の中に納まっているというわけです。

大統一理論は細かな部分を除けば大変美しい理論ですが、これももちろん究極の統一理論であるとは思われていません。明らかな欠陥は、重力が取り入れられていないことです。前節でも触れたように、通常の場の理論と同様の方法で重力を量子論として定式化しようとするとどうしても発散が生じてしまうため、単に一般相対論と大統一理論を組み合わせるだけでは無矛盾な理論にはなりません。仮に、重力の量子化の問題が解決できたとしても、せっかく大統一理論を考えることによって強い力、弱い力、電磁気力が統一されたのに、重力だけ特別扱いするというのはやや不満が残ります。重力も含めてあらゆる力が一つに統一されることを期待するのは自然なことでしょう。さらに言うと、大統一理論をもってしても、登場する素粒子がどうしてゲージ粒子と 3 世代の物質粒子という構造をしているのかという素朴な疑問にはなかなか答えることができません。ここでもし、ゲージ粒子や各世代の物質粒子を別々に導入するのではなく、これらの粒子すべてを統一的に表すことができたとしたら、それこそ究極の統一理論と呼ぶにふさわしい理論であると言えるのではないでしょうか。

さて、こうした問題を踏まえて、再び超弦理論を考えてみます。前節で述べたように、超弦理論は重力を含む発散のない理論であり、あらゆる粒子が一つのひもから出るということから、上で挙げた問題をうまく解決できる可能性を秘めています。実は、前節で登場した 5 つの超弦理論のうち、特に Heterotic $E_8\times E_8$ 理論を考えると奇跡が起こるのです。

まず、観測事実として、現実世界は 4 次元であるということを知っています。ということは、超弦理論が予言する 10 次元時空のうちの余分な 6 次元空間（これを以下では M_6 と書くことにします。）はコンパクトで現在までの観測にはかからないくらいとても小さいことが分かります。この小さく丸まった 6 次元空間 M_6 がどんな多様体であるかによって、我々の住む 4 次元世界で実現される超対称性の数、ゲージ群や物質場の種類などが決まります。ここで、今回の柳田さんのお話にもあるように、観測事実から 4 次元でミニマルな

超対称性（$N=1$ 超対称性* ）が示唆されているので、これをインプットしてみます。すると、M_6 は Calabi-Yau 多様体と呼ばれる多様体の一種であることが分かります。ここで、Calabi-Yau 多様体というのは、今の場合、ホロノミー群が $SU(3)$ であるような多様体のことです。これが何を意味するかというと、図 6 のように、M_6 上にフェルミオン場 ψ があったとして、これをある閉曲線に沿って平行移動させて行くと、一周回って元の点に戻ってきたときにその点の接平面での回転を表す $SO(6)$ の元 g を作用させた $g\psi$ の形になりますが、この g が常に $SO(6)$ の部分群の $SU(3)$ に属しているということです。6 次元の回

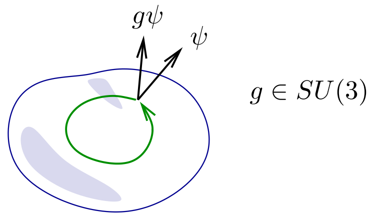


図 6: ホロノミー群

転群 $SO(6)$† は $SU(4)$ と同型で、 $SU(3)$ はその中に自然に埋め込まれます。$SO(6)$ のスピノル表現は $SU(4)$ の基本表現で 4 成分ありますが、そのうち $SU(3)$ で不変な成分が一成分あり、これが 4 次元で壊れずに残る $N=1$ の超対称性と対応するという仕組みです。

少し説明が長くなりましたが、このように時空の次元が 4 次元で $N=1$ 超対称性があるという観測から示唆される事実を用いると、余分な 6 次元空間 M_6 がコンパクトな Calabi-Yau 多様体であるということになりました。なんと、これだけ認めると、かなり自然に E_6 GUT らしきものが出てくるのです。このことをエッセンスだけ大雑把に説明してみます。まず、詳しい議論は省略しますが、アノマリー相殺などの議論から $E_8 \times E_8$ ゲージ場の field strength $F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ と曲率 2 形式 $R = \frac{1}{2}(R_{\mu\nu}{}^a{}_b) dx^\mu \wedge dx^\nu$ の間には

$$\int_\Sigma \mathrm{tr}(R \wedge R) = \int_\Sigma \mathrm{tr}(F \wedge F) \tag{3.1}$$

のような式が成立することが分かります。ここで Σ は M_6 の中の任意の 4 次元の部分多様体です。大雑把に言って、多様体 M_6 が曲がっているために左辺がゼロでなくなると、必然的にゲージ場が値をもたざるを得なくなるということを意味しています。この式を常に満たすようにする方法で一番簡単なのは R と F のゼロでない部分が同じ形であるようにすることです。これが唯一の方法であるとは言えませんが、他の運動方程式とも相性の良い最も単純ですっきりした方法で、minimal embedding と呼ばれています。そうしたとき、上で M_6 のホロノミー群が $SU(3)$ であることを思い出すと R は M_6 の局所回転群 $SO(6)$ の $SU(3)$ 部分群にあたる部分‡ に値を持つので、それにつられて F もゲージ群 $E_8 \times E_8$ のうちの片方の E_8 の $SU(3)$ 部分群にあたる部分に値を持つことになります。そうすると、E_8 の中でこの $SU(3)$ 部分群と可換でない部分の対称性は破れ、可換な部分だけが破

* 表 1 で $N=1,2$ という言い方が出てきましたが、これは 10 次元時空での超対称性の数を表していました。10 次元で $N=1$ 超対称性がある理論から 6 次元分をコンパクト化して 4 次元の理論を考えたとき、4 次元時空における超対称性の数は $N=0,1,2,4$ を取る可能性があります。

† より正確には $SO(6)$ というより、その普遍被覆群 $Spin(6)$ を考えています。

‡ これらの群の Lie 代数に値を持つことになります。

れずに残ります。E_8 の中でこの $SU(3)$ 部分群と可換な部分群というのは、実は E_6 なのです。表 3 に出てきた大統一理論のゲージ群の一つである E_6 がこうして自然に出てきました。ここで、大統一理論の時のように E_6 のゲージ群を始めから手で用意したわけはないことは注目に値します。4 次元で $N=1$ 超対称性があることを要求すると、余分な 6 次元空間のホロノミー群が $SU(3)$ になることと、E_8 の中で $SU(3)$ と可換な部分が E_6 であることが minimal embedding を通じてうまく組み合わさった結果です。

さらに、このような状況設定のもとで Dirac 演算子のゼロモードの数を数えると、E_6 の 27 次元表現に属する物質場 ψ_{27} が $\chi(M_6)/2$ 世代出てくるとことも分かります。ここで $\chi(M_6)$ は M_6 のオイラー数で、M_6 のトポロジーだけで決まる量です。こうして、表 3 にあげた E_6 GUT のゲージ群のみならず、物質粒子までもが Heterotic $E_8 \times E_8$ 超弦理論からうまいこと出てくることが分かりました。残念ながら、世代の数 $\chi(M_6)/2$ が 3 になるかどうかまでは予言できないのですが、とにかく同じ量子数を持つ粒子が何世代か繰り返し出てくるという構造はこのように自然に理解することができます。

感動すべきポイントをまとめると、

- **重力とゲージ場の両方があって初めて奇跡的に consistent になる。**

  Heterotic 超弦理論のように 10 次元で $N=1$ の超対称性がある場合、重力だけは consistent な理論にはならず、必然的にゲージ場を伴うことになります。実際、アノマリー相殺の議論は非常にきつい条件を与え、ゲージ群が $E_8 \times E_8$ や $SO(32)$ である場合に奇跡的に consistent な理論になることが分かります。[§] つまり、量子重力が他の力の源となる $E_8 \times E_8$（あるいは $SO(32)$）ゲージ場を要求したわけです。

- **もともと GUT を作ろうとして作られた理論ではないにも関わらず、GUT らしきものが出た。ゲージ群 E_6 のみならず物質場 ψ_{27} もちゃんと出る。しかも世代があることが自然に理解できる。**

  上ではとても大雑把な説明しかできませんでしたが、より詳しい議論を追っていくとまさにジグソーパズルがばしばしはまっていく感覚で、これが偶然だとはなかなか思えなくなります。

- **時空が 4 次元であること、超対称性が $N=1$ であること、GUT のゲージ群が E_6 であることが無関係ではないことを示唆している。**

  時空が 4 次元であることと $N=1$ 超対称性があることをインプットしたら、（完全に決まったとまでは言えませんが）とても自然に E_6 が出てきました。まだ時空が 4 次元であることを導き出せたわけではないので、結局何も言えていないではないかと誤解されることがありますが、そうではありません。時空の次元と超対称性の数と GUT のゲージ群という全く無関係であると思われていた事柄の背後にある深遠な関係を見出せたことは一歩前進です。

[§] 他にも $U(1)^{496}$ や $E_8 \times U(1)^{248}$ というゲージ群でもアノマリーは相殺されますが、これらに対応する超弦理論は未だ見つかっていません。超対称性のない理論なら、さらにいろいろな可能性がありますが、一般に、宇宙項や不安定なタキオンモードが生じるため、flat な時空が安定ではなくなります。

- **物質粒子もゲージ粒子も重力子もすべて同じひもから生じた。**

  物質粒子に対応するひも、ゲージ粒子に対応するひも、重力子に対応するひもなどを理論の中にそれぞれ独立に導入するわけではなく、一種類のひもから全ての素粒子が出てきます。これは究極の統一理論としてふさわしい性質でしょう。

ただし、もちろん問題はいろいろあります。おそらく最大の問題は真空の選び方の問題でしょう。上の議論では、観測事実と合うように、10 次元時空のうちの 4 次元は Minkowski 時空で、残りの 6 次元はコンパクトな多様体 M_6 になると仮定しましたが、何故こうなるのかについては今のところ指導原理がありません。こうした時空は超弦理論の運動方程式の解であるように選ぶ必要がありますが、少なくとも摂動論的にはその選び方は無数にあり、特に 6 次元分だけが小さくなる理由もありません。仮にこれを認めて M_6 を 6 次元の Calabi-Yau 多様体に限ったとしても、まだ選び方は無数にあり、コンパクト化のエネルギースケールや物質粒子の世代数などを予言することも今のところできないのです。それでは、低エネルギーでの明確な予言はあきらめて、とにかく観測事実をうまく再現するような多様体 M_6 を探そうという立場もあるでしょう。超弦理論を用いることで量子重力も取り込んだ大統一理論を得ることができるとしたら、それはそれで価値があります。しかし、今のところ、この無数にある真空の中で、実験や観測と細部までばっちり合うものがあるかと言うとこれもまだ見つかっておらず、本当にあるのかどうかも良く分からない状況です。

少し反省してみると、ここでの解析は弦理論の摂動論に基づくもので、非摂動的な効果は考慮に入れていませんでした。そうすると、なんらかの非摂動的な効果によって、正しい真空が一つに決まるのではないかと期待したくなります。しかし、そもそも超弦理論の非摂動論的な定式化はまだ確立しておらず、そうした効果を取り入れた解析は一般にとても難しいのです。

もう一つ、これはそれほど深刻な問題というわけではないかも知れませんが、仮にこの節で説明してきたシナリオがうまくいって Heterotic $E_8 \times E_8$ 理論が究極の統一理論だということになったとした場合、それでは何故 Hetero $E_8 \times E_8$ が選ばれたのか？ ということがやや疑問になります。超弦理論は表 1 に挙げたように一つではないので、他の超弦理論は何の役割も果たさないのか？ということも気になります。

こうした背景を念頭に置きながら、次節で超弦理論のさらなる発展を議論して行きましょう。

4 Second Revolution

’94 年頃から超弦理論は再び激動の時代を迎えました。超弦理論の非摂動論的な振る舞いに関連した大きな発見が相次ぎ、超弦理論という理論がそれまで想像されていたよりもはるかに奥の深い理論であることが明らかになりました。その主な発展を双対性、D-brane、M 理論という 3 つのキーワードに沿って解説してみたいと思います。

4.1 双対性

場の理論や弦理論において、見かけ上異なる二つの理論が量子論として等価になることがあります。そうした性質のことを双対性 (duality) と呼び、そのとき、そのような二つの理論は互いに双対 (dual) な関係にあるというような言い方をします。

これまでに超弦理論でも様々な双対性が見つかっています。ここでは特に T-duality、S-duality と呼ばれる双対性を説明しましょう。まず、T-duality ですが、これの典型的な例は Type IIA 理論を S^1_R (半径 R の S^1) でコンパクト化した理論と Type IIB 理論を $S^1_{1/R}$ (半径 $1/R$ の S^1) でコンパクト化した理論との間の双対性です。Type IIA 理論と Type IIB 理論は異なる理論ですが、どちらも 10 次元時空うちの空間方向の一つを S^1 にして、その半径をそれぞれの理論で R と $1/R$ になるように調節すると、実はこれら二つの理論が等価になるのです。この双対性は摂動論的な弦理論の枠組みの中できちんと示すことができ、その対応もはっきり分かっています。図 7 にその一例を示しましたが、Type IIA 側で S^1_R 方向に走るひもに対応するものは Type IIB 側で $S^1_{1/R}$ 方向に巻き付いたひもになります。S^1_R にコンパクト化すると、この方向の運動量は $1/R$ の整数倍になのでこの方向に走るひ

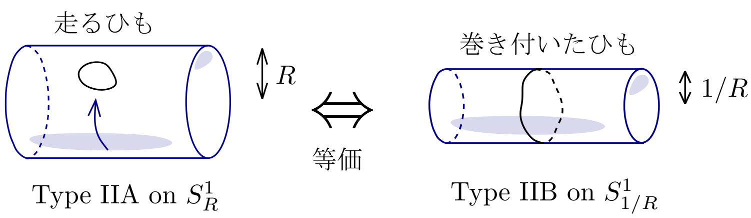


図 7: T-duality

もは $1/R$ の整数倍のエネルギーを持つことになります。一方 $S^1_{1/R}$ に巻き付いたひもの長さは $2\pi/R$ の整数倍になり、これにひもの張力 (今の単位では $1/2\pi$) を掛けると、こちらもやはり $1/R$ の整数倍のエネルギーを担うことが分かり、これらがちょうど対応しているというわけです。このように巻き付いたひもが登場するあたりが、弦理論ならではの現象です。特に R をゼロに持っていく極限を考えると、見かけ上、次元が違う二つの超弦理論が等価であることを物語っています。

S-duality の典型例は Type IIB 理論の自己双対性です。Type IIB 理論には、重力場の他にも様々な場が存在しますが、特に 2 階反対称テンソル場が二つあることが知られています。これらを $B_{\mu\nu}, C_{\mu\nu}$ と書くことにしましょう。ここで μ, ν は時空の座標をラベルする添え字で $0, 1, \ldots, 9$ の値を取り、これらの場は μ と ν の入れ換えに対して $B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}$ のように反対称に振る舞います。また、この理論における相互作用の強さを表すパラメータは g_s と書くことにします。このとき、この理論は

$$\begin{array}{ccc} g_s & \to & 1/g_s \\ B_{\mu\nu} & \to & C_{\mu\nu} \\ C_{\mu\nu} & \to & B_{\mu\nu} \end{array} \tag{4.1}$$

のように、g_s を $1/g_s$ で置き換え、$B_{\mu\nu}$ と $C_{\mu\nu}$ とを入れ換えた理論と等価になると信じられています。これは恐ろしい性質です。仮に $g_s \gg 1$ として、強結合な理論を考えると、これに双対な理論は $1/g_s \ll 1$ なので弱結合な理論になります。つまり、強結合の理論が弱

結合の理論が等価になるのです。弱結合の理論では散乱振幅などを摂動論を用いて精度良く計算することができますが、強結合の理論を解析するのは一般にとても困難です。しかし、この S-duality を用いると、強結合な理論の振る舞いも弱結合な理論を用いて解析できるようになるわけです。この S-duality は、完全に証明ができているわけではないのですが、例えば、低エネルギー有効作用が式 (4.1) の変換のもとで不変であることや場の理論における双対性との整合性などの多くの証拠から、ほぼ疑いようのないことであると信じられています。

ここでは Type IIA 理論や Type IIB 理論における双対性を説明しましたが、Type I 理論や Heterotic 超弦理論の間にも同様の双対性があることが知られています。その様子を描いたのが図 8 です。Type I 理論と Heterotic $SO(32)$ 理論は S-dual で、例えば弱結合な

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Type IIA}} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{T}"] & \boxed{\text{Type IIB}} \arrow[loop right, "\text{S}"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Type I}} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{S}"] & \boxed{\text{Het } SO(32)} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{T}"] & \boxed{\text{Het } E_8 \times E_8}
\end{tikzcd}$$

図 8: Duality Web

Type I 理論は強結合な Heterotic $SO(32)$ 理論と等価であるという具合です。このように、異なる超弦理論は実は双対性でつながっており、これを用いることで、非摂動論的な効果も含めた強結合での超弦理論の振る舞いを解析することが可能になるのです。

4.2 D-brane

再び Type IIB 理論を考えましょう。Type IIB 理論のひもは上で出てきた 2 階反対称テンソル場 $B_{\mu\nu}$ に関する電荷を持つことが知られています。これは、普通の点電荷がベクトル場 A_μ に関する電荷を持つ様子を素直にひもの場合に拡張したものです。そうすると、4.1 節で説明した Type IIB 理論の S-duality を信じると $C_{\mu\nu}$ に関する電荷を持つひも状の物体も存在しなければならないということになります。この $C_{\mu\nu}$ の電荷を持つひものことを D-string あるいは D1-brane と呼びます。さらに、この D1-brane に対して T-duality を使うとどうなるのかを調べてみると、Dp-brane と呼ばれる $(1+p)$ 次元 (時間方向が 1 次元と空間方向が p 次元) の物体も存在しないといけないということが分かります。ここで p の値は Type IIA 理論では偶数、Type IIB 理論では奇数をとります。弦理論はもともとひもの理論として定式化されましたが、実際にはひもだけの理論ではなく、Dp-brane という新たな役者が登場したわけです。

ここでは双対性を用いて Dp-brane を導入しましたが、具体的な構成法が Polchinski らによって与えられました。それは図 9 のように open string が端を持てる $(1+p)$ 次元の壁として Dp-brane が特徴付けられるというものです。D-brane という名前の ‘D’ の由来はこの open string がこの壁上に固定端境界条件（Dirichlet boundary condition）を持つところから来ています。この構成法は、一見するととても奇異な印象を受けるかも知れませんが、これで Dp-brane が持つべき電荷やエネルギーなどを正しく再現し、双対性とも

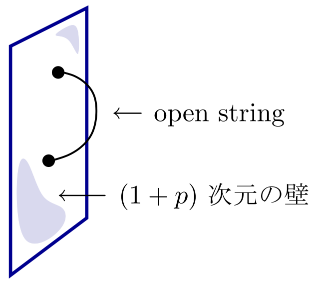


図 9: Dp-brane

矛盾ないことを示すことができます。実際、このように具体的に構成できることが見出されたおかげで様々な解析が可能になり、超弦理論の second revolution の原動力となったのです。

4.3 M 理論

今度は Type IIA 理論を考えてみます。Type IIA 理論で質量ゼロのボソンは重力場 $g_{\mu\nu}$、スカラー場 ϕ、ベクトル場 C_μ、2 階反対称テンソル場 $B_{\mu\nu}$、3 階反対称テンソル場 $C_{\mu\nu\rho}$ からなることが知られています。ここで、μ, ν, ρ は $0, 1, \ldots, 9$ の値を取りますが、ϕ を $g_{10\,10}$、C_μ を $g_{\mu 10}$、$B_{\mu\nu}$ を $C_{\mu\nu 10}$ と書き直すと、これらの場はあたかも 11 次元の重力場と 3 階反対称テンソル場であるかのような添え字の構造をした g_{MN}、C_{MNP} $(M, N, P = 0, 1, \ldots, 10)$ という二つの場にうまくまとまることが分かります。この事実は 10 次元の理論だと考えられていた超弦理論の背後に 11 次元の理論が隠れていることを示唆します。これを受けて、時空が 11 次元であるような理論が存在し、その 11 次元時空のうちの一つの空間方向（x^{10} 方向）が小さく丸まって 10 次元的になったものが Type IIA の超弦理論になるという関係にあるのではないかという仮説が Witten によって唱えられました。もしこれが本当だとすると、11 次元目の方向に運動量を持つような粒子が Type IIA 理論の中に見出されても良いはずだということになりますが、4.2 節で議論した D-brane の一種である、D0-brane がそれに対応するという解釈が与えられました。

この 11 次元の理論を 11 次元のローレンツ対称性が見える形で定式化する方法は未だに得られていませんが、名前は既に付けられていて M 理論と呼ばれています。この名前の由来には次に挙げるようにいろいろな説があります。

- **Membrane の M**

  上の議論より、M 理論の質量ゼロのボソンには 3 階反対称テンソル場 C_{MNP} があることになりますが、これの電荷を持つものはひもよりももう一次元多い $(1+2)$ 次元の膜なので、M 理論には M2-brane と呼ばれる $(1+2)$ 次元の膜が存在すると考えられています。そして、x^{10} 方向を S^1 に丸めたとき、この膜が x^{10} 方向に巻きついたものが Type IIA 理論のひもだと解釈されるのです。このため、M 理論は膜（Membrane）を用いて定式化できるのではないかという期待が持たれています。実際には膜の量子化は大変難しい問題で、どうも一筋縄ではいかないようですが。ちなみに x^{10} 方向に巻きついていない膜はどうなるのかというと、これは Type IIA 理論の D2-brane と解釈されます。

- **Mother の M**

  M 理論は全ての超弦理論の母親であるという言い方ができます。上で述べたように、M 理論の 11 次元時空のうちの一次元を S^1 にコンパクト化すると Type IIA 理論が出てきますが、実は他の超弦理論に対しても似たような解釈が与えられるのです。これを表にまとめたものが表 4 です。例えば Type IIB 理論は M 理論の 11 次元時空

M 理論	半径 $\to 0$	超弦理論
M on S^1	$\longrightarrow$	Type IIA
M on $S^1 \times S^1$	$\longrightarrow$	Type IIB
M on I	$\longrightarrow$	Het $E_8 \times E_8$
M on $I \times S^1$	$\longrightarrow$	Het $SO(32)$
M on $S^1 \times I$	$\longrightarrow$	Type I

表 4: M 理論は超弦理論の母親

  のうちの二次元をトーラス $S^1 \times S^1$ にコンパクト化して、その二つの S^1 の半径を両方とも小さくすることで得られます。M 理論を $S^1 \times S^1$ にコンパクト化すると 9 次元の理論が得られるように思われますが、この系は Type IIA 理論を S^1 にコンパクト化するのと同じなので、これで半径をゼロにすると図 7 で説明した T-duality を使って Type IIB 側に移ると $S^1_{1/R}$ の方向が大きく広がって 10 次元の理論になることが分かります。表 4 で I と書いたのは線分 ($I = S^1/\mathbf{Z}_2$) のことです。線分には二つの端がありますが、M 理論の x^{10} 方向を線分 I にコンパクト化すると、その線分の両端にそれぞれ E_8 ゲージ場が局在することで、Heterotic $E_8 \times E_8$ 理論が得られると考えられています。

- **Miracle, Magic, Mystery の M**

  M 理論を考えることの大きな利点は、超弦理論において非常に非自明だった双対性（特に S-duality）がまるで魔法をかけたかのように自明になるということです。例えば、Type IIB 理論を得るときには表 4 のように M 理論を $S^1 \times S^1$ にコンパクト化しましたが、この二つの S^1 を入れ換える操作がちょうど Type IIB 理論の S-duality に対応するのです。二つの S^1 の半径の比が Type IIB 理論の結合定数 g_s に対応していて、二つの S^1 を入れ換えることで g_s が $1/g_s$ に置き換わることも分かります。Heterotic $SO(32)$ 理論と Type I 理論の間の S-duality も同様にして得られます。表 4 を見ると、Heterotic $SO(32)$ 理論と Type I 理論は、それぞれ M 理論を $I \times S^1$ と $S^1 \times I$ にコンパクト化したものとありますが、ここでは x^{10} 方向を I と S^1 のどちらに割り当てるかで Heterotic $SO(32)$ 理論が得られたり Type I 理論が得られたりするので、敢えて I と S^1 の順番が異なるものを区別して書きました。M 理論の側で見たら $S^1 \times I$ と $I \times S^1$ とは単に座標の取り替えで移りあうので、これらが等価な理論であることは自明です。

- **Matrix の M**

  M 理論を行列理論によって定式化しようとする提案がなされ、一時期 M(atrix)-theory などと呼ばれました。これについては後でまた触れることにします。

- **'M' looks like 'W'.**

  これは 1999 年にドイツ行われた Strings '99 という国際会議のバンケットで Townsend が言った冗談です。W は、もちろん Witten の W のことでしょう。

このように、M 理論の存在を信じると表 1 にある 5 つの超弦理論を統一的に理解することができるようになります。超弦理論は 5 つの異なる理論からなるというよりは、M 理論と呼ばれる一つの理論に対する 5 通りの極限を表しているという認識に至ります。その気持ちを表現した図が図 10 です。かつてはばらばらだった 5 つの超弦理論が双対性で結びつき、さらには M 理論を考えることで一つの理論に統一される様子を表しています。ここ

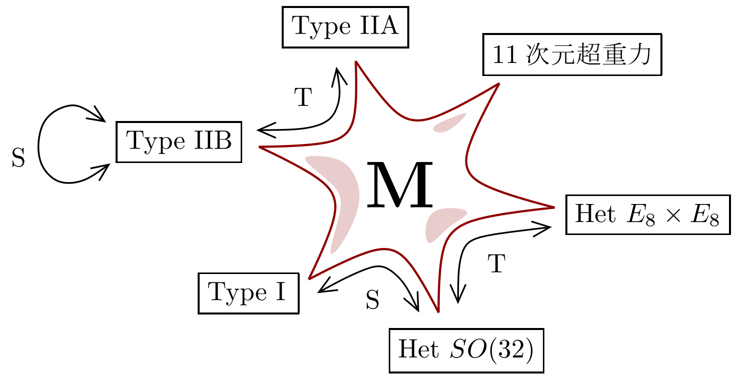


図 10: 超弦理論の地図（1995 年以降の改訂版）

で、11 次元超重力理論も仲間に加えましたが、これは M 理論の低エネルギー極限で得られるはずの理論です。

4.4 数々の驚き

これまで、双対性、D-brane、M 理論をキーワードに超弦理論の発展を見てきましたが、これらの概念がもたらしたインパクトは大変大きなものがありました。特に、弦理論に限らず、場の理論、量子重力、宇宙論など、物理の他の分野に対する幅広い応用が見出され、数々の驚くべき発見がありました。ここではとても全てを網羅するような話はできませんので、いくつかかいつまんで説明してみたいと思います。

場の理論へのインパクト

D-brane が登場して特に著しい変化があったのは、超弦理論と場の理論との間の関係です。ちょうど D-brane が一躍脚光を浴びるようになる直前に、Seiberg による $N = 1$ 超対称ゲージ理論における双対性の発見や Seiberg-Witten による $N = 2$ 超対称ゲージ理論の低エネルギー有効理論の厳密解など、超対称ゲージ理論の側でも大きな発展があったことが超弦理論と場の理論との間の関係を深めたことの大きな要因だったと思います。

本質的なことは、図 9 のように D-brane に端を持つ open string からゲージ場が出るということです。したがって、Dp-brane の上の低エネルギー有効理論は $(1 + p)$ 次元のゲー

ジ理論になり、これによってゲージ理論を超弦理論の枠内に実現することが可能になります。この関係を利用すると、超弦理論や M 理論を用いて場の理論を解析したり、逆に、場の理論の非摂動的な解析を弦理論に応用したりできるようになります。

例えば、M 理論を用いて 4 次元の超対称ＱＣＤを実現すると、場の理論における双対性が自明になったり、上で触れた Seiberg-Witten の厳密解を brane の幾何学を用いて再現することができるようになったりします。また、超弦理論における双対性を用いると、場の理論における新たな双対性が見つかったり、未知のソリトンの存在が予言されるなどの応用もあります。ゲージ理論を超弦理論の低エネルギー理論である超重力理論で記述できる状況では、ゲージ理論の超重力理論を用いた全く新しい解析法が提唱されました。こうしたアプローチによる場の理論の研究は今でも盛んに行われており、いよいよ現実の QCD に迫ろうというところまで来ています。

量子重力へのインパクト

D-brane というのは重さのある物体なので、D-brane が存在すると、一般に周りの時空はその影響を受けて曲がります。特に、うまく D-brane を配置するとブラックホールになることがあります。これを利用すると、ブラックホールを超弦理論の枠内で解析することが可能になるのです。特に、その応用として、ある種のブラックホールのエントロピーやホーキング輻射等の計算が弦理論を用いて行われました。ブラックホールのエントロピーは、従来は Bekenstein-Hawking の公式によりホライズンの面積を求めることによって計算されていました。これに対して弦理論側でのエントロピーの計算は、統計力学的に状態数を数えることで行われます。これらの計算結果を古典論が良い近似になるような状況で比較すると、期待通りばっちり一致するのです。このように、弦理論を用いることでブラッ

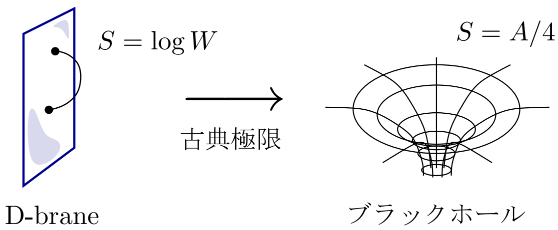


図 11: D-brane とブラックホール

クホールのエントロピーやホーキング輻射等の計算が微視的な見方で行われたことは弦理論や量子重力の分野に対して大きなインパクトを与えました。これによって弦理論もたまには役にたつもんだという印象を受けた宇宙論屋もずいぶんいたと聞いています。

行列理論、非可換な時空

D-brane に関する研究から、ある意味で副産物のような形で行列理論が得られました。例として Type IIA 理論で D0-brane を考えましょう。D0-brane は空間方向に広がりを持たない点粒子ですが、その作用は、基本的には普通の点粒子の作用と同じで

$$S \sim -m \int \sqrt{1-(\dot{x}^k)^2}\, dt \tag{4.2}$$

のような形をしています。ここで $x^k(t)$ $(k=1,2,\dots,9)$ は粒子の空間方向の位置を表しますが、この自由度はやはりこの D0-brane に端を持つ open string から生じます。さて、それではこの D0-brane が N 個あるとどうなるのかを考えてみましょう。この場合、open string は、図 12 にあるようにその二つの端がどの D0-brane に乗っているかで $N\times N$ 種類あります。そうすると、先ほど出てきた $x^k(t)$ も各 open string ごとに存在するので、全

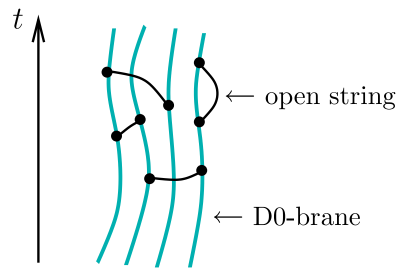


図 12: D0-brane が N 個ある場合

部合わせると $N\times N$ 行列をなすことが分かります。D0-brane が一個の時、$x^k(t)$ はその D0-brane の空間方向の位置を表していたので、 D0-brane が N 個ある場合には空間方向の座標 x^k が $N\times N$ 行列に拡張されることになります。

このように $N\times N$ 行列を基本的な自由度として持つような理論を基礎に考えるのが行列理論です。4.3 節で少し触れたように、このような系を用いて超弦理論や M 理論を定式化しようとする提案がなされ、これらの理論の非摂動論的定式化の候補であると言われています。

一つ面白いことは、座標 x^k が行列になると、互いに可換であるとは限らなくなることです。これによって、非可換な時空という概念が生じます。数学の方では通常の幾何学を拡張した、非可換幾何学という分野が随分前からありますが、ここで出てきた非可換な時空の概念はまさにこの非可換幾何の枠組みに通ずるものです。D-brane を研究していくうちに、時空の捉え方に対して新たな可能性を見出すとともに、それを記述するための新しい数学の分野へと自然に導かれたわけです。

タキオニックな超弦理論

最後に、これも超弦理論に対する従来の理解に変更を迫る話題としてタキオニックな超弦理論について触れてみたいと思います。例として、Type IIA 理論でやりましょう。表 1 では、Type IIA 理論は closed string だけからなる理論であると書きましたが、実はこの理論に open string を付け加えることが可能です。基本的なアイディアは時空を埋め尽くす $(1+9)$ 次元の D-brane、つまり D9-brane を導入することによって、時空のどこにでも端を持てる open string を加えるということです。4.2 節で Dp-brane を導入したときに、p の値は Type IIA 理論では偶数であると言いましたが、実はこれ以外の p の値も許されます。ただし、その場合には D-brane は保存する電荷を持たず、放っておくと消滅してしまうような不安定なもので、non-BPS D-brane と呼ばれています。この non-BPS D9-brane を N 枚導入すると、上の行列理論のところで説明したのと同じ理屈で open string から出てくるゲージ場が $N\times N$ 行列になることから $U(N)$ のゲージ対称性が新たに生じること

になります。詳しくは省略しますが、Type I や Type IIB でも同様の操作で open string を新たに加えることができ、表 1 のゲージ群とひもの欄は表 5 のように変更されることになります。ここで N の値はいくらでも大きな値を取れるので、大は小を兼ねるという格言に

弦理論	Type I	Type IIA	Type IIB
ゲージ群	$O(N+32)\times O(N)$	$U(N)\times U(1)$	$U(N)\times U(N)$
ひも	open + closed	open + closed	open + closed
タキオン場	$(\square,\square)$	adjoint	$(\square,\square)$

表 5: タキオニックな超弦理論

従って $N\to\infty$ を考えると巨大なゲージ対称性が生じることになります。

これらの理論の大きな特徴は、open string から出てくる場の中にタキオン場と呼ばれる不安定なモードが存在することです。ここでタキオン場というのは、図 13 のようなポテンシャル $V(T)$ を持つスカラー場 T のことで、放っておくところころとポテンシャルの最低点を求めて転がり落ちるような不安定な場です。ここで、上で述べた non-BPS D-brane

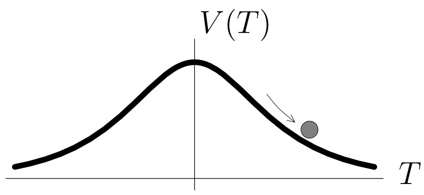


図 13: タキオンのポテンシャル

の不安定性と、このタキオン場が存在することによる不安定性は同じことを別の言葉で表現しているのだと考えるのは自然なことでしょう。これは「Sen の予想」と呼ばれ、今や多くの解析によって支持されている事実です。特に、このタキオン場がポテンシャルの最低点（図 13 では $|T|\to\infty$）に落ち着いた状況がちょうど non-BPS D-brane が消滅した状況に対応すると考えられています。

そう思うと、表 1 の段階で考えられていた超弦理論というのは、図 13 で言うと $|T|\to\infty$ という非常に特殊な場の配位のみを考えていたことになります。この点のまわりで摂動論をする分には問題はないのでしょうが、非摂動論的な効果を考えようとすると場の配位の全体の情報が必要になります。例えば、ここで出てきたゲージ場やタキオン場を用いてキンク、ボーテックス、モノポール、インスタントンといったトポロジカルに安定なソリトン解を構成することが可能になります。実はこれらのソリトンは、D-brane なのです。D-brane は 4.2 節では open string が端を持てる壁として導入しましたが、これと全く同じものを別の表現の仕方で表したことになります。表 5 のように超弦理論を拡張しておくと、D-brane はソリトンとして理論の中に取り入れられており、もはや open string が端を持てる壁として新たに手で付け加える必要はなくなります。

また、もし Type I 理論や Type II 理論で宇宙の進化のようなことを議論しようとしたら、宇宙が始まった時からずっと空間のあらゆる点で $|T|\to\infty$ という配位に落ち着いているとするのはとても不自然な状況設定でしょう。その意味でも表 1 でかつて考えられていた超弦理論の枠組みは不満足で、表 5 のような拡張された枠組みを出発点と考える必要

があるように思います。現実的な宇宙の話につなげるのはまだなかなか難しい段階ですが、もしかしたら、このタキオン場がインフレーションを引き起こす種になり得るかも知れません。

5 反省と展望

前節で見てきたように超弦理論はこの 10 年間ほどで著しい発展を遂げましたが、3 節で考えたような統一理論としての現象論的な側面よりは、超弦理論の非摂動的効果のような理論的な側面が主なテーマでした。では、果たしてそうした発展が 3 節の終わりに述べたような問題を解決したのかどうか、統一理論に再挑戦する準備が整ったのかどうかを反省してみます。

まず、一つ言えることは、 3 節で活躍した Heterotic $E_8 \times E_8$ 理論が 5 つの超弦理論の中で特別であるわけではないことが分かってきたということです。4.3 節で見たように、M 理論を考えることによって、どの超弦理論が選ばれるかという問題も真空の選び方の問題の一種になりました。真空の選び方の問題は依然として難しい問題ですが、M 理論の中でどの真空が選ばれるのかが議論できるようになれば、5 つある超弦理論のうち、どの超弦理論が選ばれるのかという問題も議論できるようになるでしょう。超弦理論というのは M 理論における特殊な極限を考えたものに過ぎないという立場に立つなら、必ずしも超弦理論が良い記述を与えないような領域に本当の真空が見つかるかも知れません。

3 節でも述べたように、やはり気になるのは真空が一つに決まるかどうか？期待するように 4 次元時空や 3 世代の物質粒子などを予言するのか？という点でしょう。4 節で説明したように、双対性などによって強結合のふるまいもある程度分かるようになりましたが、真空が一つに決まる傾向は今のところ見られないように思います。むしろ、D-brane の発見等により、超弦理論の真空にはかつて思われていたよりもはるかに豊富な構造があることが分かったと言った方が良いでしょう。ただ、非摂動効果をフルに取り入れた解析をすればやはり真空が一つに決まるという可能性ももしかしたらまだ残されているのかも知れません。超弦理論や M 理論の非摂動論的な定式化としては行列理論などが提案されましたが、まだ完成には至っておらず、なかなかはっきりとしたことを言うのは難しいのが現状だと思います。

4 節で見た発展を振り返ってみると、超弦理論の新たな構造が明らかになるにつれて超弦理論の目指すべき方向性がややあいまいになってきた感があります。つまり、'80 年代後半には超弦理論は究極の統一理論なのだという方向性が定まったかのように思われたわけですが、second revolution を経て、仮に超弦理論が統一理論ではなかったとしても、ゲージ理論や量子重力などを研究する上で十分役に立つので良いではないかという立場も説得力を増してきました。例えば、D-brane などを用いればゲージ群の選び方なども無数にあり、一つに決まらないという状況は、超弦理論がすべてを予言する究極の理論であると期待する立場の人にとってはあまり好ましいことではありませんが、超弦理論を用いてゲージ理論を解析する観点からすると、それだけ応用範囲が広くなるのでありがたいわけです。

とは言え、3 節で説明したようなシナリオは依然として魅力的であり、今後、second revolution の余波が落ち着いてきたころに、何かのきっかけで再び火がつけられることに

なるのではないかと僕は期待しています。その時には、ここで得られた知識がきっと大いに役に立つことでしょう。

もう一度、統一理論としての超弦理論に戻って考えてみます。そもそも、真空は本当に一つに決まるべきでしょうか？もちろん一つに決まったらすっきりしますが、別に決まらなくてはならないというわけでもないでしょう。現在の超弦理論の枠組みだけで全てが決まるというのは期待のしすぎで、現実的な真空を決めるには、宇宙の初期条件の取り方など、何か別の要素が絡んでくるのではないかという気もします。現実世界に目を向けてみると、超対称性は最終的にはすべて破れており、また宇宙が膨張していることも知っています。したがって、超対称性を保つ静的な真空はもともと現実的ではないわけです。4 節で議論した双対性や M 理論などの成功の多くは超対称性がある状況での解析に限られており、超対称性が破れた状況でのテクノロジーはまだまだ未開拓な部分が多いです。4 節の最後に紹介したタキオニックな超弦理論では超対称性が破れた状況や系が時間発展している状況での解析がある程度なされていますが、そうした状況では超対称性を保つ静的な場合とは理論の様相が随分異なっており、予想外な結果や問題に出くわすことが多々あります。このような研究は今後ますます重要になってくるはずだと思います。特に、現実世界での超対称性の破れを超弦理論で理解することが次の revolution のための鍵になるのではないでしょうか。その時、超対称性が破れている状況で宇宙項が何故小さいのかも超弦理論が答えてくれるかどうかが見所でしょう。

6　超弦理論の魅力

最後に、この話を締めくくるにあたって、蛇足ながら超弦理論の魅力を語ってみたいと思います。

- **超弦理論はもともと統一理論を作るために考え出された理論ではないのに、統一理論らしきものを含んでいるのは奇跡的に見える。**

  これが偶然であるとするのはあまりにもったいない話です。

- **高エネルギーでも理論が破綻しない（と信じている）ので、言い訳がいらず、安心して使える。**

  重力理論や高次元のゲージ理論など繰り込み可能でない理論を扱うときに超弦理論の存在は心理的サポートになります。

- **人為的な要素がとても少なく、本物を扱っている気分になれる。**

  超弦理論では基本的に手でいじれるパラメータはありません。真空の選び方には自由度がありますが、運動方程式の解であるという条件は結構きつく、何でも勝手に選べるというわけではありません。

- **遺跡の発掘に似ている。**

あまりうまく言えませんが、弦理論の研究は人がデザインして何かを建設するというよりは、既にどこか地中に埋まっているものを様々な手がかりをもとにして掘り起こして探しているというイメージがあります。例えば、4.4 節で出てきた非可換幾何を例に取ると、非可換幾何という道具を使って時空を記述してやろうと企んだわけではなく、超弦理論を調べていたら、あろうことか非可換幾何が埋まっていたという感じです。

- **時空構造など、大それた予言ができる可能性がある。**

  実際に大それた予言をするのはなかなか難しいことですが、その可能性を常に予感させてくるところが魅力です。

- **恐ろしく豊富な内容を含んでおり、びっくりするようなことがしばしば起こる。**

  弦理論が見出された当時、図 10 のような地図ができると誰が想像したでしょうか。

- **アイディアの宝庫で、さまざまな分野に幅広い応用がある。**

  数学の様々な分野、超対称ゲージ理論、QCD や QED、量子ホール系、格子ゲージ理論、宇宙論、ブラックホール、ブレーンワールドなどなど。

- **などなど**

僕にとっては、こんな理論が存在すること自体が驚異です。超弦理論が我々の期待するような究極の理論であるかどうかはまだ良く分かりませんが、それを見極めることに学問としての文化的価値は十分にあると信じています。